
الله
بسم الله الرحمن الرحيم



الإشارات والأنظمة

التحليل باستخدام الطرق التحويلية وماتلاب

الجزء الثاني

تأليف

M. J. Roberts

أستاذ بقسم الكهرباء وهندسة الحاسب جامعة تينيسي

ترجمة

د. تركي بن عبد العزيز التميم

أستاذ علوم الحاسب المشارك

جامعة الملك سعود

د. محمد إبراهيم العدوي

أستاذ الاتصالات والإلكترونيات

جامعة حلوان – مصر

د. حسن فؤاد محمد السيد

أستاذ الهندسة الطبية – جامعة الملك سعود

جامعة حلوان - مصر



ح جامعة الملك سعود، ١٤٣٦هـ (٢٠١٥م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

روبرتس ، ميخائيل ج.

الإشارات والأنظمة التحليل باستخدام الطرق التحويلية وماتلاب. / ميخائيل ج . روبرتس؛ تركي عبدالعزيز التميم؛ محمد ابراهيم العدوي؛ حسن فؤاد محمد السيد.- الرياض، ١٤٣٦هـ ٢مج.

١٠٤٤ص؛ ٢١×٢٨سم

ردمك: ٢-٣٥٩-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨ (مجموعة)

٥-٣٦١-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨ (ج٢)

١- لغة ماتلاب ٢- الرياضيات- معالجة البيانات أ. التميم (مترجم) ب. العدوي، محمد ابراهيم (مترجم) ج. السيد، حسن فؤاد (مترجم) د. العنوان

ديوي ٠٥٥.١٣٣ ١٤٣٦/٣٦٢٨

رقم الإيداع: ١٤٣٦/٣٦٢٨

ردمك: ٢-٣٥٩-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨ (مجموعة)

٨-٣٦٠-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨ (ج٢)

هذه ترجمة عربية محكمة صادرة عن مركز الترجمة بالجامعة لكتاب:

Signals and Systems: Analysis Using Transform Methods and MATLAB
By: Michael J. Roberts
© The McGraw-Hill Companies., 2012

وقد وافق المجلس العلمي على نشرها في اجتماعه الثالث عشر للعام الدراسي ١٤٣٥/ ١٤٣٦هـ المعقود بتاريخ ٢٧/ ١١/ ١٤٣٥هـ الموافق ٢٢/ ٩/ ٢٠١٤م.



مقدمة المترجمين

نتقدم بجزيل الشكر لمركز الترجمة بجامعة الملك سعود، الذي أخذ على عاتقه مسؤولية الإسهام في إثراء المكتبة العربية بالكتب الاختصاصية في المجالات المختلفة، وذلك من أجل النهوض بالأمة العربية فكرياً، وثقافياً، وعلمياً.

لقد وقع اختيارنا على هذا الكتاب لترجمته؛ لأنه يقدم موضوع مقرر الإشارات والأنظمة، الذي يتم تدريسه في كثير من التخصصات الهندسية، مثل: الاتصالات، والإلكترونيات، والحاسبات، وحتى التخصصات الميكانيكية، وبالذات تخصص الميكاترونيات. وكنتيجة لأهمية موضوع هذا الكتاب، رأينا ضرورة أن تشتمل المكتبة العربية على كتاب في هذا التخصُّص، حيث انه يغطي تقريباً معظم ما يحتاجه طلاب مرحلة البكالوريوس، والسنوات الأولى من مرحلة الماجستير، وهو يمثل مرجعاً يقتنيه الطالب للرجوع إليه في أي وقت يحتاجه، سواء في حياته العملية، أو في أبحاثه إذا استمر في المجال الأكاديمي. ونظراً لافتقار المكتبة العربية إلى وجود مثل هذه الكتب النوعية المتخصصة، فقد رأينا أن من واجبنا ترجمة هذا الكتاب، ليصبح مرجعاً باللغة العربية.

إن ترجمة الكتب العلمية إلى اللغة العربية مليئة بالمصاعب، حيث يجب الالتزام بالنص الأصلي على أن تكون الترجمة بلغة عربية سلسة وسليمة، وتعكس المفهوم العلمي، والمعنى الصحيح بصورة دقيقة ومفهومة. من أجل ذلك قام المترجمون ببذل كل جهد ممكن؛ لتحقيق جميع العناصر المذكورة آنفا"، سائلين الله السداد في ذلك لخير وفائدة والمهتمين بموضوعات هذا الكتاب. ولقد توخينا السلامة والسلاسة اللغوية للترجمة العربية وفي الوقت نفسه دأبنا جاهدين لعكس المفهوم العلمي، والمعنى الصحيح بشكل دقيق، وليكون مفهوماً للقارئ العربي.

لقد بذلنا كل جهد ممكن لتحقيق هذه العناصر مجتمعة، حيث تم الاتفاق بين المترجمين على توحيد المصطلحات العلمية طبقاً لما هو متعارف علية بالمكتبة العربية. ولقد تم التأكد من المصطلحات عن طريق المعلومات

المتوافرة على الشبكة العنكبوتية. ولقد تمت مراجعة تلك المصطلحات بدقة، وكذلك المعادلات، والأشكال الموجودة بالكتاب.

وفي النهاية نرجو من الله أن نكون قد وُفّقنا إلى ذلك. والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل.

المترجمون

يتقدم المترجمون بخالص الشكر والتقدير للمهندسة هديل محمد العدوي، لمجهودها في مراجعة وإعداد الرسومات والأشكال التي يحتويها الكتاب.

استعراض الكتاب

الحافز أو المحرك

ألفت الطبعة الأولى لأنني أحببت الجمال الحسابي في تحليل الإشارات والأنظمة، وهذا لم يتغير. الحافز للطبعة الثانية هو تحسين الكتاب اعتمادا على خبرتي في استخدامه في التدريس، واستجابةً للنقد البناء من الطلاب والزملاء.

المستمعون

لقد تم إعداد هذا الكتاب ليغطي مقرراً في فصلين دراسيين متتابعين في أساسيات تحليل الإشارات والأنظمة خلال سنة للمبتدئين أو المتقدمين. يمكن استخدامه أيضاً (كما استخدمته أنا) ككتاب للمراجعة السريعة في فصل دراسي واحد لمستوى الماجستير للطرق التحويلية المطبقة على الأنظمة الخطية.

التغيرات عن الطبعة الأولى

لقد استخدمت الطبعة الأولى منذ كتابتها، مع كتابي الثاني، أساسيات الإشارات والأنظمة، في كل محاضراتي. كما استخدمت أيضاً في محاضراتي مسودة الطبعة الثانية، لاختبار تأثيرات الطرق المختلفة لتقديم موضوعات جديدة ولاكتشاف وتصحيح (آمل ذلك) كل أو معظم الأخطاء في كل من النص وحلول التمارين. لقد استقبلت أيضا آراء من المراجعين عند مراحل مختلفة من عملية الإعداد للطبعة الثانية. وعلى ذلك، واعتماداً على خبراتي والمقترحات من المراجعين والطلاب، قمت بعمل التغيرات التالية من الطبعة الأولى.

- بالنظر إلى الكتب الجيدة القبول في مجال الإشارات والأنظمة، يمكن أن نجد أن التدوين والترقيم كان بعيدا عن المثالية، أو القياسية. كل مؤلف له/لها طريقة التدوين المفضلة، وكل طريقة تكون مريحة لبعض الأنواع من التحليل، ولكنها ليست مريحة للأنواع الأخرى. لقد حاولت بقدر الإمكان تنظيم، أو ترشيد

عملية التدوين، مزيلاً كلما أمكن، التعقيدات والتشتيت في الرموز الجانبية. لقد وضعت هذه الرموز الجانبية لجعل الموضوعات أكثر دقة وغير مضللة، ولكن أدت في بعض الأحوال إلى إجهاد الطلاب، وارتباكهم في القراءة والدراسة في الكتاب. فقد قمت أيضا بتغيير الرموز المستخدمة في دوال التوافقات في الزمن المستمر، بحيث لا تلتبس بسهولة مع دوال توافقات الزمن المتقطع.

- فصل ٨ في الطبعة الأولى تم تناول دوال الارتباط وكثافة طيف القدرة والطاقة ولكن تم حذفه في هذه الطبعة. معظم المقررات الابتدائية في الإشارات والأنظمة لا تغطي هذا النوع من الموضوعات، وتتركه كي تتم تغطيته في مقررات عن الاحتمالات والعمليات العشوائية.
- تم نقل العديد من الملحقات في الطبعة الأولى المطبوعة إلى الموقع الإلكتروني للكتاب www.mhhe.com/roberts. إن هذا، بالإضافة إلى حذف الفصل ٨ في الطبعة الأولى، قد قلل بدرجة كبيرة من حجم الكتاب، الذي كان في الطبعة الأولى سميكاً وثقيلاً.
- لقد حاولت وضع الكتاب في صورة وحدات على قدر المستطاع، متوافقاً مع احتياجات التغطية التتابعية لبعض الموضوعات. نتيجة لذلك أصبحت الطبعة الثانية بها ١٦ فصلاً بدلاً من ١٢. لقد أصبحت تغطية الاستجابة الترددية، والمرشحات، وأنظمة الاتصالات، وتحليل فضاء الحالة في فصول منفردة الآن.
- الفصول العشرة الأولى هي في الغالب تقديم لطرق تحليل جديدة، وأساسيات نظرية وحسابية. تتعامل الفصول الستة الأخيرة في الغالب مع تطبيقات هذه الطرق على أنواع شائعة من الإشارات والأنظمة العملية.
- الطبعة الثانية بها أمثلة تستخدم ماتلاب أكثر من الطبعة الأولى، وأمثلة ماتلاب التي قدمت من قبل.
- بدلا من تقديم كل دوال الإشارة الجديدة في فصول لوصف لهذه الإشارات، فقد قمت بتقديم بعضها هناك، وأبقيت بعض الدوال المستنتجة إلى وقت الحاجة إليها التي تظهر طبيعياً في فصول متأخرة.
- في الفصل ٤ عن خواص ووصف الأنظمة، تمت إطالة شرح النماذج الرياضية للأنظمة.
- قمت كاستجابة لتعليقات المراجعين بتقديم الالتفاف convolution في الزمن المستمر أولاً، ويتبعه الالتفاف في الزمن المتقطع. على الرغم من أن الالتفاف في الزمن المستمر يشتمل على مفاهيم الحدود والنبضة في الزمن المستمر، والتي لا يشتمل عليها الالتفاف في الزمن المتقطع، فقد استشعر المراجعون أن تعود الطلاب الغالب على الأزمنة المستمرة قد يجعل أفضلية لهذا الترتيب.
- لقد تم وضع تأكيدات أكثر على أهمية مبادىء التعامد في فهم الأساسيات لتتابع فورير، في كل من الزمن المستمر والمتقطع.

- تمت زيادة تغطية ثنائية تحويل لابلاس وتحويل زد Z.
- هناك تأكيدات أكثر على استخدام تحويل فورير المتقطع لتقريب الأنواع الأخرى من التحويلات وبعض طرق معالجة الإشارة الشائعة باستخدام الطرق العددية.
- تمت إضافة موضوعات عن تعديل الزاوية في الزمن المستمر.
- الدالة كومب comb المستخدمة في الطبعة الأولى والمعرفة كما يلي :

$$comb_{N0}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN_0] \quad \text{و} \quad comb(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$$

والتي تم فيها تمثيل النبضة بـ $\delta(t)$ في الزمن المستمر وبـ $\delta[n]$ في الزمن المتقطع، قد تم استبدالها بدالة الصدمة الدورية. لقد تم تمثيل دالة الصدمة الدورية بـ $\delta_T(t)$ في الزمن المستمر وبـ $\delta_N[n]$ في الزمن المتقطع حيث كل من T و N هي دورات هذه الدوال على التوالي، ويتم تحديدها كما يلي :

$$\delta_N[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mN) \quad \text{و} \quad \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

الدالة كومب في الزمن المستمر تعتبر دالة رائعة حسابياً، ولكنني وجدت من خبرتي في محاضراتي أن كونها محجمة، أو ضابطة للزمن، وتكون أيضاً ضابطة، أو محجمة لشدة الصدمة عند تغيير المتغير t إلى at، يربك الطلاب. تتميز دالة الصدمة الدورية بأن بها المسافة بين النبضات (الدورة الأساسية) تكون معامل رمز جانبي بدلاً من تحديدها بالتحجيم الزمني. عند تغيير الدورة الأساسية، فإن شدة الصدمة لا تتغير في الوقت نفسه ، كما يحدث في الدالة كومب. إن ذلك يفصل بكفاءة بين تحجيم الزمن وتحجيم شدة الصدمة في الزمن المستمر وهذا سيخفف من بعض الارتباك عند الطلاب، الذي يتم تحديه مبدئياً بتجريد بعض المفاهيم الأخرى مثل الالتفاف، وأخذ العينات، أو العيننة والتحويلات التكاملية. على الرغم من أن تحجيم الزمن، وشدة النبضة في الوقت نفسه لا يحدث في الزمن المتقطع، فقد غيرت أيضاً تدوينها لتتوافق مع الصدمة الدورية الجديدة في الزمن المستمر.

نظرة عامة

يبدأ الكتاب بالطرق الحسابية لوصف الإشارات والأنظمة، في كل من الأزمنة المستمرة والمتقطعة. لقد بدأت فكرة التحويل مع تتابع فورير في الزمن المستمر، ومن هذه القاعدة ننطلق إلى تحويل فورير كامتداد لتتابع فورير

للإشارات غير الدورية. بعد ذلك فعلنا الشيء نفسه مع الإشارات في الزمن المتقطع. لقد قدمنا تحويل لابلاس كتعميم لتحويل فورير في الزمن المستمر للإشارات غير المحددة، والأنظمة غير المستقرة وكأداة فعالة وقوية في تحليل الأنظمة بسبب ارتباطه الشديد بالقيم الذاتية، والدوال الذاتية للأنظمة الخطية في الزمن المستمر. باقي الكتاب تم تخصيصه للتطبيقات عن تحليل الاستجابة الترددية، وأنظمة الاتصالات، وأنظمة التغذية العكسية، والمرشحات التماثلية والرقمية وتحليل فراغ الحالة. لقد قمنا خلال الكتاب كله بتقديم أمثلة ودوال وعمليات ماتلاب؛ لتنفيذ الطرق المقدمة، ويتبع ذلك ملخص لكل فصل.

ملخصات الفصول

الفصل ١

الفصل ١ هو مقدمة للمفاهيم العامة المشتملة على تحليل الإشارات والأنظمة بدون أي صعوبات حسابية. الغرض من هذا الفصل هو تحفيز الطالب عن طريق توضيح انتشار الإشارات والأنظمة في الحياة اليومية، وأهمية فهم هذه الإشارات.

الفصل ٢

فصل ٢ عبارة عن توضيح لوصف الطرق الحسابية لوصف الأنواع المختلفة لإشارات الزمن المستمر. يبدأ الفصل بالدوال المعروفة، الجيبية والأسية وبعد ذلك يمتد مدى توضيح الإشارات المبينة للدوال لتشتمل على الدوال الأحادية في الزمن المستمر (دوال التبديل). مثلما هو الحال في بعض الكتب وليس كلها، فإن الكتب الدراسية للإشارات والأنظمة، يتم تحديد دوال الخطوة، والإشارة، ونبضة الوحدة، والانحدار. بالإضافة لهذه الدوال تم تحديد دوال المثلث الأحادية والنبضة الدورية الأحادية. النبضة الدورية الأحادية، مع الالتفاف، تحقق طريقة مدمجة خاصة للوصف الحسابي للدوال الدورية الاختيارية.

بعد تقديم إشارات الدوال الجديدة في الزمن المستمر، تمت تغطية الأنواع الشائعة للتحويلات، وتحجيم المقدار، والإزاحة الزمنية، والتحجيم الزمني، والتفاضل والتكامل وتطبيقها على دوال الإشارات. بعد ذلك تمت تغطية بعض الخواص للإشارات التي تجعلها غير متغيرة لتحويلات معينة، والزوجية، والفردية، والدورية، وبعض الآثار لهذه الخواص في تحليل الإشارات. الجزء الأخير نماذج على قدرة وطاقة الإشارة.

الفصل ٣

الفصل ٣ يتبع مسار مشابه للفصل ٢ فيما عدا تطبيقه على إشارات الزمن المتقطع بدلاً من إشارات الزمن المستمر. لقد قدمنا الدوال الجيبية والأسية في الزمن المتقطع مع التعليق على مشاكل تحديد الدورة في الدوال الجيبية

في الزمن المتقطع. إن ذلك يعتبر أول تعريض للطالب على بعض الآثار لعملية العينة. لقد تم تحديد بعض دوال إشارات في الزمن المستمر مشابهة للدوال الأحادية في الزمن المستمر. بعد ذلك تم استعراض تحجيم المقدار، والإزاحة الزمنية، والتحجيم الزمني، والفرق والتراكم لدوال إشارات الزمن المتقطع، مشيرا إلى الآثار الفريدة والمشاكل التي تحدث، خاصة مع التحجيم الزمني لدوال الزمن المتقطع. ينتهي الفصل بتحديد وشرح طاقة الإشارة وقدرتها للإشارات في الزمن المتقطع.

الفصل ٤

هذا الفصل يتعامل مع الوصف الحسابي للأنظمة. في البداية تمت تغطية الصور الأكثر شيوعاً لتصنيف الأنظمة، مثل التجانس، والتجميع، والخطية، والثبات الزمني، والسببية، والذاكرة، وعدم الخطية الساكنة والانعكاسية. لقد تم تقديم الأنواع المختلفة للأنظمة التي بها، أو ليست بها هذه الخواص عن طريق الأمثلة لإثبات الخواص المختلفة من الوصف الحسابي للأنظمة.

الفصل ٥

يقدم هذا الفصل مفاهيم استجابة النبضة والالتفاف كمكونات للتحليل النظامي لاستجابة الأنظمة الخطية الثابتة، أو غير المتغيرة زمنياً LTI. لقد تم تقديم الخواص الحسابية للالتفاف في الزمن المستمر والطرق البيانية، أو الرسومية لفهم ماذا يعني التكامل الالتفافي. لقد وضحنا أيضاً كيف أن خواص الالتفاف يمكن استخدامها لربط الأنظمة الجانبية الموصلة على التوالي، أو على التوازي في نظام واحد، وكيف ستكون استجابة الصدمة للنظام الكلي. بعد ذلك تم تقديم فكرة دالة العبور عن طريق حساب استجابة نظام LTI للإثارة الجيبية المركبة. هذا الجزء متبوع بتغطية مماثلة لاستجابة الصدمة والالتفاف في الزمن المتقطع.

الفصل ٦

هذا هو بداية تعريض الطالب لطرق التحويل. لقد بدأ الفصل بتقديم المفاهيم التي بها يمكن التعبير عن أي إشارة دورية في الزمن المستمر، التي لها فائدة هندسية، عن طريق الربط الخطي للدوال الجيبية الحقيقية والمركبة في الزمن المستمر. بعد ذلك تم استنتاج تتابع فورير بطريقة رسمية باستخدام فكرة التعامد لتوضيح من أين يأتي وصف الإشارة كدالة لعدد من التوافقات المتقطعة (الدالة التوافقية). لقد ذكرنا شروط درشليت Dirichlet conditions لنمكن الطالب من معرفة أن تتابع فورير في الزمن المستمر ينطبق على كل الإشارات العملية في الزمن المستمر، ولكن ليس كل الإشارات في الزمن المستمر التي يمكن تخيلها.

بعد ذلك تم استعراض خواص تتابع فورير. لقد حاولنا أن تكون رموز وخواص تتابع فورير مشابهة بقدر الإمكان، ومكافئة لخواص تحويل فورير الذي يأتي بعد ذلك. تشكل دالة التوافق "زوج من تتابع فورير" مع دالة الزمن. في الطبعة الأولى تم استخدام رموز لدالة التوافق، حيث تم استخدام الحروف الصغيرة لكميات النطاق الزمني والحروف الكبيرة للدوال التوافقية. لسوء الحظ فقد سبب ذلك بعض الغموض؛ لأن دوال توافق الزمن المستمر والمتقطع تبدو متشابهة أو هي نفسها. في هذه الطبعة غيرنا رموز دالة التوافق لإشارات الزمن المستمر لنجعل من السهل تمييزها. هناك جزء عن تقارب تتابع فورير موضحا ظاهرة جيبس Gibb's عند دوال الانفصال، أو عدم التواصل. إننا نشجع الطلاب على استخدام الجداول والخواص لإيجاد الدوال التوافقية، حيث هذا التدريب يجهز الطلاب لعملية مشابهة لإيجاد تحويل فورير وبعد ذلك تحويلات لابلاس وزد z.

الجزء الأساسي التالي في الفصل ٦ يمتد من تتابع فورير إلى تحويل فورير. لقد قدمنا هذا المفهوم عن طريق فحص ما يحدث لتتابع فورير مع تقارب دورة الإشارة إلى المالانهاية، حيث تم تحديد واستنتاج تحويل فورير في الزمن المستمر كتعميم لتتابع فورير في الزمن المستمر. بعد ذلك تم تغطية كل الخواص المهمة لتحويل فورير في الزمن المستمر. لقد اتخذنا مساراً عاماً إلى اتفاقين رمزيين مختلفين تتم رؤيتهما في كتب الإشارات والأنظمة، وأنظمة التحكم، ومعالجة الإشارات الرقمية، وأنظمة الاتصالات، والتطبيقات الأخرى لطرق فورير مثل: معالجة الصور وفورير الضوئي: إنه إما استخدام التردد الدوري، f، أو التردد الزاوي ω. لقد تم استخدام كل منهما للتأكيد على أن كليهما يتعلق بالآخر من خلال تغيير متغير. نعتقد أن ذلك يجهز الطالب، أو يعده بطريقة أفضل ليرى كل من الصورتين في الكتب الأخرى في كلياتهم، وفي أعمالهم المتخصصة.

الفصل ٧

يقدم هذا الفصل تتابع فورير في الزمن المتقطع discrete time Fourier series, DTFS، وتحويل فورير المتقطع discrete Fourier transform, DFT وتحويل فورير في الزمن المتقطع discrete time Fourier transform DTFT، حيث تم استنتاجهم وتحديدهم بطريقة مشابهة لما حدث في الفصل ٦. إن DTFS و DFT، متشابهان تقريباً. وتم التركيز على DFT نتيجة استخدامه بكثرة في المعالجة الرقمية للإشارات. كما ركزنا على الفروق المهمة الناتجة عن الفروق بين الإشارات في الزمن المستمر والزمن المتقطع، وبالذات المجموع المحدد المدى DFT على العكس من مدى المجموع غير المحدد في CTFS. لقد أشرنا أيضاً إلى أهمية حقيقة أن DFT يربط بين مجموعة محددة من الأعداد مع مجموعة محددة أخرى من الأعداد، مما يجعلها قابلة للحساب الرقمي المباشر بالآلة. لقد تم شرح تحويل فورير السريع كخواريزم عالي الفعالية لحساب DFT. كما هو الحال في الفصل ٦، فقد تم استخدام كل من صور التردد الدوري والزاوي، مما يؤكد العلاقة بينهما. لقد تم استخدام F و Ω في الترددات في الزمن المتقطع لتميزهما من f و ω، اللذين يتم

استخدامهما في الزمن المستمر. ولسوء الحظ ، فإن بعض المؤلفين يعكسون هذه الرموز. إلا أن الاستخدام المقترح هنا يتوافق مع أغلب الكتب الدراسية عن الإشارات والأنظمة. وهنا مثال آخر عن عدم التوحيد للرموز في هذا المجال. والجزء الأخير المهم في هذا الفصل هو مقارنة الطرق المختلفة لفورير، حيث نؤكد خصوصاً على الازدواج بين العينة في نطاق معين، والتكرار الدوري في النطاق الآخر.

الفصل ٨

يقدم هذا الفصل تحويل لابلاس. لقد تم التعامل مع تحويل لابلاس من وجهتي نظر مختلفتين، كتعميم لتحويل فورير على فصيل أكبر من الإشارات وكنتيجة تنبع من إثارة نظام خطي غير متغير زمنياً بإشارة أسية مركبة. لقد بدأنا بتحديد تحويل لابلاس الثنائي مع شرح أهمية مناطق التقارب، وبعد ذلك تم تحديد تحويل لابلاس الأحادي، واستنتاج كل الخواص المهمة لهذا التحويل. لقد تم استعراض طريقة التحليل بالكسور الجزيئية بالكامل لحساب تحويل لابلاس العكسي، ثم أوضحنا أمثلة على حل المعادلات التفاضلية مع القيم الأولية باستخدام صورة تحويل لابلاس الأحادية.

الفصل ٩

نقدم في هذا الفصل تحويل z. يتوازى تقديم هذا الفصل مع ما حدث في تحويل لابلاس فيما عدا التطبيق على الإشارات والأنظمة في الزمن المتقطع. في البداية تم تحديد التحويل المزدوج مع شرح مناطق التقارب، وبعد ذلك تم تحديد التحويل الأحادي. لقد تم استنتاج كل الخواص المهمة، وأوضحنا التحويل العكسي باستخدام التحليل بالكسور الجزيئية وحل المعادلات الفرقية مع القيم الأولية، أو الابتدائية. لقد أوضحنا أيضاً العلاقة بين تحويل لابلاس وتحويل زد، وهي فكرة مهمة في تقريب أنظمة الزمن المستمر عن طريق أنظمة الزمن المتقطع في الفصل ١٥.

الفصل ١٠

إن هذا أول استعراض للتقابل بين إشارات الزمن المستمر وإشارات الزمن المتقطع الذي يتم عن طريق أخذ العينات، أو العينة. الجزء الأول يغطي كيف تتم العينة عموماً في الأنظمة الحقيقية باستخدام العينة والمسك ثم التحويل من تماثلي إلى رقمي. يبدأ الجزء الثاني بطرح سؤال عن عدد العينات الكافية لكي يتم توصيف إشارة الزمن المستمر. بعد ذلك تمت إجابة السؤال عن طريق استنتاج نظرية العينة. بعد ذلك تم شرح طرق الاستيفاء interpolation نظرياً وعملياً، والخواص الخاصة بالإشارات الدورية المحدودة المجال. لقد تم عمل تقدم في العلاقة بين CTFT لإشارات الزمن المستمر و DFT لمجموعة من العينات المحددة الطول المأخوذة منها. بعد ذلك أوضحنا كيف أن DFT يمكن استخدامه لتقريب CTFT لإشارة قدرة، أو إشارة دورية. الجزء المهم التالي لذلك يستكشف استخدام DFT في التقريب الرقمي لعمليات معالجة الإشارة الشائعة.

الفصل ١١

يغطي هذا الفصل المفاهيم المختلفة لاستخدام CTFT، و DTFT في تحليل الاستجابة الترددية. العناوين المهمة هي المرشحات، ومخططات بود Bode diagrams، والمرشحات العملية الفعالة، وغير الفعالة في الزمن المستمر، والمرشحات الأساسية في الزمن المتقطع.

الفصل ١٢

يغطي هذا الفصل المبادىء الأساسية لأنظمة اتصالات الزمن المستمر، بما في ذلك التعدد الترددي، التعديل وعكس التعديل المقداري الأحادي ومزدوج المجال الجانبي، والتعديل الزاوي. هناك أيضاً جزء مختصر عن التعديل المقداري وعكسه في أنظمة الزمن المتقطع.

الفصل ١٣

هذا الفصل مخصص لتطبيقات تحويل لابلاس بما في ذلك التعبير عن الأنظمة بالمخططات الصندوقية في النطاق الترددي المركب، واستقرار الأنظمة، والتوصيلات بين الأنظمة، وأنظمة التغذية العكسية بما في ذلك التتبع المكاني للجذر، واستجابة النظام للإشارات القياسية، وأخيراً البناء القياسي لأنظمة الزمن المستمر.

الفصل ١٤

هذا الفصل عن تطبيق تحويل زد z بما في ذلك تمثيل الأنظمة بالمخططات الصندوقية في النطاق الترددي المركب، واستقرار النظام، والتوصيلات البينية للأنظمة، وأنظمة التغذية المرتدة التي تشتمل على التتبع المكاني للجذر، واستجابة الأنظمة للإشارات القياسية، وأنظمة البيانات المتقطعة زمنياً (المعيننة) والبناء القياسي لأنظمة الزمن المتقطع.

الفصل ١٥

يغطي هذا الفصل التحليل والتصميم لبعض الأنواع الشائعة من المرشحات التماثلية والرقمية العملية. الأنواع التماثلية للمرشحات، هي: البترورث، والشيبيشيف بنوعيه I و II والبيضاوي (الكايور Cauer). الجزء الخاص بالمرشحات الرقمية يغطي الأنواع الأكثر شيوعاً لطرق محاكاة المرشحات التماثلية، بما في ذلك ثبات الصدمة والخطوة، والفروق المحددة، وتحويل زد z المتوافق، والتعويض المباشر، وتحويل زد ثنائي الخطية، واستجابة الصدمة المقطوعة والتصميم الرقمي بطريقة مكليلان McClellan.

الفصل ١٦

هذا الفصل يغطي التحليل بالحالة الفراغية في كل من أنظمة الأزمنة المستمرة والمتقطعة. هذه العناوين عبارة عن معادلات أنظمة وخرج، ودوال عبور أو نقل، وتحويلات لمتغيرات الحالة والقطرية.

الملحقات

هناك سبعة ملحقات عن معادلات رياضية مفيدة، وجداول للأربعة تحويلات فورير، وجداول لتحويل لابلاس، وجداول لتحويل زد z.

الاستمرارية

لقد تم هيكلة الكتاب بحيث يسهل تخطي بعض العناوين بدون فقد للاستمرارية. عناوين الزمن المستمر والزمن المتقطع تمت تغطيتها بالتبادل. والتحليل في الزمن المستمر يمكن تغطيته دون الرجوع إلى الأزمنة المتقطعة. أيضاً، فإن آخر ستة فصول يمكن حذفها في حالة الإعداد لمقرر مختصر.

المراجعات والتحرير

هذا الكتاب يدين بالكثير للمراجعين، وخاصة هؤلاء الذين أعطوا الوقت وقدموا النقد والمقترحات بالتحسين، إنني حقاً مدين لهم بالفضل. إنني أيضاً مدين بالفضل للعديد من الطلاب الذين حضروا محاضراتي على مدار العديد من السنوات. إنني أعتقد أن العلاقة بيننا أكثر تكافلية وحميمية مما يعتقدون. بمعنى، أنهم تعلموا مني تحليل الإشارات والأنظمة، وأنا تعلمت منهم كيف أدرس الإشارات والأنظمة لهم. إنني لا أستطيع أن أحصي كم مرة تم سؤالي العديد من الأسئلة المميزة من الطلاب التي تعكس ليس فقط أن الطلاب لم يكونوا يفهمون مفهوماً أو معني معين مني، ولكن أنني لم أكن أفهم هذا المعني جيداً كما كنت أعتقد قبل ذلك.

طريقة الكتابة

يعتقد كل مؤلف أنه وجد طريقة أفضل لعرض المادة العلمية التي يمكن للطلاب أن يستوعبوها، وأنا لا أختلف عن هؤلاء. لقد قمت بتدريس هذه المادة العلمية على مدار العديد من السنوات ومن خلال الخبرة في تصحيح الاختبارات وجدت ما يمكن للطلاب أن يستوعبوه بسهولة وما لا يمكن. لقد بذلت الساعات التي لا يمكن عدها في مكتبي في مقابلة الطلاب، كل على حدة، أشرح لهم هذه المفاهيم، ومن خلال هذه الخبرة، فقد وجدت ما يجب أن يقال في هذا الكتاب. من خلال كتابتي حاولت أن أتكلم ببساطة ومباشرة مع القارئ بطريقة حوارية مستقيمة، محاولاً أن أتجنب الرسميات إلى أقصى درجة ممكنة، ومتوقعاً للمفاهيم الخاطئة المعتادة ومحاولاً الكشف عنها. طرق التحويل ليست أفكاراً واضحة، ومع التعرض الأول لها، يمكن للطلاب أن يتعثروا في مستنقع محير من التجريدات، وفقدان الرؤية للهدف، الذي هو تحليل استجابة الأنظمة للإشارات. لقد حاولت (كما يفعل كل مؤلف)، أن أجد الربط السحري بين سهولة الوصول للهدف والصرامة الرياضية، نتيجة لأهمية كلٍ منهما. إنني أعتقد أن كتابتي واضحة ومباشرة، ولكنك أيها، القارىء، ستكون الحكم الأخير فيما إذا كان ذلك حقيقيا أم لا.

التمارين

كل فصل به مجموعة من التمارين التي يصاحبها الحلول ومجموعة أخرى من التمارين بدون حلول. الغرض من المجموعة الأولى أن تكون للتدريب، والمجموعة الثانية تكون تمارين أكثر تحدياً أو صعوبة.

ملاحظات ختامية

كما أوضحت في استعراض الطبعة الأولى، فإنني أرحب بأي نقد، أو تصحيح أو اقتراحات. كل التعليقات، بما في ذلك التعليقات التي لا أوافق عليها، والتعليقات التي لا تتوافق مع الآخرين، سيكون لها صدى بناءً على الطبعة القادمة لأنها بالتأكيد تشير إلى مشكلة. إذا كان هناك شيء لا يبدو لك صحيحاً، فإنه من المحتمل سيضايق الآخرين أيضا، وهدفي كمؤلف، أن أجد طريقة لحل هذه المشكلة. ولذلك فإنني أشجعك أن تكون مباشراً وواضحاً في أي ملاحظات عن أي شيء تعتقد أنه يجب تغييره ولا تتردد في ذكر أي خطأ قد تجده، من أتفه الأخطاء إلى أكثرها أهمية.

أود هنا أن أشكر المراجعين التاليين للمساعدة القيمة في إظهار الطبعة الثانية بصورة أفضل.

سكوت أكتن، جامعة فرجينيا

آلان أ. دسروتشرز، معهد رينسلير التقني

بروس إ. ديون، جامعة ولاية جراند فالي

هيون كون، جامعة أندروز

إرشن سيربدين، جامعة تكساس A&M

جيان شيو يانج، جامعة مينيسوتا

ميخائيل ج. روبرتس

أستاذ بقسم الكهرباء وهندسة الحاسب

جامعة تينيسي في كنوكسفيلي

mjr@utk.edu

المحتويات

تحويل زد z

(٩,١) المقدمة والأهداف

كل طريقة من طرق التحليل المستخدمة في الأزمنة المستمرة لها طريقة مقابلة في الأزمنة المتقطعة. المقابل لتحويل لابلاس في الزمن المستمر هو تحويل زد z في الأزمنة المتقطعة، والذي يمثل الإشارات كمجموع خطي من الأسس المركبة المتقطعة زمنياً. على الرغم من أن طرق التحويل في الزمن المتقطع تكون مماثلة لنظيراتها المستخدمة في الأزمنة المستمرة، إلا أنه هناك بعض الفروق المهمة القليلة.

هذا الشرح مهم؛ لأنه في تصميمات الأنظمة الحديثة يتم استخدام المعالجة الرقمية للإشارات أكثر وأكثر. نحتاج لفهم هذه المفاهيم المتقطعة زمنياً لنستوعب تحليل وتصميم الأنظمة التي تعالج الإشارات في كل من الأزمنة المستمرة والمتقطعة والتحويل والتحويل العكسي بينهما عن طريق أخذ العينات أو العيننة sampling والاستيفاء interpolation.

أهداف الفصل

أهداف هذا الفصل تتوازى مع أهداف الفصل ٨ ولكن مع التطبيق على الإشارات والأنظمة المتقطعة.

١- لاستنتاج تحويل زد كطريقة تحليل أكثر عمومية للأنظمة عن تحويل فورير المتقطع DTFT وكنتيجة طبيعية لعملية الالتفاف عند إثارة الأنظمة المتقطعة زمنياً بالدوال المميزة.

٢- لتعريف تحليل زد ومعكوسه وتحديد الإشارات التي سيوجد لها هذا التحويل.

٣- لتعريف دالة العبور للأنظمة المتقطعة زمنياً وتعلُّم طريقة لبناء النظم المتقطعة زمنياً مباشرة من دالة العبور.

٤- لوضع جداول لأزواج تحويل زد وخواصه ونتعلم كيفية استخدامهما مع مفكوك الكسور الجزيئية لإيجاد تحويل زد العكسي.

٥- لتعريف تحويل زد الأحادي الاتجاه.

٦- لحل المعادلات الفرقية في وجود القيم الابتدائية باستخدام تحويل زد الأحادي.

٧- لإيجاد علاقة مباشرة بين مواضع الأقطاب والأصفار لدالة العبور لنظام معين مع الاستجابة الترددية للنظام.

٨- لنتعلم كيفية استخدام ماتلاب للتعبير عن دوال العبور للأنظمة.

٩- لمقارنة فائدة وكفاءة طرق التحويل المختلفة في بعض الأنظمة الحقيقية.

(٩,٢) تعميم تحويل فورير في الزمن المتقطع

يعتبر تحويل لابلاس تعميماً لتحويل فورير في الزمن المستمر CTFT، والذي يسمح بالأخذ في الاعتبار الإشارات والاستجابات الصدمية التي ليس لها CTFT. لقد رأينا في الفصل ٨ كيف سمح هذا التعميم بتحليل الإشارات والأنظمة التي لم يمكن تحليلها باستخدام تحويل فورير وأيضا التبصير بأداء الأنظمة من خلال تحليل مواضع الأقطاب والأصفار لدالة العبور في النطاق s. تحليل زد يعتبر تعميماً للـ DTFT مع المميزات المماثلة لذلك. إن تحويل زد لتحليل الإشارات والأنظمة في الزمن المتقطع هو بمثابة تحويل لابلاس لتحليل الإشارات والأنظمة في الزمن المستمر.

هناك طريقتان لاستنتاج تحويل زد، متكافئتان مع الطريقتين اللتين تم اتباعهما في تحويل لابلاس وهما، تعميم DTFT، واستكشاف الخواص الفريدة للأسس المركبة كدوال مميزة للأنظمة LTI.

لقد تم تعريف الـ DTFT بزوج التحويل التالي:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\,d\Omega \;\leftrightarrow\; X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

وأيضا:

$$x[n] = \int_{1} X(F)e^{j2\pi Fn}\,dF \;\leftrightarrow\; X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$$

إن تحويل لابلاس يعمِّم تحويل فورير في الزمن المستمر CTFT عن طريق تغيير الجيوب المركبة التي على الصورة $e^{j\omega t}$ حيث ω تمثل متغيراً حقيقياً، إلى الأسس المركبة على الصورة e^{st} حيث s تمثل متغيراً مركباً. المتغير المستقل في DTFT هي التردد الزاوي المتقطع زمنياً Ω. تظهر الدالة الأسية $e^{j\Omega n}$ في كل من التحويلات الأمامية والعكسية (مثل $e^{-j\Omega n}=1/e^{j\Omega n}$ في التحويل الأمامي). عندما تكون Ω حقيقية، فإن $e^{j\Omega n}$ تكون جيباً مركباً في الزمن المتقطع ولها مقدار يساوي واحداً لأي قيمة لمتغير الزمن المتقطع n الذي يكون بدوره حقيقي. بالتناظر مع تحويل

لابلاس، يمكننا أن نعمم DTFT باستبدال المتغير الحقيقي Ω بالمتغير المركب s وبالتالي استبدال $e^{j\Omega n}$ إلى e^{Sn}، الذي يمثل أس مركب. عندما تكون S مركبة، فإن e^{Sn} يمكن أن تقع في أي مكان في المستوى المركب. يمكننا تبسيط عملية الترميز بوضع $z=e^{S}$ والتعبير عن الإشارات المتقطعة زمنياً كمجموع خطي من ال z^{n} بدلا من e^{Sn}. إن استبدال $e^{j\Omega n}$ مع z^{n} في DTFT يؤدي مباشرة إلى تعريف تحويل زد الأمامي الشائع كالتالي:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \qquad (٩,١)$$

ويصبح كل من x[n] و X(z) يكونان ما يسمى بزوج تحويل زد المعرف كالتالي:

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

إن حقيقة أن z يمكن أن تقع في أي مكان في المستوى المركب تعني أننا يمكننا استخدام الأسس المركبة المقطعة زمنياً بدلا من استخدام الجيوب المركبة فقط في التعبير عن الإشارات في الزمن المتقطع. بعض الإشارات لا يمكن التعبير عنها عن طريق المجموع المركب من الجيوب ولكن يمكن التعبير عنها عن طريق مجموع من الأسس المركبة.

(٩,٣) الإثارة الأسية المركبة والاستجابة

إفترض أن الإثارة لنظام LTI متقطع زمنياً هي أس مركب على الصورة Kz^{n} حيث z تكون مركبة على العموم، و K ثابت. باستخدام الالتفاف، فإن الاستجابة y[n] لهذا النظام LTI الذي له استجابة صدمة هي h[n] لإثارة أسية مركبة على الصورة $x[n]=Kz^{n}$ ستكون:

$$y[n] = h[n] * k_{z^n} = K \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, z^{n-m} = \underbrace{k_{z^n}}_{=x[n]} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, z^{-m}$$

وعلى ذلك، فإن الاستجابة للأس المركب هي الأس المركب نفسه، مضروباً في $\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}$ إذا كان هذا المجموع سيتقارب، وهذا يماثل تماما للمعادلة (٩,١).

(٩,٤) دالة العبور

إذا تمت إثارة نظام LTI له استجابة صدمة h[n] بالإشارة x[n]، فإن تحويل زد Y(z) للاستجابة y[n] سيكون كما يلي:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h[n] * x[n]) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] x[n-m] z^{-n}$$

بفصل المجموعين نحصل على:

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-m]z^{-n}$$

لنفترض q=n-m ، إذن يمكننا كتابة :

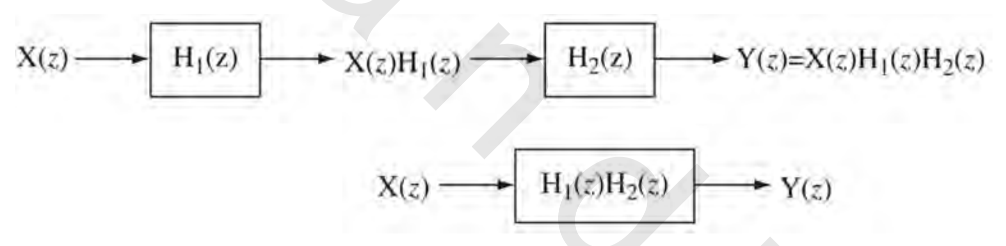
$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q]z^{-(q+m)} = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, z^{-m}}_{=H(z)} \underbrace{\sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q]z^{-q}}_{=X(z)}$$

وبالتالي ، فإن الطريقة مشابهة تماماً لطريقة تحويل لابلاس ، Y(z)=H(z)X(z) ، و H(z) تسمى دالة العبور للنظام المتقطع زمنياً ، تماماً كما ذكرنا في الفصل ٥.

(٩,٥) الأنظمة الموصلة على التوالي

دالة العبور لمكونات موصلة على التوالي من الأنظمة المتقطعة زمنياً يتم جمعها بنفس الطريقة مثل الأنظمة المستمرة زمنياً كما في شكل (٩,١).

دالة العبور الكلية لنظامين موصلين على التوالي تساوي حاصل ضرب دالتي العبور للنظامين.



شكل رقم (٩,١) التوصيل على التوالي للأنظمة

(٩,٦) تحقيق الأنظمة بالطريقة المباشرة II

في الممارسات الهندسية تكون الطريقة الأكثر شيوعاً لوصف الأنظمة المتقطعة زمنياً هي المعادلات الفرقية للنظام. لقد أوضحنا في الفصل ٥ أنه لأي نظام متقطع زمنياً وموصوف بالمعادلة الفرقية التي على الصورة :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$ المعادلة رقم (٩,٢)

فإن دالة العبور ستكون :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$ المعادلة رقم (٩,٣)

أو بالتبادل :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z^{N-M}\frac{b_0z^M+b_1z^{M-1}+\cdots+b_{M-1}z+b_M}{a_0z^N+a_1z^{N-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_N}$$ المعادلة رقم (٩,٤)

الطريقة المباشرة II ، أي البناء الأمثل للأنظمة المتقطعة زمنياً ، تكون مكافئة تماماً للطريقة المباشرة II في الزمن المستمر. دالة العبور التالية :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \cdots + b_N}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$

يمكن فصلها في صورة دالتي عبور لنظامين جانبيين على التوالي كما يلي :

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{1}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$ المعادلة رقم (٩,٥)

و :

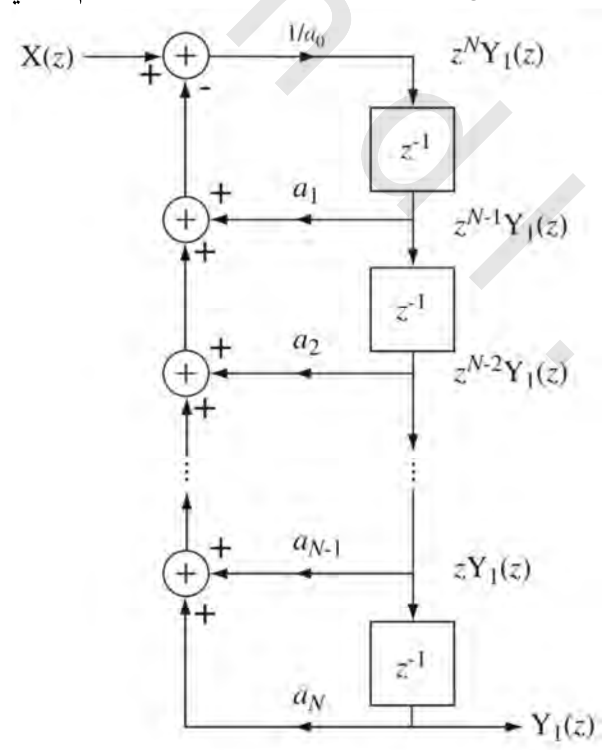
$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{Y_1(z)} = b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \cdots + b_N$$

(هنا تم تمثيل درجة كل من البسط والمقام بالمتغير N. إذا كانت درجة البسط أقل من N فعلا ، فإن بعض الثوابت b ستكون أصفاراً ، ولكن a_0 يجب ألا تكون صفراً). من المعادلة (٩,٥) يمكن كتابة :

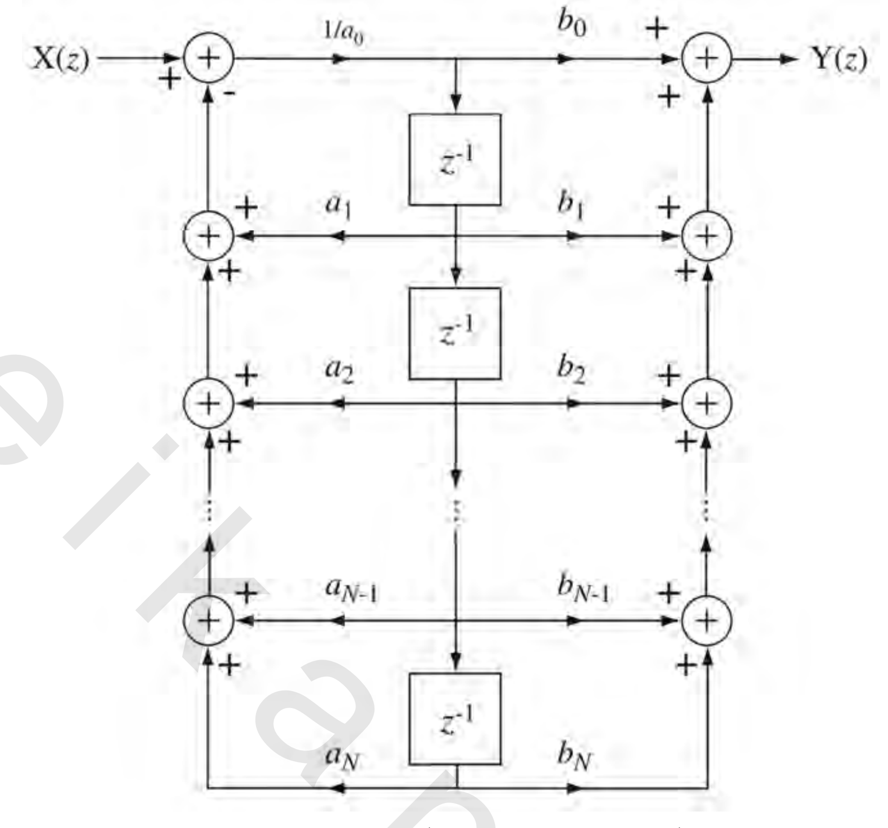
$$z^N Y_1(z) = \frac{1}{a_0}\{X(z) - [a_1 z^{N-1} Y_1(z) + \cdots + a_N s Y_1(z) +]\}$$

انظر شكل (٩,٢).

كل العناصر التي على الصورة $z^k Y_1(z)$ التي سنحتاجها لتكوين $H_2(z)$ موجودة في بناء $H_1(z)$. بتجميعهما في مجموع خطي باستخدام المعاملات b نحصل على البناء بالطريقة المباشرة II للنظام الكلي كما في شكل (٩,٣).



شكل رقم (٩,٢) الطريقة المباشرة II، البناء الأمثل لـ H1(z)



شكل رقم (٩,٣) بناء النظام الكلي بالطريقة المباشرة II.

(٩,٧) تحويل زد العكسي

التحويل من H(z) إلى h[n] هي تحويل زد العكسي ويمكن إجراؤه بالطريقة المباشرة التالية :

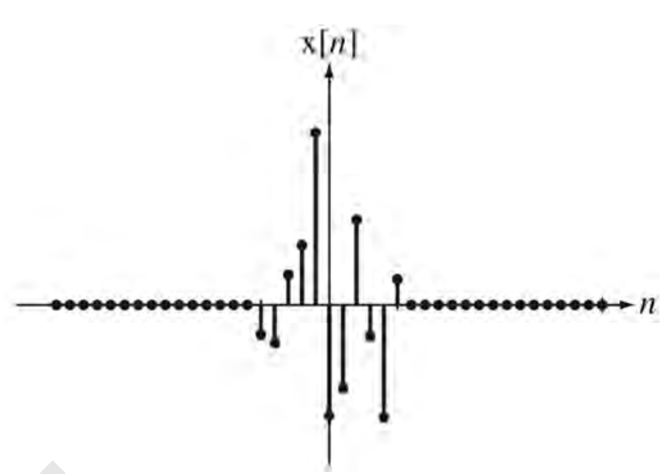
$$h[n] = \frac{1}{j2\pi}\oint_C H(z)z^{n-1}\,dz$$

وهذا تكامل حلقي حول دائرة في المستوى z المركب وهو خارج هدف هذا الكتاب. معظم تحويلات زد العكسي العملية يتم إجراؤها باستخدام جدول لأزواج تحويلات زد وخواصة.

(٩,٨) وجود تحويل زد

الإشارات المحدودة زمنياً

شروط وجود تحويل زد تكافيء شروط تواجد تحويل لابلاس. إذا كانت إشارة مقطعة زمنياً محدودة زمنياً ومحددة، فإن مجموع تحويل زد يكون محدوداً وتحويل زد سيكون موجوداً لأي قيمة محددة لا تساوي الصفر للمتغير زد، كما في شكل (٩,٤).



شكل (٩,٤) إشارة متقطعة ومحددة زمنياً

إشارة وحدة الصدمة δ[n] تعتبر إشارة بسيطة جداً، محدودة زمنياً، وتحويل زد لها سيكون كالتالي :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

هذا التحويل ليس له أصفار، ولا أقطاب. لأي قيمة لا تساوي الصفر للمتغير z، فإن تحويل زد لهذه الصدمة يكون موجوداً. إذا أزحنا هذه النبضة في النطاق الزمني، فإننا سنحصل على نتيجة مختلفة قليلا :

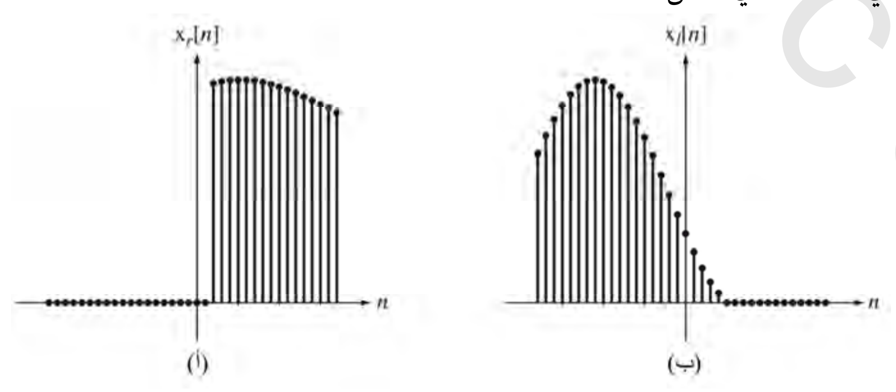
$\delta[n-1] \leftrightarrow z^{-1} \rightarrow$ قطب عند الصفر

$\delta[n+1] \leftrightarrow z \rightarrow$ قطب عند المالانهاية

وبالتالي فإن تحويل زد للصدمة δ[n-1] يوجد لكل قيمة لا تساوي الصفر للمتغير z، وتحويل زد للصدمة δ[n+1] يتواجد لكل قيمة محددة للمتغير z.

الإشارات يمينية ويسارية الجانب

أي إشارة يمينية الجانب $x_r[n]$ هي الإشارة التي تساوي صفر لأي $n<n_0$، والإشارة اليسارية $x_l[n]$ هي الإشارة التي تساوي صفراً لأي $n>n_0$ كما في شكل (٩,٥).



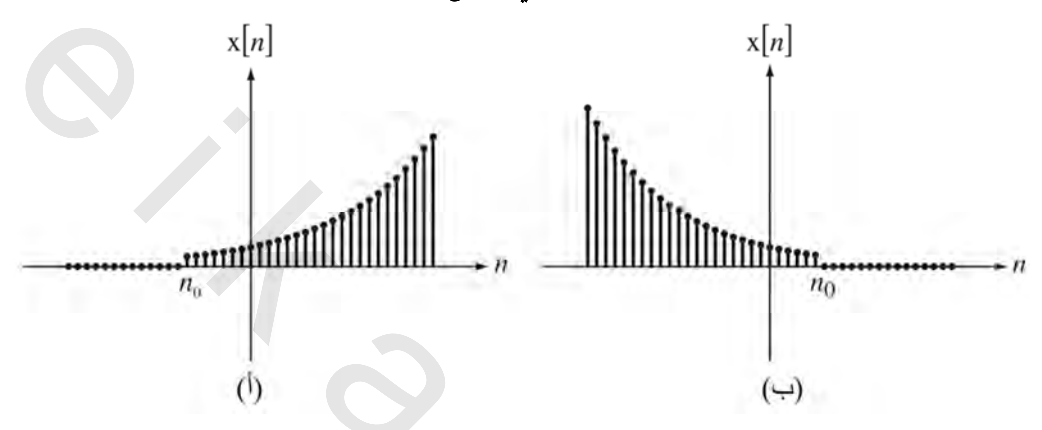
شكل (٩,٥) (أ) إشارة متقطعة زمنياً ويمينية (ب) إشارة متقطعة زمنياً ويسارية

افترض الإشارة اليمينية التالية: $x[n]=\alpha^n u[n-n_0]$ و $\alpha \in C$ كما في شكل (٩,٦).

تحويل زد لهذه الإشارة سيكون كما يلي:

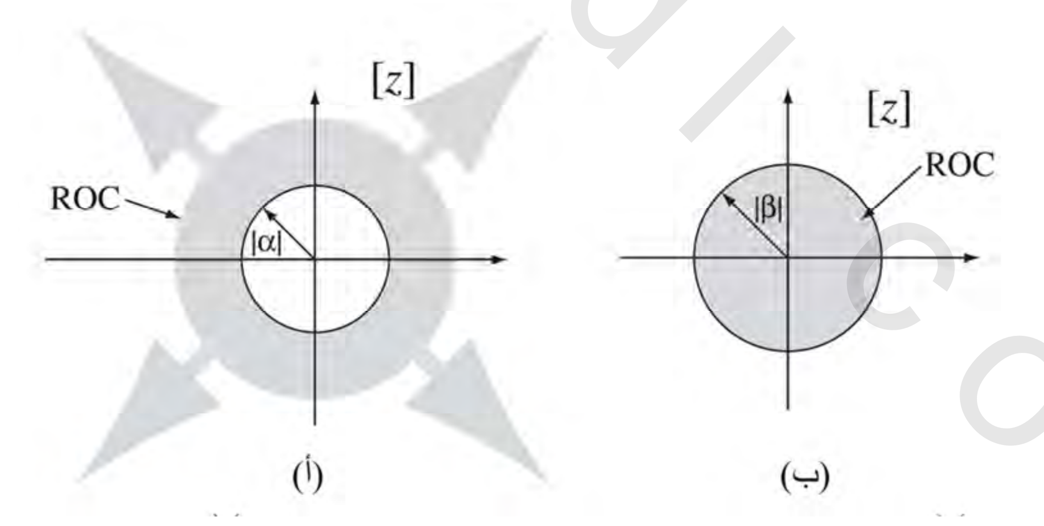
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^2 u[n-n_0] z^{-n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

إذا حدث تقارب للمجموع، وهذا المجموع سيتقارب إذا كان $|\alpha/z|<1$ أو $|z|>|\alpha|$. هذه المنطقة من المستوى z تسمى منطقة التقارب region of convergence, ROC كما في شكل (٩,٧أ).



شكل رقم (٩,٦)

(أ) $x[n]=\alpha^n u[n-n_0]$ و $\alpha \in C$ (ب) $x[n]=\beta^n u[n_0-n]$ و $\beta \in C$



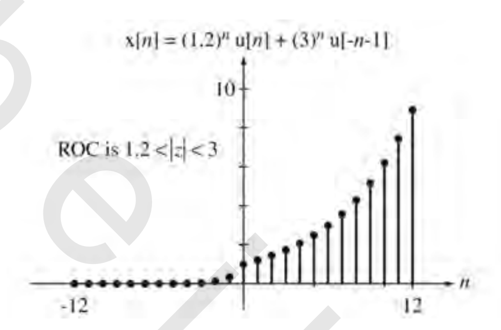
شكل رقم (٩,٧) منطقة التقارب لـ (أ) الإشارة اليمينية $x[n]=\alpha^n u[n-n_0]$ و $\alpha \in C$،

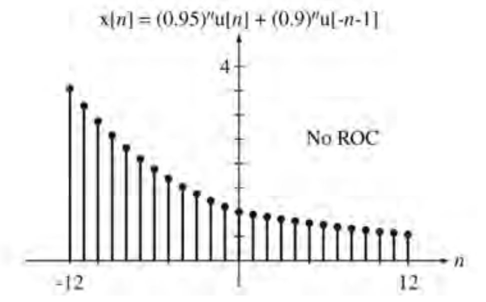
(ب) الإشارة اليسارية $x[n]=\beta^n u[n_0-n]$ و $\beta \in C$

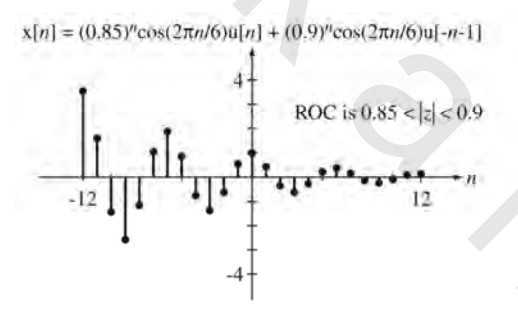
إذا كانت $x[n]=0$ عندما $n>n_0$، فإن هذه الإشارة تسمى إشارة يسارية كما في شكل (٩،٦ب). إذا كانت $x[n]=\beta^n u[n_0-n]$ و $\beta\in C$، فإن:

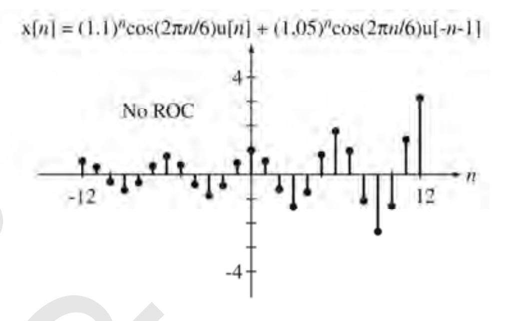
وهذا المجموع سيتقارب عندما $|\beta^{-1}z|<1$ أو $|z|<|\beta|$ كما في شكل (٩،٧ب).

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta^n z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{n_0}(\beta z^{-1})^n=\sum_{n=n_0}^{\infty}(\beta z^{-1})^n$$









شكل رقم (٩،٨). بعض الإشارات غير السببية ومناطق التقارب لها (إذا كانت موجودة).

كما هو الحال في الإشارات المستمرة زمنياً، فإن أي إشارة متقطعة زمنياً يمكن التعبير عنها كمجموع من إشارة يمينية وأخرى يسارية. إذا كانت $x[n]=x_r[n]+x_l[n]$ وكانت $|x_r[n]|<|K_r\alpha^n|$ و $|x_l[n]|<|K_l\beta^n|$ (حيث K_r و K_l ثوابت)، فإن المجموع يتقارب وتحويل زد يكون موجوداً عندما $|\alpha|<z<|\beta|$. إن ذلك يعني أنه إذا كانت $|\alpha|<|\beta|$، فإن تحويل زد يتواجد وتكون منطقة التقارب في المستوى z هي $|\alpha|<z<|\beta|$. إذا كانت $|\alpha|>|\beta|$ فإن التحويل لن يكون موجودا كما في شكل (٩،٨).

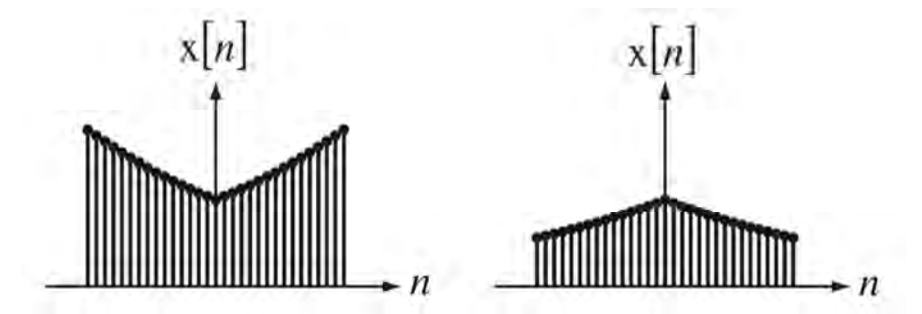
مثال ٩،١

تحويل زد للإشارات غير السببية

احسب تحويل زد للإشارة $x[n]=K\alpha^{|n|}$ حيث $\alpha\in R$.

تغير هذه الدالة مع n يعتمد على قيمة α كما في شكل (٩،٩). يمكن كتابة هذه المعادلة كما يلي:

$$x[n]=K(\alpha^n u[n]+\alpha^{-n}u[-n]-1)$$



شكل رقم (٩,٩) (أ) $x[n]=K\alpha^{|n|}$ و $\alpha>1$ (ب) $x[n]=K\alpha^{|n|}$ و $\alpha<1$

إذا كانت $|\alpha|\geq 1$ فإن $|\alpha|\geq|\alpha^{-1}|$ ، لن توجد منطقة تقارب ولن يكون هناك تحويل زد. إذا كانت $|\alpha|<1$ فإن $|\alpha|<|\alpha^{-1}|$ ، فإن منطقة التقارب ستكون $|\alpha|<z<|\alpha^{-1}|$ وتحويل زد سيكون :

$$K\alpha^{|n|} \overset{z}{\leftrightarrow} K\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^{|n|}z^{-n} = K\left[\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^n + \sum_{n=-\infty}^{0}(\alpha^{-1}z^{-1})^n - 1\right], |\alpha| < z|\alpha^{-1}|$$

$$K\alpha^{|n|} \overset{z}{\leftrightarrow} K\left[\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^{-1}z)^n - 1\right], |\alpha| < z|\alpha^{-1}|$$

وهذا يتكون من مجموعين وثابت. كل مجموع هي متوالية هندسية على الصورة $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ وهذه المتوالية ستتقارب إلى $1/(1-r)$ إذا كانت $|r|<1$.

$$K\alpha^{|n|} \overset{z}{\leftrightarrow} K\left(\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha z} - 1\right) = K\left(\frac{z}{z-\alpha} - \frac{z}{z-\alpha^{-1}}\right), |\alpha| < z|\alpha^{-1}|$$

(٩,٩) أزواج تحويل زد

يمكننا أن نبدأ جدول لتحويلات زد بالصدمة $\delta[n]$ ودالة جيب التمام المكبوحة $\alpha^n\cos(\Omega_0 n)u[n]$. كما رأينا مسبقاً فإن $\delta[n] \overset{z}{\leftrightarrow} 1$. تحويل زد لدالة جيب التمام المكبوحة سيكون :

$$\alpha^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n]]z^{-n}$$

$$\alpha^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^n\frac{e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n}}{2}z^{-n}$$

$$\alpha^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} (1/2)\sum_{n=0}^{\infty}[(\alpha e^{j\Omega_0 n}z^{-1})^n + (\alpha e^{-j\Omega_0 n}z^{-1})^n]$$

لكي يكون هناك تقارب لتحويل z فإن |z|>|α| وأيضاً :

$$\alpha^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} (1/2)\left[\frac{1}{1-\alpha e^{j\Omega_0 n} z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega_0 n} z^{-1}}\right], |z| > |\alpha|$$

يمكن تبسيط ذلك إلى واحدة من الصورتين البديلتين التاليتين :

$$\alpha^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1-\alpha\cos(\Omega_0)\, z^{-1}}{1-2\alpha\cos(\Omega_0)\, z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}, |z| > |\alpha|$$

أو :

$$\alpha^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[1-\alpha\cos(\Omega_0)]}{z^2-2\alpha\cos(\Omega_0)\, z+\alpha^2}, |z| > |\alpha|$$

إذا كانت α=1 ، فإن :

$$\cos(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[1-\cos(\Omega_0)]}{z^2-2\cos(\Omega_0)\, z+1} = \frac{1-\cos(\Omega_0)\, z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)\, z^{-1}+z^{-2}}, |z| > 1$$

إذا كانت $\Omega_0=0$ ، فإن :

$$\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, |z| > |\alpha|$$

إذا كانت α=1 و $\Omega_0=0$ ، فإن :

$$u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

جدول ٩.١ يبين أزواج من تحويل زد للعديد من الدوال الشائعة الاستخدام.

جدول (٩،١). بعض أزواج تحويل زد.

$\delta[n] \overset{z}{\leftrightarrow} 1, All\ z$	
$u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{1-z^{-1}},\ \lvert z\rvert > 1$	$-u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1},\ \lvert z\rvert < 1$
$\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\ \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$	$-\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\ \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$nu[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2},\ \lvert z\rvert > 1$	$-nu[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2},\ \lvert z\rvert < 1$
$n^2 u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{1+z^{-1}}{z(1-z^{-1})^3},\ \lvert z\rvert > 1$	$-n^2 u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{1+z^{-1}}{z(1-z^{-1})^3},\ \lvert z\rvert < 1$
$n\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2} = \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2},\ \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$	$-n\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2} = \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2},\ \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$sin(\Omega_0 n)u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{zsin(\Omega_0 n)}{z^2-2cos(\Omega_0)+1},\ \lvert z\rvert > 1$	$-sin(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{zsin(\Omega_0 n)}{z^2-2cos(\Omega_0)+1},\ \lvert z\rvert < 1$
$cos(\Omega_0 n)u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[z-cos(\Omega_0)]}{z^2-2cos(\Omega_0)+1},\ \lvert z\rvert > 1$	$-cos(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[z-cos(\Omega_0)]}{z^2-2cos(\Omega_0)+1},\ \lvert z\rvert < 1$
$\alpha^n sin(\Omega_0 n)u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z\alpha sin(\Omega_0)}{z^2-2\alpha cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$	$-\alpha^n sin(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z\alpha sin(\Omega_0)}{z^2-2\alpha cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$\alpha^n cos(\Omega_0 n)u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[z-\alpha cos(\Omega_0)]}{z^2-2\alpha cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$	$-\alpha^n cos(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[z-\alpha cos(\Omega_0)]}{z^2-2\alpha cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$\alpha^{\lvert n\rvert} \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} - \frac{z}{z-\alpha^{-1}}, \lvert\alpha\rvert < \lvert z\rvert < \lvert\alpha^{-1}\rvert$	
$u[n-n_0] - u[n-n_1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}(z^{-n_0} - z^{-n_1}) = \frac{z^{-n_0-1}+z^{-n_0-2}+\cdots+z+1}{z^{n_1-1}}, \lvert z\rvert > 0$	

مثال ٩,٢

تحويل زد العكسي

أوجد تحويل زد العكسي لكل مما يأتي:

(أ) $X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}$, $0.5 < z < 2$

(ب) $X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}$, $|z| > 2$

(ج) $X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}$, $|z| < 0.5$

(أ) الإشارات اليمينية الجانب تكون لها منطقة تقارب خارج دائرة، والإشارات اليسارية الجانب تكون لها منطقة تقارب داخل دائرة. ولذلك باستخدام الزوج التالي:

$$\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, |z| > |\alpha|$$

وأيضاً:

$$-\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, |z| > |\alpha|$$

نحصل على:

$$(0.5)^n u[n] - (-(-2)^n) u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z-2}, 0.5 < |z| < 2$$

أو:

$$(0.5)^n u[n] + (-2)^n\, u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}, 0.5 < |z| < 2$$

(ب) في هذه الحالة كل من الإشارتين يمينية الجانب:

(ج)

$$(0.5)^n - (-2)^n\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}, |z| > 2$$

(د) في هذه الحالة كل من الإشارتين يسارية الجانب:

(ه)

$$-[(0.5)^n - (-2)^n]\, u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}, |z| < 0.5$$

(٩,١٠) خواص تحويل زد

بفرض زوج التحويل التالي $g[n] \leftrightarrow G(z)$ و $h[n] \leftrightarrow H(z)$ وكل منهما له منطقة التقارب ROC_S و ROC_G و ROC_H على التوالي، فإن خواص تحول زد ستكون مدونة في جدول ٩,٢.

جدول (٩,٢) خواص تحويل زد

الخاصية	الصيغة
الخطية	$\alpha\, g[n]+\beta\, h[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \alpha\, G(z)+\beta\, H(z),\ ROC=ROC_G\ \cap ROC_H$
الإزاحة الزمنية	$g[n-n_0] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-n_0}G(z),\ ROC=ROC_G\ \ expect\ perhaps\ z=0\ or\ z\to\infty$
تغيير التحجيم في المجال z	$\alpha^n g[n] \overset{z}{\leftrightarrow} G(z/\alpha),\ ROC=\lvert\alpha\rvert ROC_G$
الانعكاس الزمني	$g[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} G(z^{-1}),\ ROC=1/ROC_G$
الامتداد الزمني	$\begin{cases} g[n/k], n/k & \text{رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases} \overset{z}{\leftrightarrow} G(z^k),\ ROC=(ROC_G)^{1/k}$
الترافق	$g^*[n] \overset{z}{\leftrightarrow} G^*(z^*),\ ROC=ROC_G$
التفاضل في المجال z	$-ng[n] \overset{z}{\leftrightarrow} z\frac{d}{dz}G(z),\ ROC=ROC_G$
الالتفاف	$g[n] * h[n] \overset{z}{\leftrightarrow} H(z)\, G(z)$
الفرق العكسي من الدرجة الأولى	$g[n]-g[n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} (1-z^{-1})G(z),\ ROC \supseteq ROC_G\ \cap\ \lvert z\rvert>0$
التراكم	$\sum_{m=-\infty}^{n} g[m] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}G(z),\ ROC\supseteq ROC_G\ \cap\ \lvert z\rvert>0$
نظرية القيمة الابتدائية	$If\ g[n]=0, n<0\ then\ g[0]=\lim_{z\to\infty} G(z)$
نظرية القيمة النهائية	$If\ g[n]=0, n<0,\ \lim_{n\to\infty} g[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)\ if\ \lim_{n\to\infty} g[n]\ exists$

(٩,١١) طرق تحويل زد العكسي

القسمة المركبة(المطولة)

بالنسبة للدوال النسبية في z التي على الصورة التالية :

$$H(z)=\frac{b_M z^M+b_{M-1}z^{M-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{a_N z^N+a_{N-1}z^{N-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

يمكن دائماً استخدام القسمة المطولة للبسط على المقام لنحصل على تتابع من قوى الـ z. فمثلاً إذا كانت لدينا الدالة على الصورة :

$$H(z)=\frac{(z-1.2)(z+0.7)(z+0.4)}{(z-0.2)(z-0.8)(z+0.5)},\qquad |z|>0.8$$

أو الصورة :

$$H(z)=\frac{z^3-0.1z^2-1.04z-0.336}{z^3-0.5z^2-0.34z+0.08},\qquad |z|>0.8$$

فإن القسمة المطولة تعطي :

$$
\begin{array}{r}
1+0.4z^{-1}+0.5z^{-2}\cdots \\
z^3-0.5z^2-0.34z+0.08\overline{\big)z^3-0.1z^2-1.04z-0.336} \\
\underline{z^3-0.5z^2-0.34z+0.08} \\
0.4z^2-\ 0.7z-\ 0.256 \\
\underline{0.4z^2\ -0.2z-\ 0.136-0.032z^{-1}} \\
0.5z-\ 0.12+0.032z^{-1} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}
$$

وبالتالي فإن تحويل زد الكسي سيكون :

$h[n]=\delta[n]+0.4\delta[n-1]+0.5\delta[n-2]+\ \ldots..$

هناك صورة أخرى للقسمة المطولة كالتالي :

$$
\begin{array}{r}
-4.2-30.85z-158.613z^2\cdots \\
0.08-0.34z-0.5z^2+z^3\overline{\big)-0.336-1.04z-0.1z^2+z^3} \\
\underline{-0.336+1.428z+2.1z^2-4.2z^3} \\
-2.468z-2.2z^2+5.2z^3 \\
\underline{-2.468z+10.489z^2+15.425z^3-30.85z^4} \\
-12.689z^2-10.225z^3+30.85z^4 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}
$$

ومن هذه النتيجة يمكننا أن نستنتج أن تحويل زد العكسي سيكون على الصورة :

$-4.2\delta[n]-30.85\delta[n+1]-158.61\delta[n+2]\ \ldots\ldots$

من الطبيعي عند هذه النقطة أن نتعجب لماذا هاتان النتيجتان السابقتان مختلفتان وأيهما هي الصحيحة. المفتاح لنعرف أيهما تكون صحيحة هو منطقة التقارب، $|z|>0.8$. إن ذلك يوحي أن النظام يميني الجانب ونتيجة القسمة المطولة الأولى ستكون هي الصورة المطلوبة. هذه المتوالية تتقارب عندما تكون $|z|>0.8$. المتوالية الثانية تتقارب عندما $|z|<0.2$ وكان من الممكن أن تكون هي الإجابة الصحيحة إذا كانت منطقة التقارب هي $|z|>0.2$.

تستعمل القسمة المطولة عادة مع الدوال النسبية ولكن النتيجة تكون عادة في صورة متوالية لا نهائية. في معظم التحليلات العملية يكون أي صورة مغلقة هي الصورة المطلوبة.

تحليل الكسور الجزيئية

طريقة تحليل الكسور الجزيئية لإيجاد تحويل زد العكسي تكافيء جبرياً الطريقة المستخدمة نفسها لإيجاد تحويل لابلاس العكسي مع استبدال المتغير s بالمتغير z هنا. ولكن هناك موقف في تحويلات زد العكسية التي تستحق منا الذكر. من الشائع جداً أن يكون لدينا دوال في النطاق z التي تكون فيها الإصفار المحددة تساوي عدد الأقطاب المحددة (مما يجعل التعبير غير طبيعي)، مع صفر واحد على الأقل عند z=0.

$$H(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)}, \qquad N > M$$

نحن لا نستطيع مباشرة تحليل H(z) في صورة كسور جزيئية ؛ لأنها في صورة نسبة غير مثالية في المتغير z. في حالة مثل هذه من المفضل أن نقسم طرفي المعادلة على z فتصبح كما يلي :

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z^{N-M-1}(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)}$$

الكمية H(z)/z نسبة مثالية في المتغير z ويمكن تحليلها في صورة كسور جزيئية كما يلي :

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{K_1}{z-p_1} + \frac{K_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{K_N}{z-p_N}$$

بعد ذلك يمكن ضرب الطرفين في z ويمكن إيجاد تحويل زد العكسي كما يلي :

$$H(z) = \frac{zK_1}{z-p_1} + \frac{zK_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{zK_N}{z-p_N}$$

$$h[n] = K_1 p_1^n u[n] + K_2 p_2^n u[n] + \cdots + K_N p_N^n u[n]$$

تماماً كما فعلنا عند إيجاد تحويل لابلاس العكسي ، كان يمكننا حل هذه المشكلة بالقسمة المطولة للحصول على نسبة مثالية ، ولكن هذه الطريقة الجديدة تكون أبسط في العادة.

أمثلة على تحويل زد الأمامي والعكسي

إن خاصية الإزاحة الزمنية تكون مهمة جداً في تحويل تعبيرات دوال العبور من المجال زد إلى أنظمة حقيقية ، وهي مع خاصية الخطية تكون من أكثر الخواص استخداماً في تحويل زد.

مثال ٩,٣

المخطط الصندوقي للأنظمة من دالة العبور باستخدام خاصية إزاحة الزمن

نظام له دالة العبور التالية :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-1/2}{z^2-z+2/9}, |z| > 2/3$$

إرسم المخطط الصندوقي مستخدماً التأخير الزمني ، والمكبرات ووصلات التجميع.

يمكن إعادة ترتيب معادلة دالة العبور لتصبح على الصمرة التالية :

$$Y(z)(z^2-z+2/9) = X(z)(z-1/2)$$

$$z^2Y(z) = zX(z) - (1/2)X(z) + zY(z) - (2/9)Y(z)$$

بضرب هذه المعادلة في z^{-2} نحصل على :

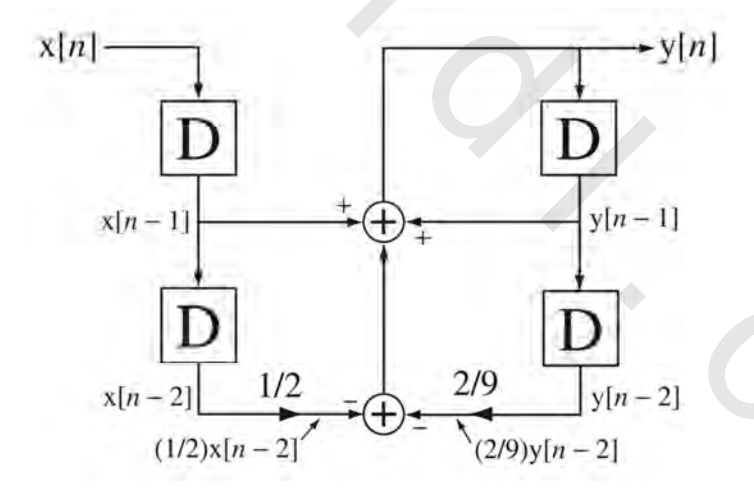
$$Y(z) = z^{-1}X(z) - (1/2)z^{-2}X(z) + z^{-1}Y(z) - (2/9)z^{-2}Y(z)$$

الآن باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية، بحيث إذا كان $x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$ و $y[n] \overset{z}{\leftrightarrow} Y(z)$ فإن تحويل فورير العكسي سيكون كما يلي :

$$y[n] = x[n-1] - (1/2)x[n-2] + y[n-1] - (2/9)y[n-2]$$

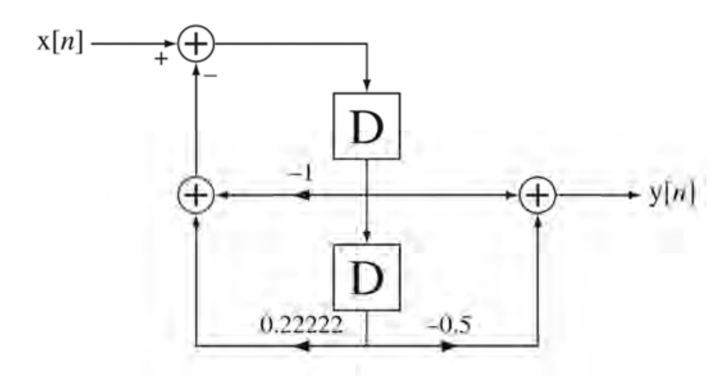
وهذه تسمى علاقة تكرارية بين x[n] و y[n] وهي تعبر عن y[n] عند الأزمنة المتقطعة n كمجموع خطي من قيم كل من x[n] و y[n] عند الأزمنة المتقطعة n و n-1 و n-2 و.... ومن هذه المعادلة يمكننا مباشرة استنتاج المخطط الصندوقي للنظام كما هو مبين في شكل (٩.١٠).

هذا البناء للنظام استخدم أربعة من أزمنة التأخير، ووصلتين للتجميع ومكبرين. هذه المخطط تم رسمه بطريقة طبيعية عن طريق البناء المباشر للعلاقة التكرارية في المخطط. بناء هذا النظام بالطريقة المباشرة II، استخدم اثنين من أزمنة التأخير، وثلاثة مكبرات، وثلاث نقاط تجميع كما في شكل (٩.١١). هناك طرق أخرى عديدة لبناء مثل هذا النظام (انظر فصل ١٤).



شكل رقم (٩,١٠) مخطط صندوقي في النطاق الزمني للنظام الذي له دالة العبور التالية:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{z-1/2}{z^2-z+2/9}$$



شكل رقم (٩,١١) البناء بالطريقة المباشرة II لدالة العبور التالية:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{\mathbf{z-1/2}}{\mathbf{z^2-z+2/9}}$$

كحالة خاصة لخاصية التحجيم في المجال زد، سنفترض أن:

$$\alpha^n g[n] \overset{z}{\leftrightarrow} G(z/\alpha)$$

لها أهمية خاصة، وسنفترض أن الثابت α هو $e^{j\Omega_0}$ حيث Ω_0 حقيقية وبالتالي يمكننا كتابة:

$$e^{j\Omega_0 n} g[n] \overset{z}{\leftrightarrow} G(ze^{j\Omega_0})$$

كل قيمة للمتغير z تغيرت إلى $ze^{-j\Omega_0}$. وهذا يحقق دوران عكس عقارب الساعة للتحويل G(z) في المستوى z بزاوية مقدارها Ω_0؛ لأن الكمية $e^{-j\Omega_0}$ لها مقدار يساوي واحداً وزاوية مقدارها Ω_0-. هذا التأثير من الصعب رؤيته بهذه الصورة المجردة، ولكن من المفضل أن نوضح ذلك بمثال. إفترض الدالة:

$$G(z) = \frac{z-1}{(z-0.8e^{-j\pi/4})(z-0.8e^{+j\pi/4})}$$

وافترض أن $\Omega_0=\pi/2$، وبالتالي يمكننا كتابة:

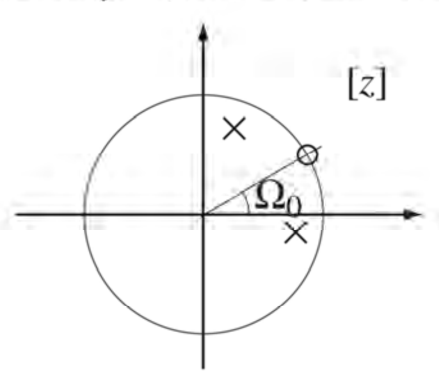
$$G(ze^{-j\Omega_0}) = G\left(ze^{-j\pi/8}\right) = \frac{ze^{-j\pi/8} - 1}{(ze^{-j\pi/8} - 0.8e^{-j\pi/4})(ze^{-j\pi/8} - 0.8e^{+j\pi/4})}$$

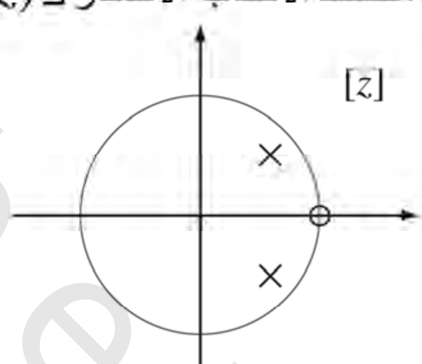
أو:

$$G\left(ze^{-j\pi/8}\right) = \frac{e^{-j\pi/8}(z-1)}{e^{-j\pi/8}(z-0.8e^{-j\pi/8})e^{-j\pi/8}(z-0.8e^{+j3\pi/8})}$$

$$= e^{-j\pi/8}\frac{z - e^{j\pi/8}}{(z-0.8e^{-j\pi/8})(z-0.8e^{+j3\pi/8})}$$

الدالة الأصلية كان لها قطب محدد عند $z = 0.8e^{\pm j\pi/4}$ وصفر z=1. الدالة المحولة $G(ze^{-j\pi/8})$ أصبحت لها قطب محدد عند $z = 0.8e^{-j\pi/8}$ و $z = 0.8e^{+j3\pi/8}$ وصفر عند $z = e^{j\pi/8}$. وبالتالي، فإن مواضع الصفر والأقطاب المحددة قد دارت عكس عقارب الساعة بمقدار π/8 راديان كما في شكل (٩,١٢).





شكل رقم (٩,١٢) توضيح لخاصية التحجيم الزمني لتحويل زد للحالة الخاصة التي يكون فيها التحجيم يساوي $e^{j\Omega_0}$

الضرب في الجيب المركب الذي على الصورة $z = e^{j\Omega_0 n}$ في النطاق الزمني يقابل دوران لتحويل زد.

مثال ٩,٤

تحويل زد لأس سببي ودالة جيبية مكبحة بأس سببي

أوجد تحويل لابلاس للدالة $x[n] = e^{-n/40}u[n]$ والدالة $x_m[n] = e^{-n/40}\sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right)u[n]$ وارسم مخطط الأقطاب والأصفار لكل من X(z) و $X_m(z)$. باستخدام الزوج :

$$\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z| > |\alpha|$$

نحصل على :

$$e^{-n/40}u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-e^{-1/40}},\quad |z| > \left|e^{-1/40}\right|$$

ولذلك فإن :

$$X(z) = \frac{z}{z-e^{-1/40}},\quad |z| > \left|e^{-1/40}\right|$$

يمكننا إعادة كتابة $x_m[n]$ كما يلي :

$$x_m[n] = e^{-n/40}\frac{e^{j2\pi n/8} - e^{-j2\pi n/8}}{j2}u[n]$$

أو :

$$x_m[n] = \frac{j}{2}\left[e^{-n/40}e^{j2\pi n/8} - e^{-n/40}e^{-j2\pi n/8}\right]u[n]$$

بعد ذلك، نبدأ بالزوج التالي :

$$e^{-n/40}u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-e^{-1/40}},\quad |z| > \left|e^{-1/40}\right|$$

وباستخدام خاصية التحجيم $\alpha^n g[n] \overset{z}{\leftrightarrow} G(z/\alpha)$ ، نحصل على :

$$e^{j2\pi n/8}e^{-n/40}u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{ze^{-j2\pi n/8}}{ze^{-j2\pi n/8} - e^{-1/40}},\quad |z| > \left|e^{-1/40}\right|$$

وأيضاً :

$$e^{j2\pi n/8}e^{-n/40}u[n]\overset{z}{\leftrightarrow}\frac{ze^{j2\pi n/8}}{ze^{j2\pi n/8}-e^{-1/40}},\quad |z|>|e^{-1/40}|$$

وأيضاً :

$$-\frac{j}{2}\left[e^{-\frac{n}{40}}e^{\frac{j2\pi n}{8}}-e^{-\frac{n}{40}}e^{-\frac{j2\pi n}{8}}\right]u[n]\overset{z}{\leftrightarrow}$$
$$-\frac{j}{2}\left[\frac{ze^{-j2\pi n/8}}{ze^{-j2\pi n/8}-e^{-1/40}}-\frac{ze^{j2\pi n/8}}{ze^{j2\pi n/8}-e^{-1/40}}\right],\quad |z|>|e^{-1/40}|$$

وأيضاً :

$$X_{\mathrm{m}}(\mathrm{z})=-\frac{j}{2}\left[\frac{ze^{-j2\pi n/8}}{ze^{-j2\pi n/8}-e^{-1/40}}-\frac{ze^{j2\pi n/8}}{ze^{j2\pi n/8}-e^{-1/40}}\right]$$

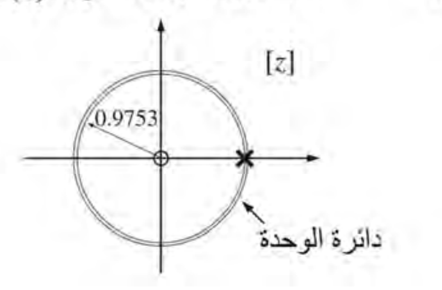
$$=\frac{ze^{-1/40}sin(2\pi/8)}{z^2-2ze^{-1/40}cos(2\pi/8)+e^{-1/20}},\quad |z|>|e^{-1/40}|$$

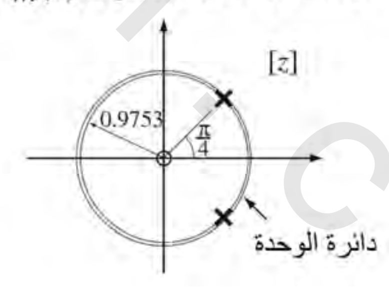
أو :

$$X_{\mathrm{m}}(\mathrm{z})=\frac{0.6896z}{z^2-1.3793z+0.9512}$$

$$=\frac{0.6896z}{(z-0.6896-j0.6896)\,(z-2.6896+j0.6896)},\quad |z|>|e^{-1/40}|$$

انظر شكل (٩.١٣).





شكل رقم (٩,١٣) مخطط الأقطاب والأصفار للدالة X(z) و Xm(z)

مثال ٩,٥

تحويل زد باستخدام خاصية التفاضل

باستخدام خاصية التفاضل في النطاق زد، وضح أن تحويل زد للدالة nu[n] سيكون $\frac{z}{(z-1)^2},\ |z|>1$.

سنبدأ بالزوج التالي :

$$u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1$$

ثم باستخدام خاصية التفاضل في النطاق z نحصل على :

$$-nu[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -\frac{z}{(z-1)^2}, \qquad |z| > 1$$

$$nu[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{(z-1)^2}, \qquad |z| > 1$$

مثال ٩,٦

تحويل زد باستخدام خاصية التراكم

باستخدام خاصية التراكم، وضح أن تحويل زد للدالة nu[n] هو $|z| > 1$ ، $\frac{z}{(z-1)^2}$.

سنبدأ أولاً بالتعبير عن nu[n] في الصورة التراكمية كما يلي :

$$nu[n] = \sum_{m=0}^{n} u[m-1]$$

ثم باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية، نوجد تحويل لابلاس لـ u[n-1] كما يلي :

$$u[n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-1}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}, \qquad |z| > 1$$

بعد ذلك نطبق خاصية التراكم :

$$nu[n] = \sum_{m=0}^{n} u[m-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \left(\frac{z}{z-1}\right)\frac{1}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}, \qquad |z| > 1$$

كما كان الأمر حقيقياً بالنسبة لتحويل لابلاس، فإن نظرية القيمة النهائية يمكن تطبيقها إذا كانت النهاية $\lim_{n\to\infty} g[n]$ موجودة. فمثلاً إذا كان لدينا :

$$X(z) = \frac{z}{z-2}, \qquad |z| > 2$$

فإن :

$$\lim_{z\to1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to1}(z-1)\frac{z}{z-2} = 0$$

ولكن إذا كانت $x[n]=2^n u[n]$ والنهاية $\lim_{n\to\infty} x[n]$ غير موجودة. لذلك فإن الخلاصة هي أن القيمة النهائية تساوي صفراً يعتبر خطأ.

بطريقة مكافئة للإثبات في تحويل لابلاس يمكننا أن نوضح التالي :

لكي يتم تطبيق نظرية القيمة النهائية على الدالة G(z)، فإن جميع الأقطاب المحددة للدالة (z-1) G (z) يجب أن تقع في داخل دائرة الوحدة في المستوى z.

مثال ٩,٧

تحويل زد لدالة عكسية السببية

أوجد تحويل زد للدالة $x[n]=4(-0.3)^{-n}u[-n]$.

باستخدام الزوج :

$$-\alpha^{n}\, u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \quad |z| < |\alpha|$$

بوضع α تساوي -0.3^{-1} نحصل على :

$$-(-0.3^{-1})^{n}\, u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z+0.3^{-1}}, \quad |z| < |-0.3^{-1}|$$

$$-(-10/3)^{n}\, u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z+10/3}, \quad |z| < |10/3|$$

باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية :

$$-(-10/3)^{n-1}\, u[-(n-1)-1] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-1}\frac{z}{z+10/3} = \frac{1}{z+10/3}, \quad |z| < |10/3|$$

$$-(-3/10)(-10/3)^{n}\, u[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z+10/3}, \quad |z| < |10/3|$$

$$(3/10)(-10/3)^{n}\, u[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z+10/3}, \quad |z| < |10/3|$$

باستخدام خاصية الخطية وضرب الطرفين في $4/(3/10)$ أو $40/3$ نحصل على :

$$4(-0.3)^{n}\, u[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{40/3}{z+10/3} = \frac{40}{3z+3}, \quad |z| < |10/3|$$

(٩,١٢) تحويل زد الأحادي الاتجاه

لقد ثبت أن تحويل لابلاس الأحادي كان أكثر راحة في التطبيق بالنسبة للدوال المستمرة زمنياً، وتحويل زد الأحادي سيكون أكثر راحة، أو مناسبة بالنسبة للدوال المتقطعة زمنياً الأسباب لنفسها. يمكننا أن نحدد تحويل زد الأحادي، والذي يكون محققا فقط للدوال التي تكون أصفارا قبل الزمن المتقطع $n=0$ وسنتجنب في معظم المشاكل الشائعة أي افتراضات تعقيدية لمنطقة التقارب.

يتم تعريف تحويل زد الأحادي كما يلي :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \qquad \text{المعادلة رقم (٩,٦)}$$

منطقة التقارب لتحويل زد الأحادي تكون دائماً خارج دائرة، مركزها عند نقطة الأصل في المستوى z ونصف قطرها يكون مقدار أكبر قطب.

خواص فريدة لتحويل زد الأحادي

خواص تحويل زد الأحادي الاتجاه تشبه جداً خواص زد الثنائي، ولكن خاصية الإزاحة الزمنية تختلف قليلاً. سنفترض g[n]=0 عندما n<0 ، وبالتالي فإن تحويل زد الأحادي سيكون:

$$g[n-n_0] \overset{z}{\leftrightarrow} \begin{cases} z^{-n_0}G(z), \ \ n_0 \geq 0 \\ z^{-n_0}\left\{G(z) - \sum_{m=0}^{-(n_0+1)} g[m]z^{-m}\right\}, n_0 < 0 \end{cases}$$

هذه الخاصية يجب أنتكون مختلفة عند الإزاحة ناحية اليسار، لأنه عند إزاحة دالة سببية ناحية اليسار فإن بعض القيم المختلفة عن الصفر لن تقع في مدى المجموع لتحويل زد الأحادي الاتجاه، الذي يبدأ عند n=0. لذلك فإن الكميات التالية يجب أخذها في الاعتبار لأي قيم للدالة يتم إزاحتها إلى المدى n<0:

$$-\sum_{m=0}^{-(n_0+1)} g[m]z^{-m}$$

خاصية التراكم بالنسبة لتحويل زد الأحادي ستكون:

$$\sum_{m=0}^{n} g[m] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}G(z)$$

لقد تغير فقط حد المجموع الأسفل. بالنسبة للتحويل الثنائي لدينا:

$$\sum_{m=-\infty}^{n} g[m] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}G(z)$$

والذي ما زال يعمل لأنه بالنسبة لأي إشارة سببية يمكننا أن نكتب:

$$\sum_{m=-\infty}^{n} g[m] = \sum_{m=0}^{n} g[m]$$

تحويل زد الأحادي لأي إشارة سببية يكون هو نفسه تماماً مثل تحويل زد الثنائي للإشارة نفسها. ولذلك فإن جدول تحويل زد الثنائي يمكن استخدامه مع تحويل زد الأحادي.

حل المعادلات الفرقية

إحدى الطرق للنظر إلى تحويل زد هي أنه يحمل علاقة مع المعادلات الفرقية مثل العلاقة بين تحويل لابلاس والمعادلات التفاضلية. أي معادلة فرقية خطية بشروط ابتدائية يمكن تحويلها عن طريق تحويل زد إلى معادلة جبرية. بعد ذلك نحل هذه المعادلة الجبرية والحل في النطاق الزمني يكون هو تحويل زد العكسي لهذا الحل.

مثال ٩,٨

حل معادلة فرقية بشروط ابتدائية باستخدام تحويل زد

حل المعادلة الفرقية التالية :

$$y[n+2]-(3/2)y[n+1]+(1/2)y[n]=(1/4)^n, \qquad for\ n\geq 0$$

مع الشروط الابتدائية y[0]=10 و y[1]=4.

الشروط الابتدائية للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية تتكون عادة من تحديد للقيمة الابتدائية للدالة وتفاضلها الأول. الشروط الابتدائية للدالة الفرقية من الدرجة الثانية تتكون عادة من تحديد لأول قيمتين ابتدائيتين للدالة (في حالتنا هذه y[0] و y[1]).

بإجراء تحويل زد على طرفي المعادلة الفرقية (باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية) نحصل على :

$$z^2\left(Y(z)-y[0]-z^{-1}y[1]\right)-(3/2)z(Y(z)-y[0])+(1/2)Y(Z)=\frac{Z}{Z-1/4}$$

بالحل لإيجاد قيمة Y(z) :

$$Y(z)=\frac{\frac{z}{z-1/4}+z^2y[0]+z[1]-(3/2)zy[0]}{z^2-(3/2)z+1/2}$$

$$Y(z)=\frac{z^2y[0]+z(7y[0]/4-y[1])-y[1]/4+3\,y[0]/8+1}{(z-1/4)(z^2-(3/2)z+1/2)}$$

بالتعويض عن القيم العددية للشروط الابتدائية نحصل على :

$$Y(z)=z\frac{10z^2-(27/4)z+1/2}{(z-1/4)(z-1/2)(z-1)}$$

بقسمة الطرفين على z نحصل على :

$$\frac{Y(z)}{z}=z\frac{10z^2-(27/4)z+15/4}{(z-1/4)(z-1/2)(z-1)}$$

وهذا كسر مثالي في المتغير z ولذلك يمكن تحليله بالكسور الجزيئية لنحصل على :

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{16/3}{z-1/4}+\frac{4}{z-1/2}+\frac{2/3}{z-1}\Rightarrow Y(z)=\frac{z16/3}{z-1/4}+\frac{4z}{z-1/2}+\frac{2z/3}{z-1}$$

باستخدام الزوج :

$$\alpha^n u[n]\overset{z}{\leftrightarrow}\frac{z}{z-\alpha}$$

وبإجراء تحويل لابلاس العكسي نحصل على :

$$y[n]=[5.333(0.25)^n+4(0.5)^n+0.667]u[n]$$

بالتحقق من هذه المعادلة عند n=0 و n=1 نحصل على :

$$y[0]=5.333(0.25)^0+4(0.5)^0+0.667=10$$

$$y[1]=5.333(0.25)^1+4(0.5)^1+0.667=1.333+2+0.667=4$$

وهذا يتوافق مع الشروط الابتدائية. بالتعويض بهذا الحل في المعادلة الفرقية نحصل على:

$$\left\{\begin{matrix} 5.333(0.25)^{n+2} + 4(0.5)^{n+2} + 0.667 \\ -1.5[5.333(0.25)^{n+1} + 4(0.5)^{n+1} + 0.667] \\ +0.5[5.333(0.25)^{n} + 4(0.5)^{n} + 0.667] \end{matrix}\right\} = (0.25)^n, for\ n \geq 0$$

أو:

$$0.333(0.25)^n + (0.5)^n + 0.667 - 2(0.25)^n - 3(0.5)^n - 1 + 2.667(0.25)^n$$
$$+2 + 0.33 = (0.25)^n, for\ n \geq 0$$

أو:

$$(0.25)^n = (0.25)^n, for\ n \geq 0$$

مما يعني أن هذا الحل يمثل فعلاً حلاً للمعادلة الفرقية.

(٩,١٣) مخطط الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية

لكي نفحص الاستجابة الترددية للأنظمة المتقطعة زمنياً فإنه يمكننا أن نخصص تحويل زد إلى ال DTFT من خلال التعويض $z \rightarrow e^{j\Omega}$ حيث Ω تعتبر متغيراً حقيقياً يمثل التردد الزاوي المتقطع زمنياً. حقيقة أن Ω حقيقية تعني أنه عند تحديد الاستجابة الترددية فإن قيم z التي نفترضها الآن هي فقط التي على دائرة الوحدة في المستوى z لأن $|e^{j\Omega}|=1$ لأي قيمة حقيقية لـ Ω. إن هذا يكافيء تماما تحديد الاستجابة الترددية للأنظمة المستمرة زمنياً عن طريق فحص دالة العبور الخاصة بها في المجال s مع تحرك s على طول المحور w في المستوى s، ويمكن استخدام طرق تخطيطية مشابهة لذلك.

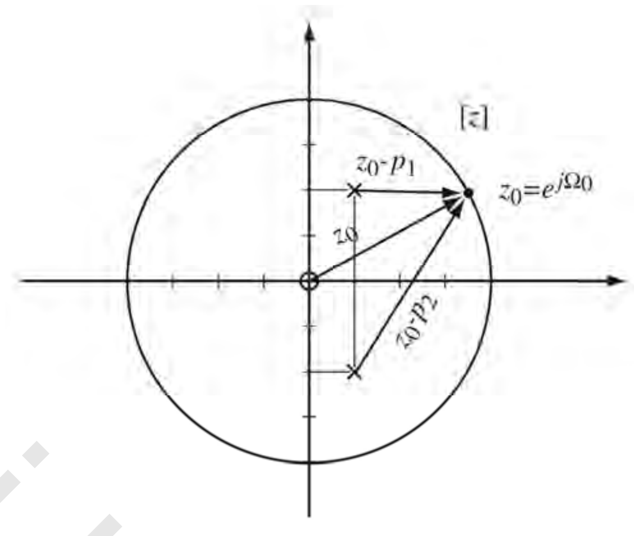
إفترض أن دالة العبور لنظام معين هي:

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z/2 + 5/16} = \frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

حيث:

$$p_2 = \frac{1-2j}{4} \quad و \quad p_1 = \frac{1+2j}{4}$$

هذه الدالة لها صفر عند نقطة الأصل، وقطبان مترافقان كما في شكل (٩.١٤).



شكل رقم (٩,١٤). مخطط الأقطاب والأصفار في النطاق z لدالة عبور أحد الأنظمة.

الاستجابة الترددية عند أي تردد زاوي معين Ω_0 يتم تحديدها (في حدود كمية ثابتة) عن طريق المتجهات من الأقطاب والأصفار لدالة العبور إلى النقطة $z_0 = e^{j\Omega_0}$. مقدار الاستجابة الترددية يساوي حاصل ضرب مقادير متجهات الأصفار مقسوما على حاصل ضرب مقادير متجهات الأقطاب. في هذه الحالة سيكون :

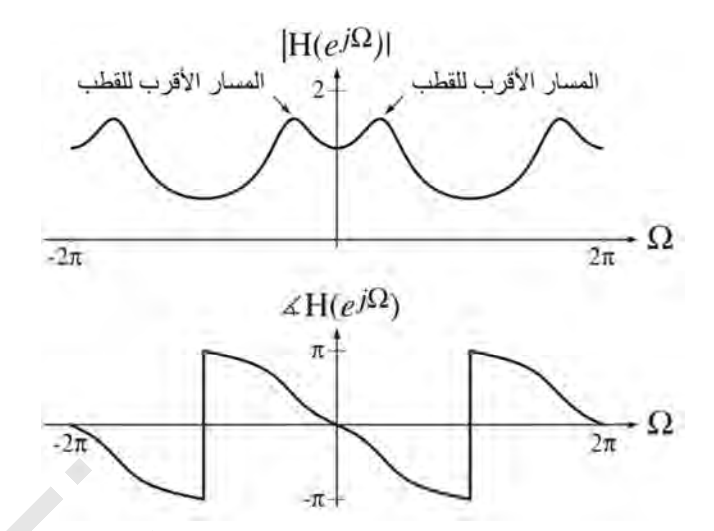
$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \frac{|e^{j\Omega}|}{|e^{j\Omega}-p_1||e^{j\Omega}-p_2|}$$ المعادلة رقم (٩,٧)

من الواضح أنه مع اقتراب $e^{j\Omega}$ من القطب P_1 مثلاً ، فإن مقدار الفرق $e^{j\Omega}$-p_1 يصبح صغيراً ، مما يجعل مقدار المقام صغيراً وبالتالي يجعل مقدار دالة العبور أكبر. التأثير العكسي لذلك يحدث مع اقتراب $e^{j\Omega}$ من أي صفر.

زاوية الاستجابة الترددية هي مجموع زوايا متجهات الأصفار ناقص مجموع زوايا متجهات الأقطاب. في هذه الحالة ، $\measuredangle H(e^{j\Omega})= \measuredangle e^{j\Omega} - \measuredangle (e^{j\Omega} - p_1) - \measuredangle (e^{j\Omega} - p_2)$ كما في شكل (٩.١٥).

القيمة العظمى للاستجابة الترددية تحدث تقريباً عند $z = e^{\pm j1.11}$ وهما نقطتان على دائرة الوحدة عند الزاوية نفسها مثل القطبين في دالة العبور ، ولذلك ، فإن هذه النقط على دائرة الوحدة هي النقط التي يصل عندها معامل المقام $e^{j\Omega_0} - p_1$ و $e^{j\Omega_0} - p_2$ في المعادلة (٩.٧) إلى أقل مقدار.

فرق جوهري بين الاستجابة الترددية للأنظمة المستمرة والأنظمة المتقطعة هي أنه بالنسبة للأنظمة المتقطعة فإن الاستجابة الترددية تكون عادة دورية بدورة مقدارها 2π في Ω. هذا الفرق يمكن رؤيته مباشرة في هذه الطريقة البيانية لأنه مع تحرك Ω من الصفر في الاتجاه الموجب ، فإنها تعبر كل دائرة الوحدة في اتجاه عكس عقارب الساعة ، وبعد ذلك في الدورة الثانية على دائرة الوحدة ، فإنها تمر بمواضعها السابقة ، مكررة الاستجابة الترددية نفسها الموجودة في الدورة الأولى.



شكل رقم (٩,١٥) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام الذي دالة عبوره هي: $\mathbf{H(z)} = \frac{z}{z^2 - \frac{z}{2} - \frac{5}{16}}$

مثال ٩,٩

مخطط الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية من دالة العبور1

ارسم مخطط الأقطاب والأصفار وارسم الاستجابة الترددية للنظام الذي دالة عبوره كما يلي :

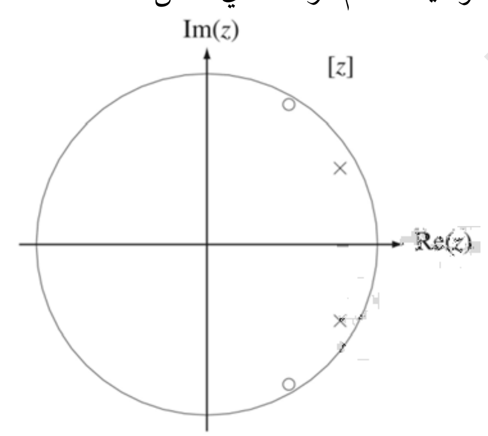
$$H(z) = \frac{z^2 - 0.96z + 0.9028}{z^2 - 1.56z + 0.8109}$$

يمكن تحليل دالة العبور ووضعها على الصورة التالية :

$$H(z) = \frac{(z - 0.48 + j0.82)\,(z - 0.48 - j0.82)}{(z - 0.78 + j0.45)\,(z - 0.78 - j0.45)}$$

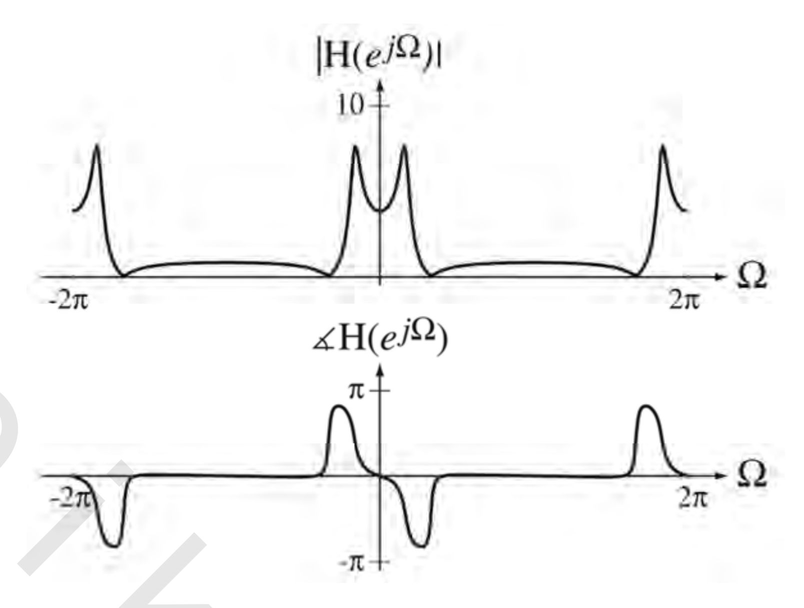
مخطط الأقطاب والأصفار موضح في شكل (٩.١٦).

مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام موضحة في شكل (٩.١٧).



شكل رقم (٩,١٦) مخطط الأقطاب والأصفار لدالة العبور التالية:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{z^2 - 0.96z + 0.9028}{z^2 - 1.56z + 0.8109}$$



شكل رقم (٩,١٧) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام الذي استجابته الترددية هي:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{\mathbf{z^2-0.96z+0.9028}}{\mathbf{z^2-1.56z+0.8109}}$$

مثال ٩,١٠

مخطط الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية من دالة العبور ٢

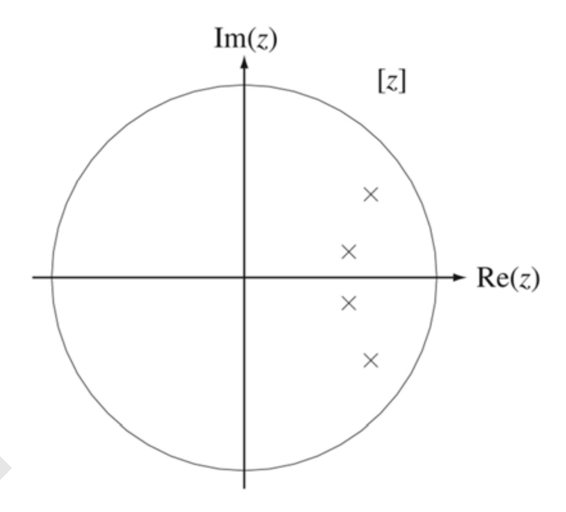
ارسم مخطط الأقطاب والأصفار وارسم الاستجابة الترددية للنظام الذي استجابته الترددية هي :

$$H(z) = \frac{0.0686}{(z^2 - 1.087z + 0.3132)(z^2 - 1.315z + 0.6182)}$$

يمكن تحليل هذه الدالة ووضعها على الصورة :

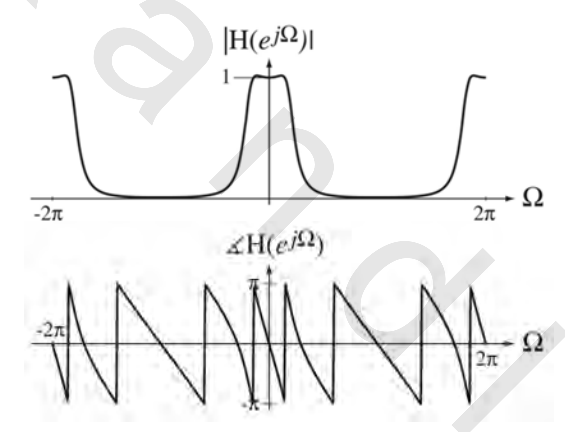
$$H(z) = \frac{0.0686}{(z - 0.5435 + j0.1333)(z - 0.5435 - j0.1333)(z - 0.6575 + j0.4312)(z - 0.6575 - j0.4312)}$$

مخطط الأقطاب والأصفار موضح في شكل (٩,١٨). مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام موضحة في شكل (٩,١٩).



شكل رقم (٩,١٨) مخطط الأقطاب والأصفار لدالة العبور التالية:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{0.0686}{(z^2-1.087z+0.3132)(z^2-1.315z+0.6182)}$$



شكل(٩,١٩) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام الذي دالة العبور له هي:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{0.0686}{(z^2-1.087z+0.3132)(z^2-1.315z+0.6182)}$$

(٩,١٤) كائنات نظام ماتلاب

يمكن كائنات في الزمن المتقطع واستخدامها بالطريقة نفسها مثل كائنات الأنظمة المستمرة. الصورة العامة للحصول على كائن مع الدالة tf هي نفسها تقريباً:

```
sys=tf(num, den, Ts)
```

ولكن في هذه المرة بإضافة المعامل Ts، وهو الزمن بين العينات، بفرض أن الإشارات المتقطعة زمنياً قد تم الحصول عليها عن طريق أخذ عينات من الإشارة المستمرة. مثلاً سنفترض أن دالة العبور لنظام هي:

$$H_1(z) = \frac{z^2(z-0.8)}{(z^2-0.3)(z^2-1.4z+0.2)} = \frac{z^3-0.8z^2}{z^3-1.1z^2-0.22z+0.06}$$

في ماتلاب ستكون :

```
»num = [1 -0.8 0 0] ;
»den = [1 -1.1 -0.22 0.06] ;
»Ts = 0.008 ;
»H1 = tf(num,den,Ts) ;
»H1
Transfer function:
z^3 - 0.8 z^2
-----------------------------
z^3 - 1.1 z^2 - 0.22 z + 0.06
```

الزمن بين العينات = 0.008.

يمكننا أيضاً استخدام الدالة zpk كما يلي :

```
»z = [0.4] ;
»p = [0.7 -0.6] ;
»k = 3 ;
»H2 = zpk(z,p,k,Ts) ;
»H2
Zero/pole/gain:
3 (z-0.4)
---------------
(z-0.7) (z+0.6)
Sampling time: 0.008
```

يمكننا أيضاً تحديد z كمتغير مستقل في تحويل زد كما يلي :

```
»z = tf('z',Ts) ;
»H3 = 7*z/(z^2+0.2*z+0.8) ;
»H3
Transfer function:

7 z
-----------------
z^2 + 0.2 z + 0.8
Sampling time: 0.008
```

لسنا هنا مطالبين بذكر الزمن بين العينات :

```
>> z = tf('z');
>> H3 = 7*z/(z^2+0.2*z+0.8);
>> H3
Transfer function:
7 z
-----------------
z^2 + 0.2 z + 0.8
Sampling time: unspecified
```

الأمر التالي :

H=freqz(num, den, W) ;

يقبل متجهيا البسط والمقام ويفسرهما على أنهما قوي المتغير z في البسط والمقام لدالة العبور H(z). إنها تعطي الاستجابة الترددية المركبة H بدلالة متغير التردد الزاوي المركب في المتجه W.

(٩,١٥) مقارنات بين طرق التحويل المختلفة

كل نوع من التحويلات السابقة له استخداماته التي يكون فيها مناسبا في تحليل الإشارات والأنظمة. إذا كنا نريد إيجاد الاستجابة الكلية للأنظمة المتقطعة زمنياً لإثارة سببية أو غير سببية، فإنه يمكننا غالباً استخدام تحويل زد. إذا كنا نحتاج الاستجابة الترددية للنظام، فإن DTFT يكون هو المناسب. إذا كنا نريد إيجاد استجابة أي نظام لأي إثارة دورية، فإنه يمكننا غالباً استخدام DTFT، أو DFT اعتماداً على نوع التحليل المطلوب والصورة المعروض بها هذا الدخل (هل هي صورة تحليلية، أم عددية).

مثال ٩,١١

استجابة النظام الكلية باستخدام تحويل زد z و DTFT

نظام له دالة العبور التالية:

$$H(z) = \frac{z}{(z-0.3)(z+0.8)}, \qquad |z| > 0.8$$

تمت إثارته باستخدام تتابع الوحدة. إحسب الاستجابة الكلية لهذا النظام.

تحويل زد للاستجابة سيكون:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{(z-0.3)(z+0.8)} \times \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1$$

باستخدام تحليل الكسور الجزيئية نحصل على:

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-0.3)(z+0.8)(z-1)} = -\frac{0.1169}{\mathrm{z}-0.3} + \frac{0.3232}{\mathrm{z}+0.8} + \frac{0.7937}{\mathrm{z}-1}, \qquad |z| > 1$$

وبالتالي فإن الاستجابة الكلية ستكون:

$$y[n] = [-0.1169(0.3)^{n-1} + 0.3232(-0.8)^{n-1} + 0.7937]u[n-1]$$

يمكن أيضاً تحليل هذه المسألة باستخدام DTFT ولكن الترميز سيكون غير ملائم لأن DTFT لتتابع الوحدة يكون أساساً كما يلي:

$$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)$$

وستكون استجابة النظام الترددية هي:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-0.3)(e^{j\Omega}+0.8)}$$

DTFT لاستجابة النظام ستكون:

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-0.3)(e^{j\Omega}+0.8)} \times \left(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)\right)$$

أو :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j2\Omega}}{(e^{j\Omega}-0.3)(e^{j\Omega}+0.8)(e^{j\Omega}-1)} + \pi\frac{e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-0.3)(e^{j\Omega}+0.8)}\pi\delta_{2\pi}(\Omega)$$

وباستخدام الكسور الجزيئية نحصل على :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{-0.1169}{e^{j\Omega}-0.3} + \frac{0.3232}{e^{j\Omega}+0.8} + \frac{0.7937}{e^{j\Omega}-1} + \frac{\pi}{(1-0.3)(1+0.8)}\delta_{2\pi}(\Omega)$$

باستخدام خاصية التكافوء في الصدمة ودورية كل $\delta_{2\pi}(\Omega)$ و $e^{j\Omega}$ نحصل على :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{-0.1169e^{-j\Omega}}{1-0.3e^{-j\Omega}} + \frac{0.3232e^{-j\Omega}}{1+0.8e^{-j\Omega}} + \frac{0.7937e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} + 2.4933\delta_{2\pi}(\Omega)$$

بعد ذلك بوضع هذه المعادلة في صورة يكون فيها تحويل DTFT العكسي مباشرا :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{-0.1169e^{-j\Omega}}{1-0.3e^{-j\Omega}} + \frac{0.3232e^{-j\Omega}}{1+0.8e^{-j\Omega}} + 0.7937\left(\frac{e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)\right)$$

$$\underbrace{-0.7937\pi\delta_{2\pi}(\Omega) + 2.4933\delta_{2\pi}(\Omega)}_{=0}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{-0.1169e^{-j\Omega}}{1-0.3e^{-j\Omega}} + \frac{0.3232e^{-j\Omega}}{1+0.8e^{-j\Omega}} + 0.7937\left(\frac{e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)\right)$$

وفي النهاية بإجراء تحويل DTFT العكسي نحصل على :

$$y[n] = [-0.1169(0.3)^{n-1} + 0.3232(-0.8)^{n-1} + 0.7937]u[n-1]$$

وهي النتيجة السابقة نفسها ولكن بمجهود أكبر واحتمال للخطأ أكبر كذلك.

مثال ٩,١٢

استجابة النظام لدالة جيبية

نظام له دالة العبور التالية :

$$(z) = \frac{z}{Z-0.9}, \qquad |z| > 0.9$$

وتمت إثارته بالدالة الجيبية $x[n]=\cos(2\pi n/12)$ أوجد استجابة هذا النظام.

الإثارة هي دالة جيبية حقيقية $x[n]=\cos(2\pi n/12)$ ، وليست دالة جيبية سببية $x[n]=\cos(2\pi n/12)u[n]$. الدوال الجيبية النقية لا تظهر في جدول تحويلات زد. حيث إن الإثارة هي دالة جيبية نقية ، فإننا سنحسب استجابة مدفوعة للنظام ويمكننا استخدام زوج DTFT التالي :

$$cos(\Omega_0 n) \overset{f}{\leftrightarrow} \pi[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)]$$

وأيضاً :

$$\delta_{N_0}[n] \overset{f}{\leftrightarrow} (2\pi/N_0)\delta_{2\pi/N_0}(\Omega)$$

وباستخدام التبادلية بين الضرب والالتفاف:

$$x[n] * y[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$$

وبالتالي، فإن DTFT لاستجابة النظام ستكون:

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0.9} \times \pi\pi[\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6) + \delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)]$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi\left[e^{j\Omega}\frac{\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6)}{e^{j\Omega} - 0.9} + e^{j\Omega}\frac{\delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)}{e^{j\Omega} - 0.9}\right]$$

باستخدام خاصية التكافؤ للصدمة، وحقيقة أن كلاً من $e^{j\Omega}$ و $\delta_{2\pi}(\Omega)$ لها دورة أساسية مقدارها 2π، فإن:

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi\left[e^{j\pi/6}\frac{\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6)}{e^{j\pi/6} - 0.9} + e^{-j\pi/6}\frac{\delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)}{e^{-j\pi/6} - 0.9}\right]$$

بإيجاد المقام المشترك في المعادلة السابقة والتبسيط:

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi\frac{\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6)\left(1 - 0.9e^{j\pi/6}\right) + \delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)\left(1 - 0.9e^{-j\pi/6}\right)}{1.81 - 1.8(\pi/6)}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi\frac{0.2206[\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6) + \delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)] + j0.45[\delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6) - \delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6)]}{0.2512}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = 2.7589[\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6) + \delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)] + j5.6278[\delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6) - \delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6)]$$

باستخدام DTFT لدالة الجيب وجيب التمام:

$$y[n] = 0.8782cos(2\pi n/12) + 1.7917sin(2\pi n/12)$$

باستخدام:

$$A\, cos(x) + B\, sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\, cos\left(x + tan^{-1}(B/A)\right)$$

نحصل على ما يلي:

$$y[n] = 1.995\, cos(2\pi n/12 - 1.115)$$

نحن لم نستخدم تحويل زد؛ لأنه لا يوجد في جدول أزواج تحويلات زد تحويلا للدالة الجيبية. ولكن هناك تحويلاً للدالة الجيبية المضروبة في تتابع الوحدة كالتالي:

$$cos(\Omega_0 n)u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z\,[z - cos(\Omega_0)]}{z^2 - 2z\,cos(\Omega_0) + 1}, |z| > 1$$

من الممكن أن نوجد استجابة النظام لهذه الإثارة المختلفة، ولكنها مشابهة للإثارة التي معنا. دالة العبور ستكون

كما يلي:

$$H(z) = \frac{z}{z - 0.9}, |z| > 0.9$$

وبالتالي سيكون تحويل زد للاستجابة هو:

$$Y(z) = \frac{z}{z - 0.9} \times \frac{z\,[z - cos(\pi/6)]}{z^2 - 2z\,cos(\pi/6) + 1}, |z| > 1$$

وباستخدام الكسور الجزيئية :

$$Y(z) = \frac{0.1217z}{z-0.9} + \frac{0.8783z^2 + 0.1353z}{z^2 - 1.732z + 1}, |z| > 1$$

لإيجاد تحويل زد العكسي ، فإننا سنحتاج لتعديل المعادلة السابقة لتكون في صورة مشابهة للصور الموجودة في الجدول. الكسر الأول يظهر مباشرة في الجدول. الكسر الثاني له مقام ، كما له الشكل نفسه الموجود في تحويل زد للدالة $\cos(\Omega_0 n)u[n]$ والدالة $\sin(\Omega_0 n)u[n]$ ، ولكن البسط ليس في الصورة المكافئة. ولكن بإضافة وطرح كميات مناسبة للبسط يمكننا التعبير عن Y(z) كما يلي :

$$Y(z) = \frac{0.1217}{z-0.9} + 0.8783\left[\frac{z\,(z-0.866)}{z^2-1.732z+1} + 2.04\frac{0.5z}{z^2-1.732z+1}\right], |z| > 1$$

$$y[n] = 0.1217(0.9)^n u[n] + 0.8783cos(2\pi n/12) + 2.04sin(2\pi n/12)u[n]$$

$$y[n] = 0.1217(0.9)^n u[n] + 1.995cos(2\pi n/12 - 1.115)u[n]$$

لاحظ أن الاستجابة تتكون من جزأين ، استجابة عابرة ، وهي :

$$0.1217(0.9)^n u[n]$$

واستجابة مدفوعة ، وهي :

$$1.995cos(2\pi n/12 - 1.115)u[n]$$

وهي الاستجابة المدفوعة نفسها التي حصلنا عليها باستخدام DTFT فيما عدا معامل تتابع الوحدة. وعلى ذلك فبالرغم من أننا لا نعرف تحويل زد للدالة الجيبية في جدول التحويلات ، إلا أننا يمكننا استخدام تحويل زد للدالة $\cos(\Omega_0 n)u[n]$ والدالة $\sin(\Omega_0 n)u[n]$ لإيجاد الاستجابة المدفوعة للدالة الجيبية.

في التحليل الموجود في نظام المثال ٩.١٢ كانت الإثارة دالة جيبية ، وهي شائعة في أنواع مختلفة من تحليلات الإشارات والأنظمة ، ومن المهم أن نعمم هذه العملية. إذا كانت دالة العبور للنظام على الصورة :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

فإن استجابة النظام للدالة $\cos(\Omega_0 n)u[n]$ ستكون :

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)}\frac{z\,[z - cos(\Omega_0)]}{z^2 - 2z\,cos(\Omega_0) + 1}$$

أقطاب هذه الاستجابة هي أقطاب دالة العبور زائد جذور المعادلة :

$$z^2 - 2z\,cos(\Omega_0) + 1 = 0$$

التي تكون زوجاً مركباً ومترافقاً على الصورة $p_1 = e^{j\Omega_0}$ و $p_2 = e^{-j\Omega_0}$. ولذلك فإن $p_1 = p_2^*$ و $p_1+p_2=2\cos(\Omega_0)$ ، و $p_1-p_2=j2\sin(\Omega_0)$ و $p_1p_2=1$. ولذلك فإذا كانت $\Omega_0 \neq m\pi$ حيث m ثابت صحيح ، بمعنى إذا لم يكن هناك إلغاء للأقطاب والأصفار ، فإن هذه الأقطاب ستكون منفردة ، ويمكن كتابة الاستجابة في صورة الكسور الجزيئية كالتالي :

$$Y(z) = z\left[\frac{N_1(z)}{D(z)} + \frac{1}{p_1 - p_2}\frac{H(p_1)(p_1 - cos(\Omega_0))}{z - p_1} + \frac{1}{p_2 - p_1}\frac{H(p_2)(p_2 - cos(\Omega_0))}{z - p_2}\right]$$

ويمكن تبسيط ذلك كما يلي :

$$Y(z) = z\left[\left\{\frac{N_1(z)}{D(z)} + \left[\frac{H_r(p_1)(z - p_{1r}) - H_i(p_1)p_{1i}}{z^2 - z(p_{1r}) + 1}\right]\right\}\right]$$

حيث $p_1=p_{lr}+jp_{li}$ و $H(p_1)=H_r(p_1)+jH_i(p_1)$. ويمكن كتابة ذلك بدلالة المعاملات الأساسية كما يلي :

$$Y(z) = \left\{z\frac{N_1(z)}{D(z)} + \left[\begin{array}{l} Re\left(H\left(cos(\Omega_0) + j\,sin(\Omega_0)\right)\right)\dfrac{z\,sin(\Omega_0)}{z^2 - 2z\,cos(\Omega_0) + 1} \\ -Im\left(H\left(cos(\Omega_0) + j\,sin(\Omega_0)\right)\right)\dfrac{z\,sin(\Omega_0)}{z^2 - 2z\,cos(\Omega_0) + 1}\end{array}\right]\right\}$$

وبالتالي سيكون تحويل زد العكسي هو :

$$y[n] = z^{-1}\left(\frac{N_1(z)}{D(z)}\right) + \left[\begin{array}{l} Re\left(H\left(cos(\Omega_0) + j\,sin(\Omega_0)\right)\right)cos(\Omega_0 n) \\ -Im\left(H\left(cos(\Omega_0) + j\,sin(\Omega_0)\right)\right)sin(\Omega_0 n)\end{array}\right]u[n]$$

أو باستخدام :

$$Re(A)cos(\Omega_0 n) - Im(A)sin(\Omega_0 n) = |A|cos(\Omega_0 n + \measuredangle A)$$

$$y[n] = z^{-1}\left(\frac{N_1(z)}{D(z)}\right) + \left|H\left(cos(\Omega_0) + j\,sin(\Omega_0)\right)\right|cos\left(\Omega_0 n + \measuredangle H\left(cos(\Omega_0) + j\,sin(\Omega_0)\right)\right)u[n]$$

أو في النهاية :

$$y[n] = z^{-1}\left(\frac{N_1(z)}{D(z)}\right) + |H(p_1)|cos(\Omega_0 n + \measuredangle H(p_1))u[n]$$ المعادلة رقم (٩.٨)

إذا كان النظام مستقراً ، فإن الكمية :

$$z^{-1}\left(\frac{N_1(z)}{D(z)}\right)$$

(وهو الاستجابة الطبيعية أو الوقتية) تتناقص إلى الصفر مع زيادة الزمن المتقطع والكمية :

$$|H(p_1)|cos(\Omega_0 n + \measuredangle H(p_1))u[n]$$

ستساوي دالة جيبية بعد الزمن $n=0$ وستظل كذلك دائماً.

باستخدام هذه النتيجة ، يمكننا الآن حل المشكلة في المثال ٩.١٢ بسرعة أكثر. وستكون الاستجابة للإشارة $x[n]=cos(2\pi n/12)u[n]$ هي :

$$y[n] = z^{-1}\left(z\frac{N_1(z)}{D(z)}\right) + |H(p_1)|cos(\Omega_0 n + \measuredangle H(p_1))u[n]$$

والاستجابة للإشارة $x[n]=cos(2\pi n/12)$ ستكون :

$$y_f[n] = |H(p_1)|cos(\Omega_0 n + \measuredangle H(p_1))u[n]$$

حيث $H(z)=\frac{z}{z-0.9}$ و $p_1=e^{j\pi/6}$، ولذلك فإن:

$$H\left(e^{j\pi/6}\right)=\frac{e^{j\pi/6}}{e^{j\pi/6}-0.9}=0.8783-j1.7917=1.955\measuredangle-1.115$$

وبالتالي:

$$y_f[n]=1.995cos(\Omega_0 n-0.115)$$

(٩,١٦) ملخص للنقاط المهمة

١- يمكن استخدام تحويل زد لتحديد دالة العبور لأي نظام LTI متقطع زمنياً، ويمكن استخدام دالة العبور لإيجاد استجابة النظام لأي إثارة اختيارية.

٢- تحويل زد يكون موجودا للإشارات المتقطعة زمنياً التي يزداد مقدارها أسرع من دالة أسية في الزمن الموجب، أو السالب.

٣- منطقة تقارب تحويل زد لأي إشارة تعتمد على كون الإشارة يمينية، أو يسارية الجانب.

٤- الأنظمة الموصوفة بمعادلات فرقية خطية ثابتة المعاملات لها دوال عبور في صورة نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير z ويمكن بناء هذه الأنظمة مباشرة من دالة العبور.

٥- باستخدام جدول أزواج تحويلات زد وجدول الخواص يمكن إيجاد التحويلات الأمامية والعكسية لأي إشارة ذات أهمية هندسية.

٦- يستخدم تحويل زد الأحادي في حل المشاكل العملية؛ لأنه لا يتطلب أي اعتبارات لمنطقة التقارب وبالتالي فإنه يكون أبسط من التحويل الثنائي.

٧- مخطط الأقطاب والأصفار لدالة عبور أي نظام يحتوي على العديد من خواص هذا النظام ويمكن استخدامه لتحديد الاستجابة الترددية.

٨- يحتوي ماتلاب على هدف محدد للتعبير عن دالة عبور النظام المتقطع زمنياً والعديد من الدوال التي تعمل على الهدف من هذا النوع.

تمارين وإجاباتها

(في كل تمرين تكون الإجابات مرتبة بطريقة عشوائية)

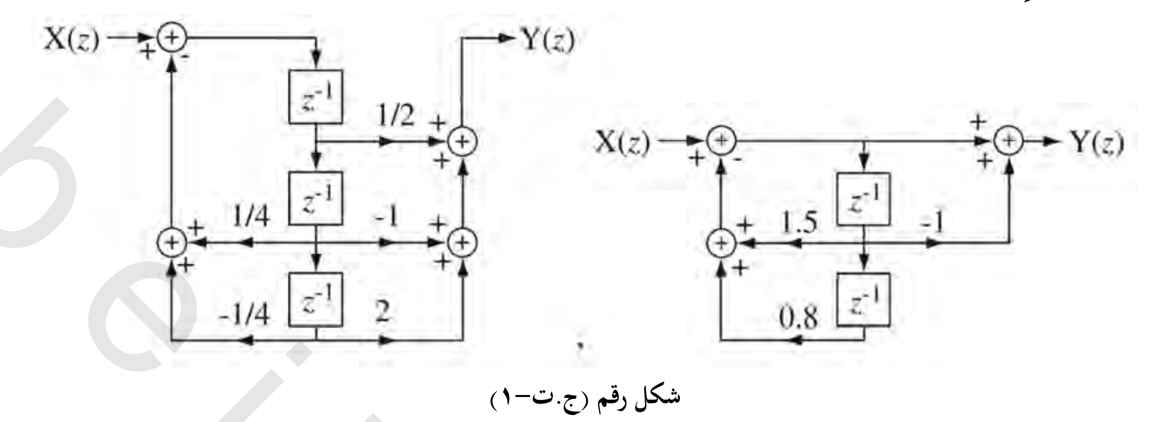
بناء الأنظمة باستخدام الطريقة المباشرة II

١- ارسم المخطط الصندوقي للطريقة المباشرة II لدوال عبور الأنظمة الآتية:

$$H(z)=\frac{z^2-2z+4}{(z-1/2)(2z^2+z+1)}$$

$H(z) = \frac{z(z-1)}{z^2+1.5z+0.8}$

الإجابة:



شكل رقم (ج.ت-١)

وجود تحويل زد z

٢- أوجد منطقة التقارب (إن وجدت) لتحويل زد للإشارات التالية:

(أ) x[n]=u[n]+u[-n]

(ب) x[n]=u[n]-u[n-10]

الإجابة: لا توجد، |z|>1

تحويل زد الأمامي والعكسي

٣- باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية، أوجد تحويل زد الثنائي للإشارات التالية:

(أ) x[n]=u[n-5]

(ب) x[n]=u[n+2]

(ج) $x[n]=(2/3)^n u[n+2]$

الإجابة:

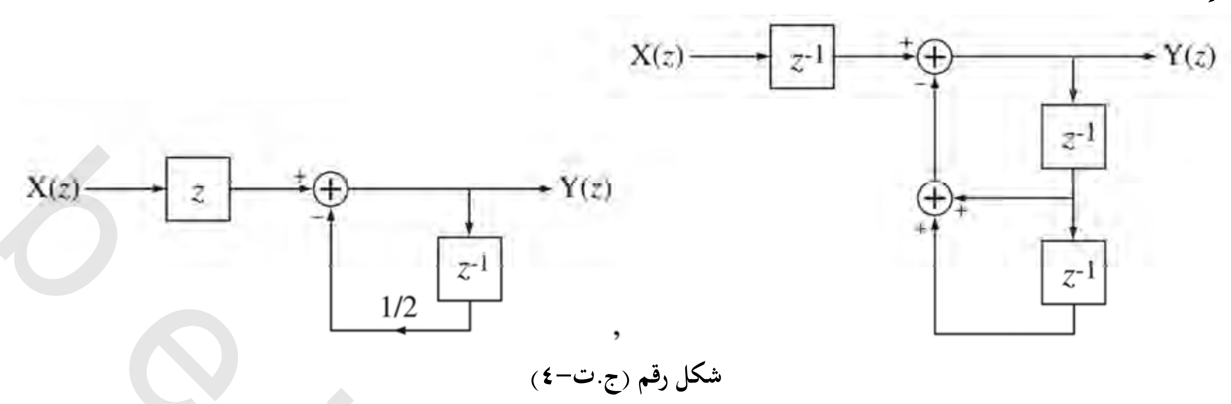
$\frac{z^{-4}}{z-1},\ |z|>1;\ \frac{z^3}{z-1}, |z|>1\ ;\ \frac{z}{z-2/3},\ |z|>2/3$

٤- ارسم مخططات الأنظمة التالية لدوال العبور التالية باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية:

(أ) $H(z) = \frac{z^2}{z+2/3}$

(ب) $H(z) = \frac{z}{z^2+z+1}$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٤)

٥- باستخدام خاصية التحجيم ، أوجد تحويل زد للإشارة التالية :

$$x[n] = sin(2\pi n/8)cos(2\pi n/8)u[n]$$

الإجابة :

$$z\frac{0.1379z^2-0.3827z+0.1379}{z^4-2.7741z^3+3.8478z^2-2.7741z+1}$$

٦- باستخدام خاصية التفاضل في النطاق z ، أوجد تحويل زد للإشارة التالية :

$$x[n] = \mathrm{n}(5/8)^{\mathrm{n}}u[n]$$

الإجابة :

$$\frac{5\mathrm{z}/8}{(\mathrm{z}-5/8)^2},\ \ |z| > 5/8$$

٧- باستخدام خاصية الالتفاف ، أوجد تحويل زد للإشارات التالية :

(أ) $x[n] = (0.9)^{\mathrm{n}}u[n] * u[n]$

(ب) $x[n] = (0.9)^{\mathrm{n}}u[n] * (0.6)^{\mathrm{n}}u[n]$

الإجابة :

$$\frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{z}^2-1.9z+0.9},\ \ |z| > 1,\ \frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{z}^2-1.5z+0.54},\ \ |z| > 0.9$$

٨- باستخدام خاصية الفرق وتحويل زد لتتابع الوحدة ، أوجد تحويل زد لوحدة الصدمة وتحقق من إجابتك بالرجوع إلى جدول تحويلات زد z .

٩- أوجد تحويل زد للدالة التالية :

$$x[n] = u[n] - u[n-10]$$

وباستخدام هذه النتيجة وخاصية الفرق ، أوجد تحويل زد للدالة التالية :

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-10]$$

قارن هذه النتيجة مع تحويل زد المحسوب مباشرة بتطبيق خاصية الإزاحة الزمنية على وحدة الصدمة.

١٠- باستخدام خاصية التراكم أوجد تحويل زد للإشارات التالية:

(أ) $x[n] = ramp[n]$

(ب) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} u[m+5] - u[m]$

الإجابة:

$\frac{z}{(z-1)^2},\ |z|>1,\ \frac{z^2(z^5-1)}{(z-1)^2},\ |z|>1$

١١- باستخدام خاصية القيمة النهائية، أوجد القيمة النهائية للدوال التي هي تحويل زد العكسي للدوال التالية (إذا كانت النظرية مطبقة):

(أ) $x(z) = \frac{2z-7/4}{z^2-7/4z+3/4},\ |z|>1$

(ب) $x(z) = \frac{z}{z-1},\quad |z|>1$

الإجابة: $1, 1$

١٢- أوجد تحويل زد العكسي للدوال التالية في صورة تتابع باستخدام القسمة المطولة:

(أ) $X(z) = \frac{z-1}{z^2-2z+1},\ |z|>1$

(ب) $X(z) = \frac{z}{z-1/2},\quad |z|>1/2$

(ج) $X(z) = \frac{z+2}{4z^2-2z+3},\ |z|>\sqrt{3}/2$

(د) $X(z) = \frac{z}{z-1/2},\quad |z|>1/2$

الإجابة:

$$\delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots + \delta[n-k] + \cdots,$$

$$-2\delta[n+1] - 4\delta[n+2] - 8\delta[n+3] - \cdots - 2^k\delta[n+k] - \cdots,$$

$$0.667\delta[n] + 0.778\delta[n+1] - 0.3704\delta[n+2] + \cdots,$$

$$\delta[n] + (1/2)\delta[n-1] + \cdots + (1/2^k)\delta[n-k] + \cdots,$$

١٣- أوجد تحويل زد العكسي لهذه الدوال في صورة مغلقة باستخدام الكسور الجزيئية، وجدول تحويلات زد وجدول خواصه:

(أ) $X(z) = \frac{1}{z(z-1/2)},\ |z|>1/2$

(ب) $X(z) = \frac{z^2}{(z-1/2)(z-3/4)},\quad |z|<1/2$

(ج) $X(z)=\frac{z^2}{z^2+1.8z+0.82},\ |z|>0.9055$

(د) $X(z)=\frac{z^2}{3z^2-2z+2},\quad |z|<0.8165$

الإجابة:

$$(1/2)^{n-2}[n-2],$$

$$(0.9055)^n[cos(3.031\,n)-9.03sin(3.031\,n)]u[n]$$

$$[2(1/2)^n-3(3/4)^n]u[-n-1],$$

$$0.4472(0.8165)^n\left[1.2247sin(1.1503(n-1)\,)u[-n-1]-sin(1.1503\,n)u[-n-1]\right]$$

١٤- إذا كانت:

$$H(z)=\frac{z^2}{(z-1/2)(z+3/4)},\quad |z|>1/2$$

فبإيجاد الكسور الجزيئية لهذه النسبة غير المثالية بطريقتين مختلفتين، فإن تحويل زد العكسي h[n] يمكن كتابته بصورتين مختلفتين كما يلي:

$$h[n]=[A(1/2)^n+B(-1/3)^n]u[n]$$

و

$$h[n]=\delta[n]+[C(1/2)^{n-1}+D(-1/3)^{n-1}]u[n-1]$$

فأوجد A و B و C و D.

الإجابة: ....0.1333- و 0.6 و 0.4 و 0.3

خواص تحويل زد الأحادي

١٥- باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية، أوجد تحويل زد الأحادي لهذه الإشارات:

(أ) x[n]=u[n-5]

(ب) x[n]=u[n+2]

(ج) $x[n]=(2/3)^n u[n+2]$

الإجابة:

$$\frac{z^{-4}}{z-1},|z|>1;\ \frac{z}{z-1},|z|>1;\ \frac{z}{z-2/3},|z|>2/3$$

١٦- إذا كان تحويل زد الأحادي للدالة x[n] هو X(z)=z/(z-1) فما هي تحويلات زد الأحادية لكل من x[n-1] و x[n+1]:

الإجابة: 1/(z-1) و z/(z-1)

حل المعادلات الفرقية

١٧- باستخدام تحويل زد، أوجد الحل الكلي للمعادلات الفرقية التالية مع الشروط الابتدائية المبينة للزمن المتقطع $n\geq 0$

(أ) $2y[n+1]-y[n]=\sin(2\pi n/16)u[n],\ y[0]=1$

(ب) $5y[n+2]-3y[n+1]+y[n]=(0.8)^n u[n],\ y[0]=-1, y[1]=10$

الإجابة:

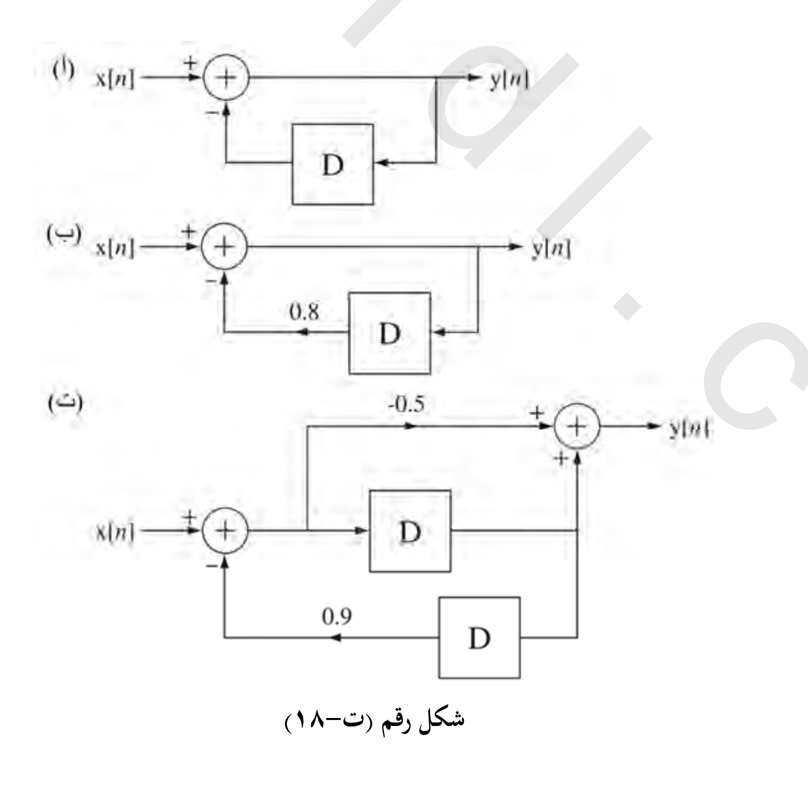
$$0.2934\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

$$-0.2934\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}(n-1)\right)-2.812\sin\left(\frac{\pi}{8}(n-1)\right)\right]u[n-1]$$

$$y[n]=0.4444(0.8)^n u[n]$$

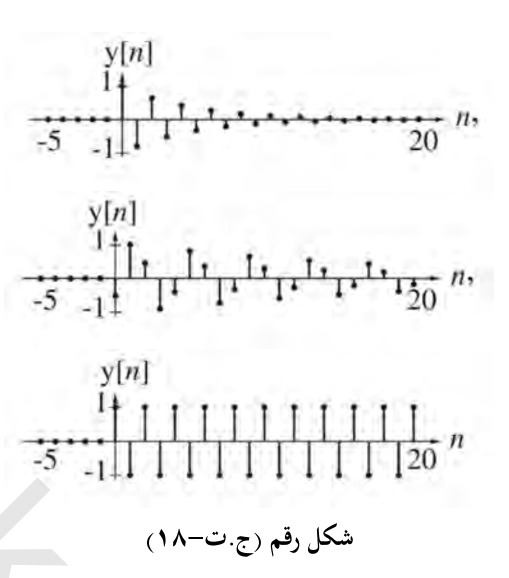
$$-\left\{\delta[n]-9.5556(0.4472)^{n-1}\begin{bmatrix}\cos(0.8355(n-1))\\+0.9325\sin(0.8355(n-1))\end{bmatrix}u[n-1]\right\}$$

١٨- لكل مخطط صندوقي في شكل (ت- ١٨) أكتب المعادلة الفرقية وأوجد وارسم الاستجابة y[n] لكل نظام للزمن المتقطع $n\geq 0$ بفرض عدم وجود طاقة ابتدائية مخزنة في النظم والإثارة الصدمية $x[n]=\delta[n]$.



شكل رقم (ت–١٨)

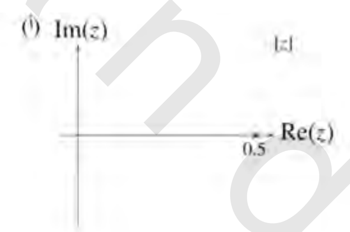
الإجابة:

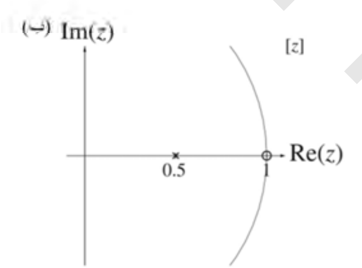


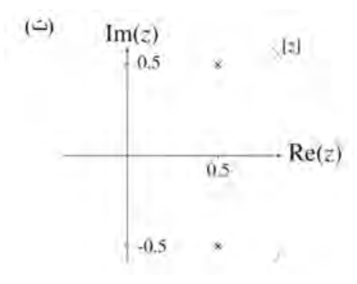
شكل رقم (ج.ت-١٨)

مخطط الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية

١٩- ارسم مخطط مقدار الاستجابة الترددية للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ١٩) من مخططات الأقطاب والأصفار لها:







شكل رقم (ت-١٩)

تمارين بدون إجابات

بناء الأنظمة باستخدام الطريقة المباشرة II

٢٠- ارسم بالطريقة المباشرة II رسماً صندوقياً لكل دالة عبور للأنظمة التالية :

(أ) $H(z) = \frac{z^2}{2z^4+1.2z^3-1.06z^2+0.08Z-0.02}$

(ب) $H(z) = \frac{z^2(z^2+0.8Z+0.2)}{(2z^2+2Z+1)(z^2+1.2Z+0.5)}$

تواجد تحويل زدz

٢١- أوجد منطقة التقارب في المستوى z (إذا كان موجوداً) لتحويل زد للإشارات التالية :

(أ) $x[n] = (1/2)^n u[n]$

(ب) $x[n] = (5/4)^n u[n] + (10/7)^n u[-n]$

تحويل زد الأمامي والعكسي

٢٢- باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية أوجد تحويل زد للإشارات التالية :

(أ) $x[n] = (2/3)^{n-1}\, u[n-1]$

(ب) $x[n] = (2/3)^n\, u[n-1]$

(ج) $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{4}\right) u[n-1]$

٢٣- إذا كان تحويل زد للإشارة x[n] هو $X(z)=1/(z-3/4),\ |z|>3/4$ و
$Y(z) = j\left[X\left(e^{j\pi/6}z\right) - X\left(e^{-j\pi/6}z\right)\right]$

فما هي y[n]؟

٢٤- باستخدام خاصية الالتفاف أوجد تحويل زد للإشارات التالية :

(أ) $x[n] = \sin(2\pi n/8)\, u[n] * u[n]$

(ب) $x[n] = \sin(2\pi n/8)\, u[n] * (u[n] - u[n-8])$

٢٥- مرشح رقمي له استجابة الصدمة التالية :
$h[n] = \frac{\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]}{10}$

(أ) كم عدد الأقطاب والأصفار الموجودة في دالة العبور هذه وما هي المواضع الرقمية لها ؟

(ب) إذا كانت الإثارة لهذا النظام هي وحدة صدمة فما هي القيمة النهائية للاستجابة $\lim_{n\to\infty} y[n]$ ؟

٢٦- تحويل زد الأمامي للدالة $h[n]=(4/5)^n u[n]*u*[n]$ يمكن التعبير عنه في الصورة التالية :

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}$$

فأوجد القيم العددية لكل من b_0 و b_1 و b_2 و a_0 و a_1 و a_2.

٢٧- أوجد تحويل زد العكسي للدوال التالية في صورة مغلقة باستخدام الكسور الجزيئية وجدول تحويلات زد وخواصه.

(أ) $X(z) = \frac{z-1}{z^2+1.8z+0.82},\ |z| > 0.9055$

(ب) $X(z) = \frac{z-1}{z(z^2+1.8z+0.82)},\ |z| > 0.9055$

(ث) $X(z) = \frac{z^2}{z^2-z+1/4},\ |z| < 0.5$

(ج) $X(z) = \frac{z+0.3}{z^2+0.8z+0.16},\quad |z| > 0.4$

(ح) $X(z) = \frac{z^2+0.8z+0.16}{z^3},\quad |z| > 0$

٢٨- إشارة $y[n]$ تتعلق بإشارة $x[n]$ بالعلاقة التالية :

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

فإذا كانت :

$$y[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{(z-1)^2},\ |z| > 1$$

فما هي القيم العددية لكل من $x[-1]$ و $x[0]$ و $x[1]$ و $x[2]$ ؟

٢٩- إذاكان تحويل زد للإشارة $x[n]$ هو :

$$X(z) = \frac{z^{-4}}{z^4+z^2+1},\quad |z| < 1$$

فما هي القيمة العددية لكل من : $x[-2]$ و $x[-1]$ و $x[0]$ و $x[1]$ و $x[2]$ و $x[3]$ و $x[4]$.

مخطط الأقطاب الأصفار والاستجابة الترددية

٣٠- مرشح له استجابة الصدمة التالية :

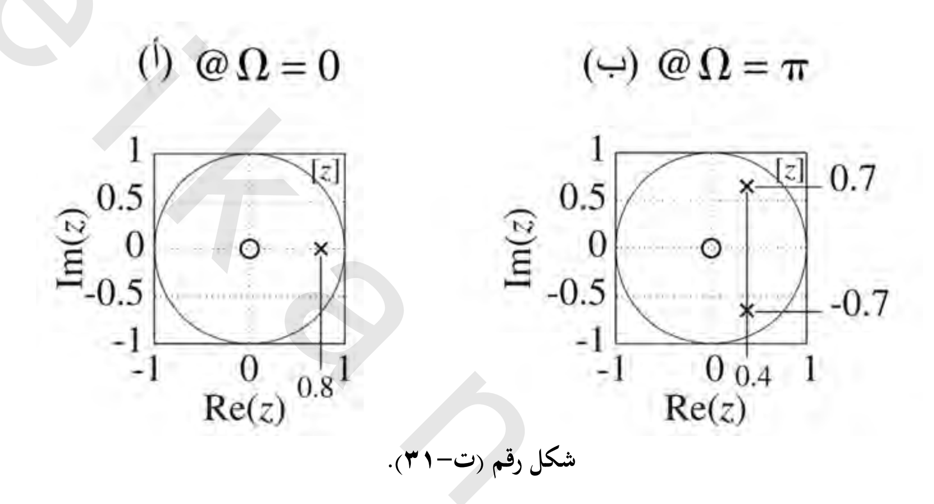
$$h[n] = \frac{\delta[n]+\delta[n-1]}{2}$$

لقد تم توليد إشارة جيبية x[n] عن طريق أخذ عينات بتردد fs=10Hz لدالة جيبية مستمرة بتردد دوري f_0.
ما هي أقل قيمة عددية موجبة لـ f_0 التي ستكون عندها استجابة المرشح المدفوعة تساوي صفراً ؟

٣١- أوجد مقدار دالة العبور للأنظمة التي مخطط الأقطاب والأصفار لها موضحة في شكل (ت- ٣١).
(افترض في كل حالة أن دالة العبور تكون في الصورة العامة التالية:

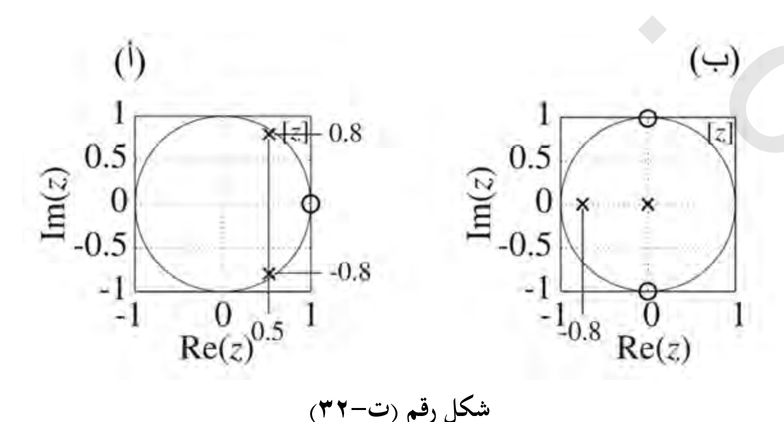
$$H(z) = K\frac{(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_N)}{(z-p_1)(z-p_2)...(z-p_D)}$$

حيث الـ z's هي الأصفار، والـ p's هي الأقطاب وافترض أن K=1).



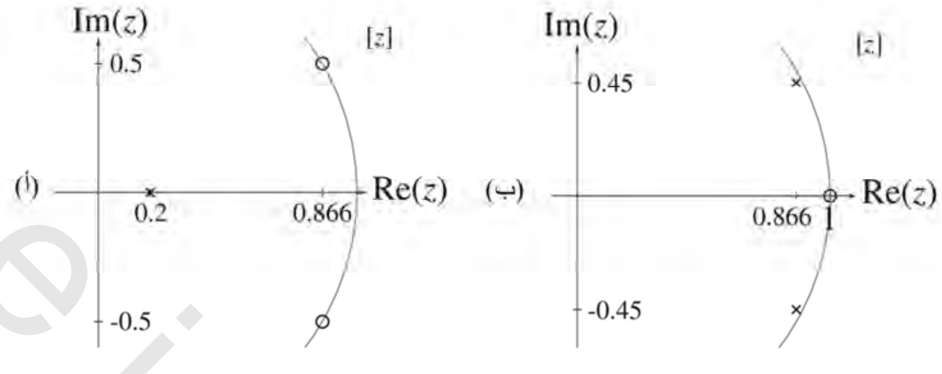
شكل رقم (ت-٣١).

٣٢- لكل واحد من الأنظمة التي لها مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة، أوجد التردد الزاوي المتقطع زمنياً Ω_{max} و Ω_{min} في المدى $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ والتي عندها يكون مقدار دالة العبور قيمة عظمى، أو صغرى. إذا كان هناك أكثر من قيمة لـ Ω_{max} أو Ω_{min} ، فأوجد كل هذه القيم؟



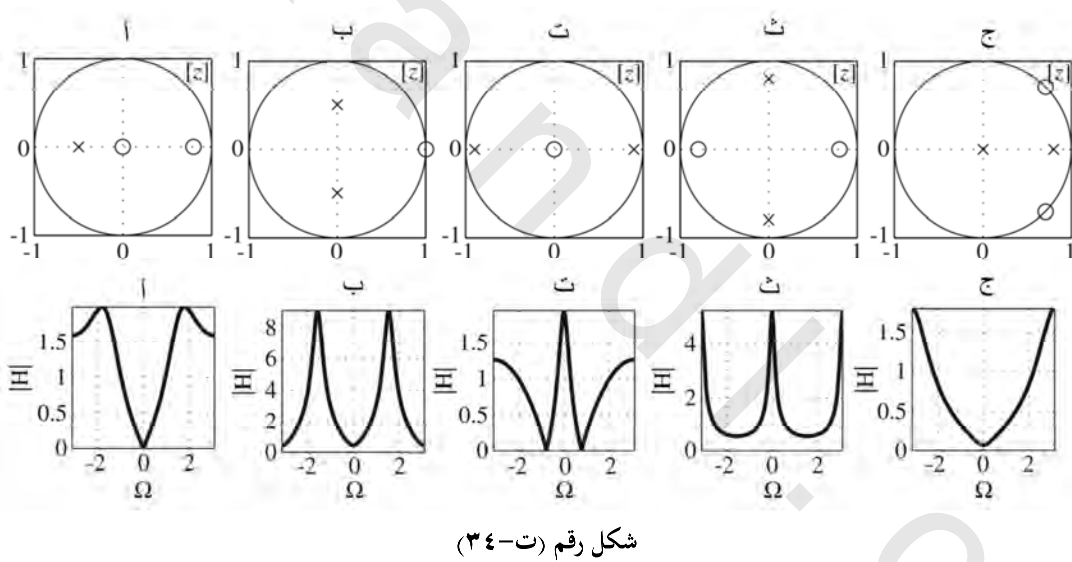
شكل رقم (ت-٣٢)

٣٣- ارسم تخطيطياً مقدار الاستجابة الترددية للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٣٣) من مخططات الأقطاب والأصفار لها:



شكل رقم (ت-٣٣)

٣٤- وافق بين مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة في شكل (ت- ٣٤) ومقادير الاستجابة الترددية المقابلة:



شكل رقم (ت-٣٤)

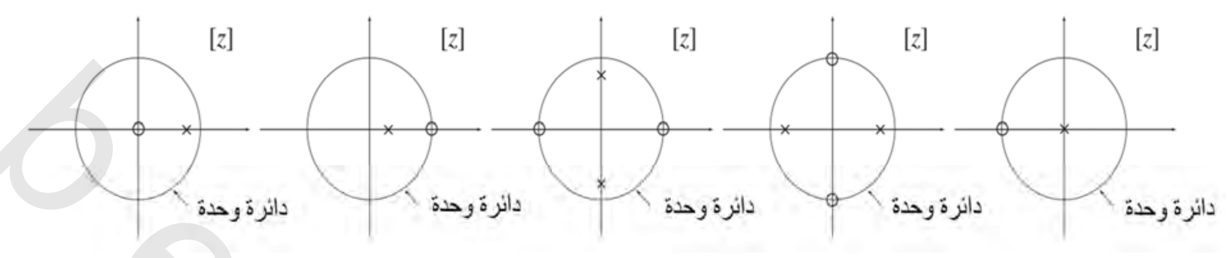
٣٥- باستخدام التعريفات التالية للمرشحات المنفذة للترددات المنخفضة، والمنفذة للترددات المرتفعة، والمنفذة لمجال من الترددات، والكابحة لمجال من الترددات، صنف الأنظمة التي دوال عبورها لها مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة في شكل (ت- ٣٥). (بعضها قد لا يمكن تصنيفه). في كل حالة دالة العبور هي $H(z)$.

المنفذ للترددات المنخفضة: $H(1)\neq0$ و $H(-1)=0$

المنفذ للترددات المرتفعة: $H(1)=0$ و $H(-1)\neq0$

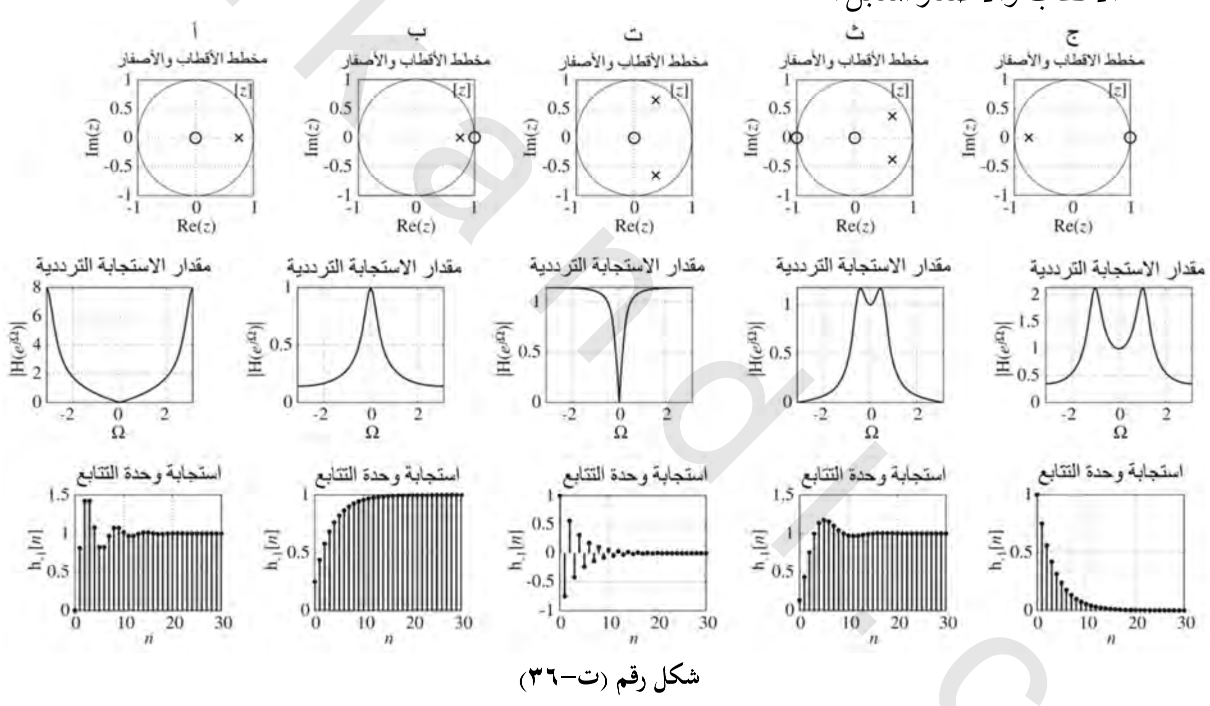
المنفذ لمجال من الترددات: H(1)=0 و H(-1)=0 و H(z)≠0 لمدى معين لـ |z|=1

الكابح لمدى من الترددات: H(1)≠0 و H(-1)≠0 و H(z)=0 لواحدة على الأقل لـ |z|=1



شكل رقم (ت–٣٥)

٣٦- لكل مقدار استجابة ترددية وكل استجابة لتتابع الوحدة الموضحة في شكل (ت- ٣٦) أوجد مخطط الأقطاب والأصفار المقابل:



شكل رقم (ت–٣٦)

أخذ العينات (العينـنـة) ومعالجة الإشارة

(١٠,١) المقدمة والأهداف

لا يكون عادة في تطبيق معالجة الإشارات على الإشارات الحقيقية في الأنظمة الحقيقية وصف حسابي لهذه الإشارات، ويجب أن نقيس هذه الإشارات ونحللها لاكتشاف خواصها. إذا كانت الإشارة غير معلومة، فإن عملية التحليل تبدأ بعملية اكتساب أو قراءة الإشارات، وقياس وتسجيل الإشارات على مدار فترة معينة من الزمن. من الممكن عمل ذلك باستخدام شرائط التسجيل، أو أي جهاز تسجيل تناظري آخر، ولكن الطريقة الأكثر شيوعاً هذه الأيام هي عن طريق أخذ العينات أو العيننة. (إن لفظة تناظري أو تماثلي نقصد بها الإشارات والأنظمة المستمرة زمنياً). في الفصول السابقة قمنا باستكشاف طرق تحليل الإشارات المستمرة زمنياً والإشارات المتقطعة زمنياً. في هذا الفصل سنفحص العلاقة بينهما.

معظم معالجة وتحليل الإشارات هذه الأيام يتم عمله باستخدام معالجة الإشارات الرقمية digital signal processing, DSP. يمكن لأي نظام DSP أن يقرأ، ويخزن ويقوم بأداء العمليات الحسابية على الأرقام. يمكن استخدام الحاسب العادي كنظام معالجة للإشارات. حيث إن كمية الذاكرة والذاكرة الإضافية لأي معالج للإشارة تكون محدودة، فإنها يمكنها التعامل مع عدد محدود من الأرقام. ولذلك، فإنه إذا كان مطلوباً استخدام DSP لتحليل أي إشارة، فإنه يمكن فقط قراءة هذه العينات، أي العيننة، لمدة محودة من الزمن. السؤال المهم الذي سنتناوله في هذا الفصل "إلى أي مدى تصف هذه العينات بدقة الإشارة التي أخذت منها؟". سنرى في هذا الفصل كيف أنه إذا كان سيكون هناك فقد في المعلومات أم لا، وكمية هذه المعلومات، وكيف أن ذلك يعتمد على الطريقة التي تؤخذ بها العينات. سنرى أنه تحت ظروف معينة، فإنه يمكن عملياً تخزين كل معلومات الإشارة في عدد محدد من العينات العددية.

العديد من عمليات الترشيح التي تم عملها سابقاً باستخدام المرشحات التماثلية تستخدم الآن عمليات الترشيح الرقمي، التي تعمل على العينات المأخوذة من الإشارة، بدلاً من العمل على الإشارة التماثلية الأساسية. أنظمة التليفونات الخلوية الحديثة تستخدم DSP لتحسين جودة الصوت، وفصل القنوات، ونقل المستخدمين بين الخلايا. أنظمة تليفونات المسافات البعيدة تستخدم DSP لكي تستخدم بكفاءة خطوط المسافات الطويلة ووصلات الميكروويف. تستخدم أجهزة التليفزيون DSP لتحسين جودة الصورة. تعتمد رؤية الروبوتات على الإشارات من كاميرات تقوم برقمنة أو أخذ عينات من الصورة وتحليلها بطرق حسابية معينة للتعرف على بعض خواصها. أجهزة التحكم الحديثة والسيارات، وأنظمة التصنيع والتجهيزات العلمية يكون بها في العادة معالجات خبيئة تقوم بتحليل الإشارات وأخذ قرارات بناءً على ذلك باستخدام DSP.

أهداف هذا الفصل

١- تحديد كيفية عينة الإشارات المستمرة زمنياً للحفاظ على معظم وإن لم يكن كل معلومات الإشارة.

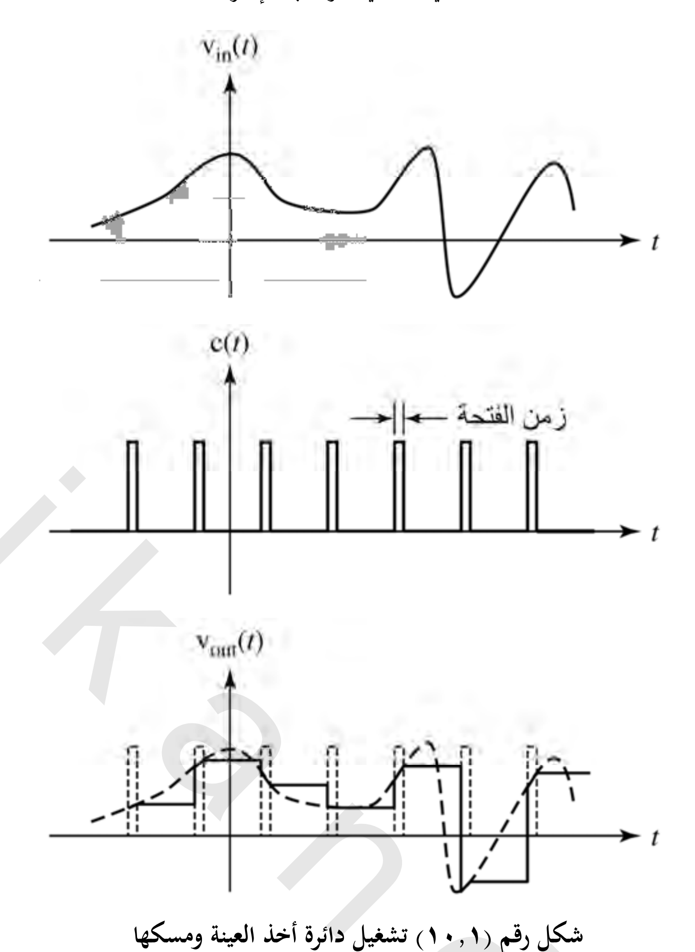
٢- لنتعلم كيفية إعادة تشكيل الإشارات المستمرة زمنياً من عيناتها.

٣- لتطبيق طرق أخذ العينات إلى الإشارات المتقطعة زمنياً لرؤية التشابه مع العينة المستمرة زمنياً.

(١٠,٢) أخذ العينة (العيننة) المستمرة زمنياً

طرق أخذ العينات (العيننة)

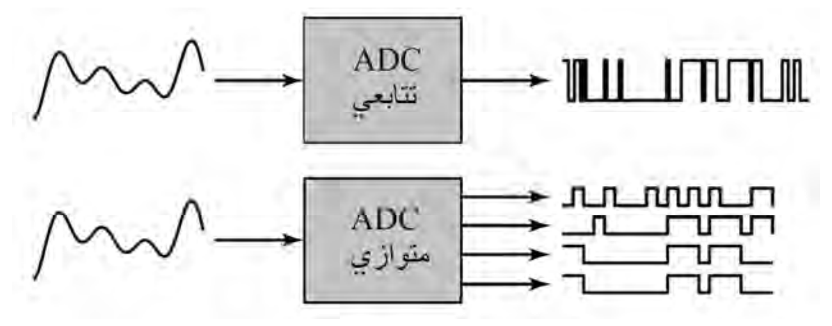
أخذ عينات الإشارات الكهربية، التي أحياناً تكون التيار، ولكن في العادة تكون الجهد، يتم عملها غالباً بخطوتين، أخذ العينة والمسك sample and hold, (S/H) والتحويل من تماثلي إلى رقمي analog to digital converter, ADC. الدخل للـ S/H هو الجهد التماثلي المطلوب تحويله. عند إعطاء نبضة التزامن للـ S/Hفإنها تعطي هذا الجهد على خرجها وتمسك بقيمة هذا الجهد حتى يتم قدحها بنبضة تزامن أخرى لتكتسب قيمة جديدة من الدخل كما في شكل (١٠,١).



شكل رقم (١٠,١) تشغيل دائرة أخذ العينة ومسكها

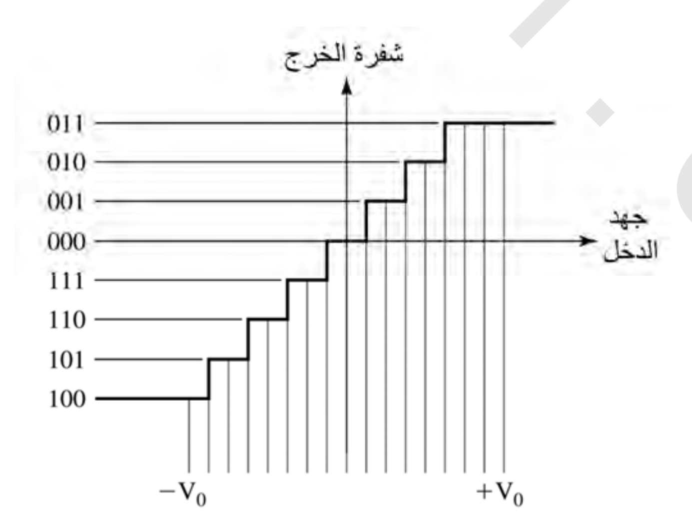
في شكل (١٠,١) الإشارة c(t) هي نبضات التزامن، أو القدح. اكتساب جهد الدخل للـ S/H يحدث أثناء زمن الفتح، وهو عرض نبضة التزامن. أثناء نبضة التزامن، فإن جهد إشارة خرج الـ S/H يتحرك من قيمته عند النبضة السابقة، بحيث تتبع إشارة جهد الدخل. عند نهاية نبضة التزامن يتم مسك إشارة جهد الخرج عند قيمتها المحددة حتى حدوث نبضة التزامن التالية.

يستقبل المحول التماثلي الرقمي ADC الجهد التماثلي عند دخله ويعطي مجموعة من البتات الثنائية (تسمى أحياناً بالكود أو الشفرة). استجابة الـ SDC بهذه البتات من الممكن أن تكون استجابة تتابعية، أو متوازية. إذا كانت استجابة ADC على الصورة التتابعية، فإنها تعطي على طرف خرج واحد إشارة خرج واحدة عبارة عن تتابع زمي من الجهود العالية والمنخفضة تمثل الوحايد والأصفار في مجموعة البتات الثنائية. إذا كانت استجابة أو خرج ADC على الصورة المتوازية، فإنه يكون هناك جهد خرج منفصل لكل بت، وكل بت يظهر في الوقت نفسه على خرج أو طرف من أطراف ADC كجهد مرتفع أو منخفض يمثل الوحايد والأصفار في مجموعة البتات الثنائية، كما في شكل (١٠,٢).



شكل رقم (١٠,٢) التحويل من تماثلي إلى رقمي المتتابع والمتوازي.

الدخل لـ ADC هي إشارة مستمرة زمنياً والاستجابة تكون إشارة متقطعة زمنياً. خرج ADC لا تكون فقط متقطعاً زمنياً ولكنه تكون أيضاً مكمماً ومشفراً. عدد البتات الثنائية الخارجة من ADC يكون محدداً ومعروفاً. ولذلك فإن عدد نماذج، أو قيم الخرج الناتج يكون محدداً وفريداً وعددها يساوي 2^n. عملية التكميم quantization هي عملية تحويل قيم مستمرة من قيم الدخل إلى عدد محدد من القيم. حيث أن الاستجابة يصاحبها خطأ نتيجة هذا التكميم، فإنها تبدو كما لو كان عليها ضوضاء، وهذه الضوضاء تسمى ضوضاء التكميم. إذا كان عدد البتات المستخدمة لتمثيل الخرج كبيراً بما فيه الكفاية، فإن ضوضاء التكميم تكون غالباً مهملة بالنسبة لمصادر الضوضاء الأخرى. بعد التكميم يقوم ADC بتشفير الإشارة. التشفير هو تحويل الجهد التماثلي إلى نموذج من البتات الثنائية. العلاقة بين دخل وخرج ADC ، الذي تكون فيه قيمة الدخل $-V_0<v_{in}(t)<+V_0$ موضحة في شكل(١٠,٣) لمحول ADC خرجه ثلاث بتات. (ADC الذي خرجه يتكون من ٣ بت نادرا ما يستخدم، إن لم يكن مستحيلا، ولكنه يبين تأثير عملية التكميم بطريقة لطيفة، لأن عدد نماذج قيم الخرج يكون صغيراً وتكون قيمة ضوضاء التكميم كبيرة).



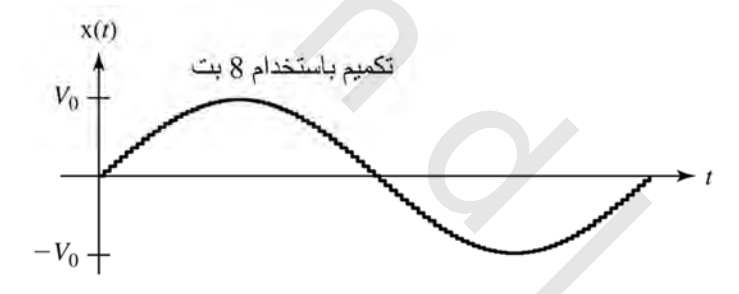
شكل (١٠,٣) العلاقة بين خرج المحول التماثلي الرقمي ADC ودخله

من السهل رؤية تأثير عملية التكميم بالتطبيق على دالة جيبية باستخدام ADC من 3 بت كما في شكل (١٠,٤). عند تكميم إشارة باستخدام 8 بت، فإن خطأ التكميم يكون أصغر كما في شكل (١٠,٥).

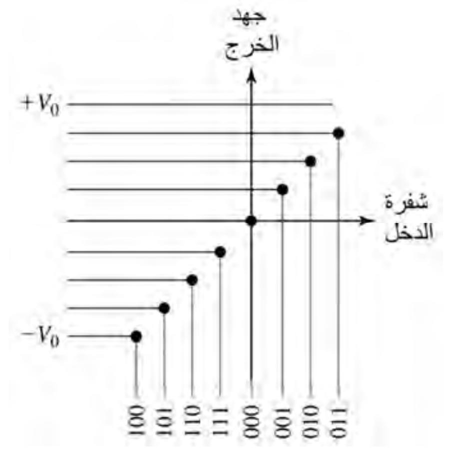
عكس التحويل من تماثلي إلى رقمي هو التحويل من رقمي إلى تماثلي والذي يتم باستخدام المحول الرقمي التماثلي digital to analog converter DAC. الدخل للـ ADC يكون نموذجاً من البتات الثنائية ويكون خرجه عبارة عن جهد تماثلي. حيث إن عدد نماذج البتات الداخلة يكون محدداً، فإن خرج DAC يكون جهداً تماثلياً مكمماً. العلاقة بين دخل وخرج DAC المكون من 3 بت موضح في شكل (١٠,٦).



شكل رقم (١٠,٤) دالة جيبية مكممة باستخدام ٣ بت



شكل رقم (١٠,٥) دالة جيبية مكممة باستخدام ٨ بت



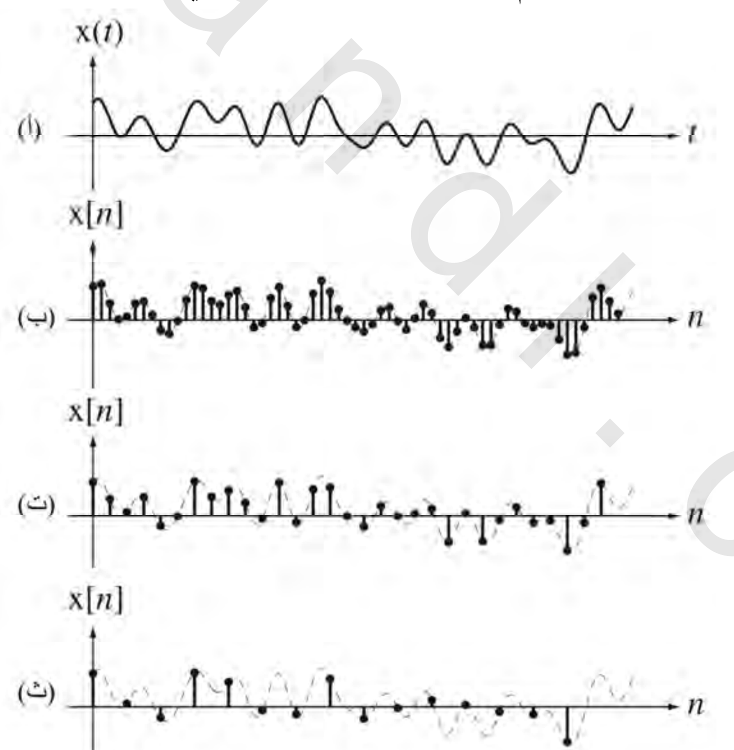
شكل رقم (١٠,٦) العلاقة بين خرج ودخل DAC

في الأجزاء التالية لن نأخذ في الاعتبار تأثير عملية التكميم. نموذج تحليل تأثيرات عملية العيننة سنفترض فيه أن عملية العيننة مثالية بمعنى أن ضوضاء التكميم على إشارة الخرج ستكون صفراً.

نظرية أخذ العينات (العيننة)

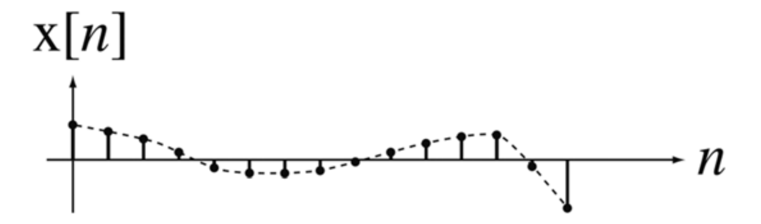
مفاهيم نوعية

إذا أردنا استخدام عينات من إشارة مستمرة زمنياً، بدلاً من استخدام الإشارة نفسها، فإن أهم سؤال يجب الإجابة عنه هو كيف سنأخذ عينات هذه الإشارة بحيث نحافظ على المعلومات المضمنه فيها. إذا كان من الممكن إعادة تشكيل الإشارة من العينات، فإن العينات بالتأكيد تحتوي كل معومات الإشارة. يجب علينا أن نقرر ما هي سرعة أخذ العينات وما مقدار زمن أخذ هذه العينات. افترض الإشارة x(t) الموضحة في شكل (١٠,٧أ). افترض إن الإشارة يتم أخذ عيناتها بالمعدل الموضح في شكل (١٠,٧ب). معظم الناس من المحتمل بديهيا أن يقول أن هناك كفاية من العينات التي تصف الإشارة وصفاً جيداً عن طريق رسم منحنى متواصل بين نقاط العينات، ولكن ماذا عن معدل العيننة الموضح في شكل (١٠,٧ب)؟ هل هذا المعدل مناسب ؟ ماذا عن المعدل الموجود في شكل (١٠,٧ث) ؟ معظم الناس من المحتمل أنهم سيوافقون أن المعدل الموجود في شكل (١٠,٧ث) معدل مناسب ؟



شكل رقم (١٠,٧) (أ) إشارة مستمرة زمنياً (ب) حتى (ث) إشارات مختلفة معاد تشكيلها من عينات بمعدلات مختلفة للإشارة المستمرة زمنياً

إن رسم منحنى مستمر على مجموعة العينات السابقة قد يبدو مشابهاً بدرجة كبيرة مثل المنحنى الأصلي للإشارة. على الرغم من أن معدل العينات لم يكن مناسباً في الإشارة السابقة، فإنه قد يبدو مناسباً لإشارات أخرى كما في شكل (١٠،٨). إنه يبدو مناسباً للإشارة في شكل (١٠،٨) لأنه أكثر نعومة واتصالا والتغيرات فيه أبطأ بكثير.

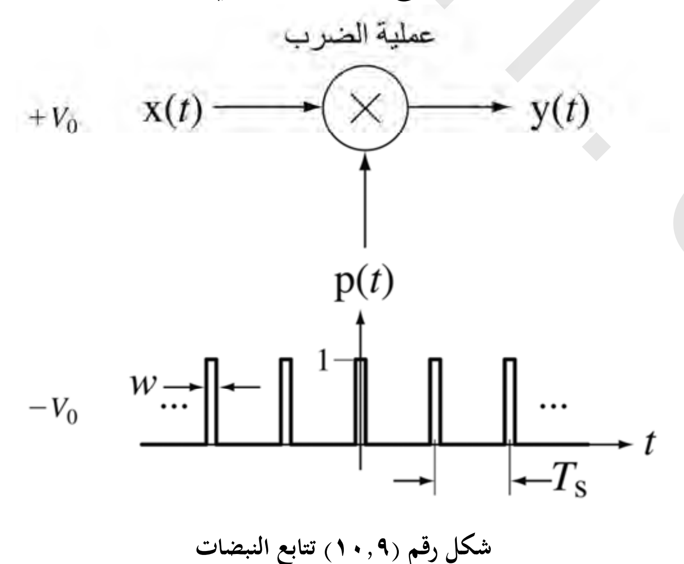


شكل رقم (١٠،٨) إشارة متقطعة زمنياً مشكلة عن طريق أخذ عينات من إشارة مستمرة بطيئة التغير

إن أقل معدل لأخذ العينات مع الحفاظ على المعلومات المضمنة في الإشارة الأصلية يعتمد على معدل تغير الإشارة مع الزمن، والمحتويات الترددية في الإشارة. إن السؤال عن مقدار السرعة التي نأخذ بها العينات لوصف أي إشارة قد تمت الإجابة عليه عن طريق نظرية أخذ العينات، ولقد كان كلاود شانون Claude Shannon من معامل بل Bell Labs مشاركاً أساسياً في إعداد هذه النظرية.

استنتاج نظرية أخذ العينات (العيننة)

سنفترض أن عملية أخذ العينات من إشارة x(t) مستمرة زمنياً ستكون هي ضرب هذه الإشارة بتتابع من النبضات الدورية p(t). سنفترض أن مقدار كل واحدة من هذه النبضات يساوي واحداً، وأن عرض كل نبضة يساوي w وسنفترض أن الدورة الأساسية لهذا التتابع من النبضات هي Ts كما في شكل (١٠،٩).



شكل رقم (١٠،٩) تتابع النبضات

يمكن وصف تتابع النبضات حسابياً بالمعادلة $p(t)=rect(t/w)*\delta_{Ts}(t)$ ، وعلى ذلك فإن خرج عملية الضرب سيكون كما يلي :

$$y(t) = x(t)p(t) = x(t)\left[rect\left(\frac{t}{w}\right) * \delta_{Ts}(t)\right]$$

متوسط الإشارة y(t) على مدار نبضة متمركزة عند t=kTs يمكن اعتبارها تقريباً للعينة x(t) عند الزمن t=kTs. تحويل فورير المستمر زمنياً CTFT للإشارة y(t) هو :

$$Y(f) = X(f) * wsinc(wf)f_s\delta_{f_s}(f)$$

حيث f_s=1/Ts هي معدل تكرار النبضات (التردد الأساسي لتتابع النبضات) وأيضا :

$$Y(f) = X(f) * \left[\mathrm{w}f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\mathrm{w}kf_s)\, \delta(f - kf_s)\right]$$

$$Y(f) = \mathrm{w}f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\,\mathrm{w}kf_{s)\;X\;(f-kf_s)}$$

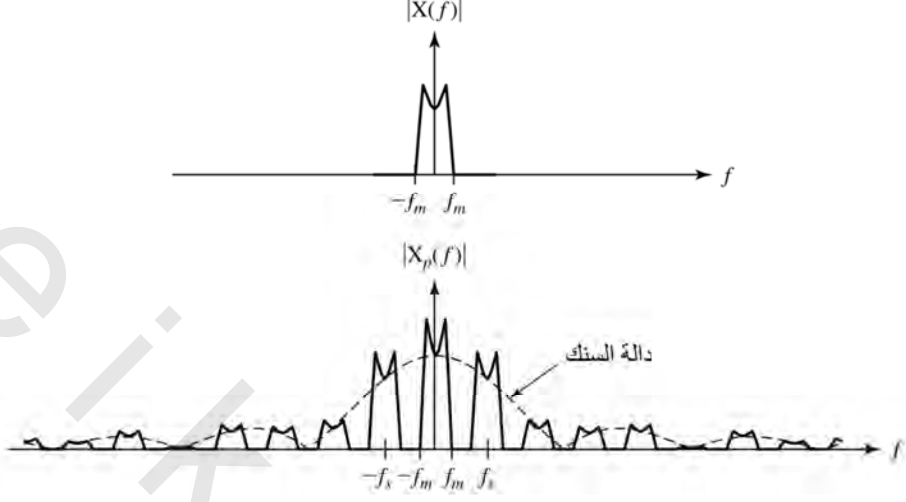
تحويل فورير المستمر زمنياً للخرج Y(f) هو صورة متكررة لتحويل فورير المستمر زمنياً لإشارة الدخل x(t) المتكررة زمنياً عند مضاعفات صحيحة لمعدل تكرار النبضات f_s ومضروب أيضاً في قيمة دالة سنك يتحدد عرضها بعرض النبضة w كما في شكل (١٠،١٠). تحدث صور متكررة لطيف إشارة الدخل العديد من المرات في طيف إشارة الخرج، كل واحدة من هذه الصور تحدث عند مضاعف صحيح من معدل تكرار النبضات ومضروبة في ثوابت مختلفة.

كلما جعلنا عرض النبضة أصغر، فإن القيمة المتوسطة تقترب من القيمة الحقيقية لإشارة الدخل عند مركز النبضة. إن تقريب العينة المثالية يتحسن مع اقتراب w من الصفر. في النهاية مع اقتراب w من الصفر فإن :

$$\mathrm{y}(t) = \lim_{w\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(t)\,rect}\big((\mathrm{t} - \mathrm{nT_S})/\mathrm{W}\big)$$

في النهاية ، فإن طاقة الإشارة ستقترب من الصفر. ولكن إذا عدلنا الآن عملية أخذ العينات لتعويض هذا التأثير عن طريق جعل مساحة كل نبضة من نبضات العينة تساوي واحداً بدلاً من ارتفاع النبضة ، فإننا سنحصل على تتابع النبضات الجديد التالي :

$$p(t) = \left(\frac{1}{w}\right) rect\left(\frac{t}{w}\right) * \delta_{Ts}(t)$$



شكل رقم (١٠,١٠) مقدار CTFT لإشارات الدخل والخرج

والآن يمكن كتابة y(t) كما يلي :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)(1/w)\,\mathrm{rect}\big((t - nT_S)/W\big)$$

سنفترض أن هذا الخرج عند هذه النهاية مع اقتراب w من الصفر هو $x_\delta(t)$. عند هذه النهاية ستكون النبضات المستطيلة $\left(\frac{1}{w}\right) rect\left(\frac{t-nTs}{w}\right)$ ستقترب من صدمات وحدة كما يلي :

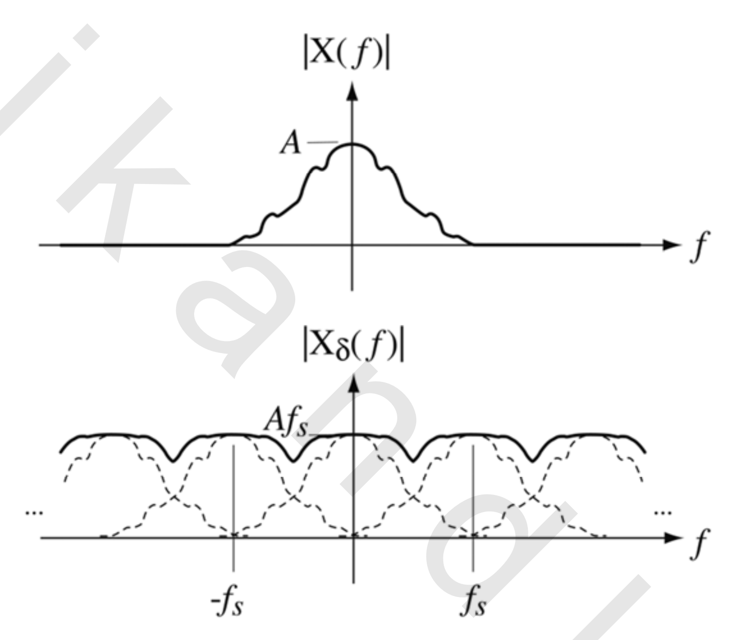
$$x_\delta(t) = \lim_{w\to 0} y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_S) = x(t)\delta_{T_S}(t)$$

هذه العملية تسمى عيننة الصدمة أو أحياناً تسمى تعديل الصدمة. بالطبع ، فإن هذا النوع من العيننة يكون غير ممكنا لأننا لا نستطيع الحصول على دالة الصدمة عملياً. ولكن تحليل هذا النوع من العيننة النظرية يكون مفيداً لأنه يؤدي إلى علاقة بين قيم الإشارة عند نقاط متقطعة وقيم الإشارة عند كل الأزمنة الأخرى. لاحظ أنه في هذا النموذج من العيننة ، فإن خرج دائرة العيننة ما زال إشارة مستمرة زمنياً ، ولكن قيمتها تكون صفراً فيما عدا عند لحظات أخذ العينات.

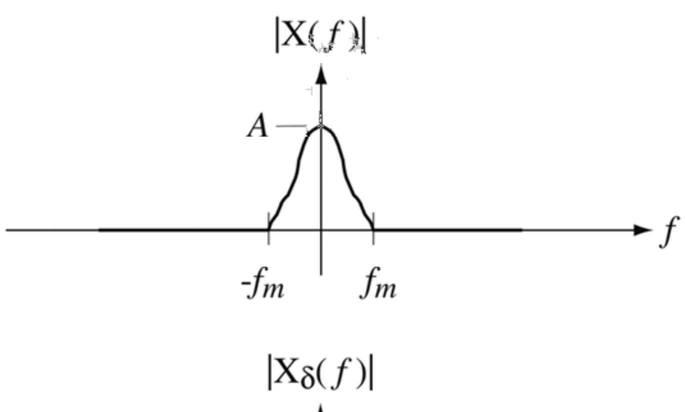
سنحتاج هنا لفحص CTFT للخرج الجديد $x_\delta(t)$ ، والذي يمكن كتابته كما يلي :

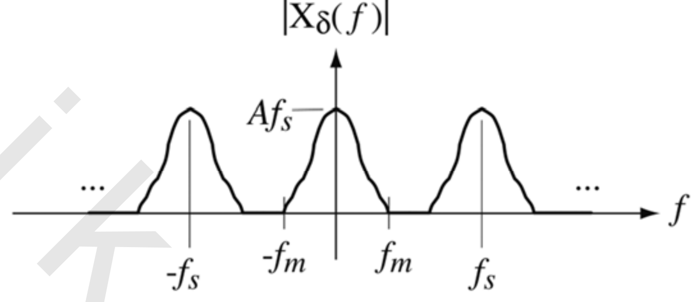
$$x_\delta(f) = X(f) * (1/T_S)\delta_{1/T_S}(f) = f_s X(f) * \delta_{f_S}(f)$$

إن ذلك يمثل مجموع نسخ متساوية الحجم للـ CTFT ، X(f) للإشارة الأصلية x(t) ، وكل واحدة مزاحة بمضاعف صحيح من تردد أخذ العينات ، ومضروبة في f_s كما في شكل (١٠,١١). هذه النسخ تسمى نسخاً مستعارة. في شكل (١٠,١١) تمثل الخطوط المتقطعة أو المشرطة مقدار هذه النسخ المستعارة من CTFT للإشارة الأصلية والخط المستمر يمثل مقدار مجموع هذه النسخ المستعارة. من الواضح أن مقدار CTFT للإشارة الأصلية قد فقد في عملية التداخل بين هذه النسخ. ولكن إذا كانت X(f) تساوى صفراً لكل $|f|>f_m$ وإذا كانت $f_s>2f_m$ ، فإن النسخ المستعارة لن تتداخل كما في شكل (١٠,١٢).



شكل رقم (١٠,١١) CTFT لإشارة أخذت عيناتها بدالة الصدمة





شكل رقم (١٠,١٢) CTFT لإشارة محدودة المجال معيننة باستخدام الصدمات بتردد أكبر

الإشارات التي يكون لها X(f) تساوي صفراً لكل $|f|>f_m$ تسمى إشارات محدودة المجال. إذا كانت النسخ المستعارة لن تتداخل، فإنه على الأقل سيمكن استعادة الإشارة الأصلية من الإشارة المعيننة بالصدمات باستخدام مرشح يتخلص من النسخ المستعارة عند $f\pm f_s$ و $\pm 2f_s$ و $\pm 3f_s$ و .... وذلك باستخدام مرشح منفذ للترددات المنخفضة تكون استجابته الترددية المثالية كما يلي:

$$H(f)=\begin{cases}T_S, & |f|<f_c\\ 0, & otherwise\end{cases}=T_S\, rect\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

هذه الحقيقة تشكل الأساس لما يعرف بنظرية العيننة أو نظرية أخذ العينات.

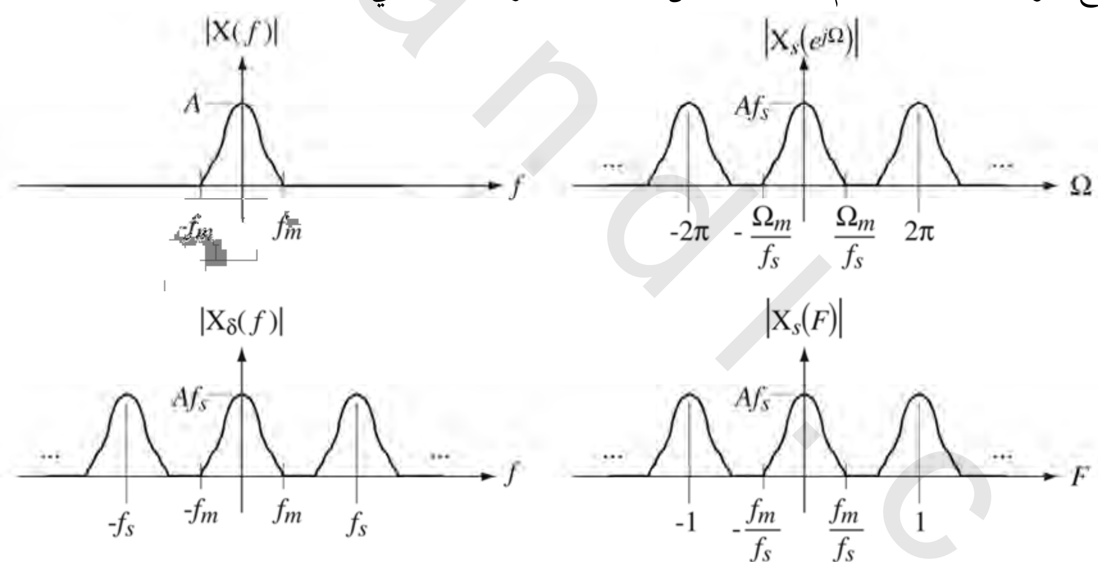
إذا أخذت عينة من أي إشارة مستمرة زمنياً عند كل الأزمنة بمعدل f_s يكون أكبر من ضعف حد مجال الإشارة f_m، فإن الإشارة المستمرة زمنياً يمكن استرجاعها تماماً من هذه العينات.

إذا كان أكبر تردد موجود في الإشارة هو f_m، فإن معدل أخذ العينات (العيننة) يجب أن يكون أكبر من $2f_m$، والتردد $2f_m$ يسمى معدل نيكويست Nyquist rate. إن الكلمات معدل، وتردد، كل منهما تصف شيئاً يحدث دورياً. في هذا الكتاب كلمة تردد نقصد بها الترددات الموجودة في أي إشارة، وكلمة معدل سيقصد بها الطريقة التي يتم أخذ عينات الإشارة بها. الإشارة التي يتم أخذ عيناتها بمعدل أكبر من معدل نيكويست تسمى إشارة فوق معيننة oversampled، والإشارة التي يتم أخذ عيناتها بمعدل أقل من معدل نيكويست تسمى إشارة تحت عيننة

undersampled. عندما يتم أخذ عينات أي إشارة بمعدل يساوي f_s فإن التردد $f_s/2$ يسمى تردد نيكويست. ولذلك، إذا كانت أي إشارة لها طاقة عند أو فوق تردد نيكويست، فإن النسخ المستعارة ستتداخل.

نموذج آخر لعملية أخذ العينات قد استخدمناه في الفصول السابقة وهو توليد الإشارة المتقطعة زمنياً x[n] من الإشارة المستمرة زمنياً x(t) من خلال x[n]=x(nTs) حيث Ts هي الزمن بين عينتين متتابعتين. إن هذا قد يبدو نموذجاً أكثر معقولية، وفي بعض الأحوال هو كذلك، ولكن العينة اللحظية عند نقطة معينة في الزمن تكون مستحيلة عملياً. سنسمي هذا النموذج للعينة بكلمة "عينة" فقط بدلاً من "العينة الصدمية" أو impulse sampling.

تذكر أن DTFT لأي إشارة متقطعة زمنياً يكون دورياً. وكذلك فإن CTFT لأي إشارة معينة صدميا يكون دوريا أيضا. CTFT لأي إشارة مستمرة زمنياً معينة صدميا $x_\delta(t)$ و DTFT لأي إشارة متقطعة زمنياً $x_s[n]$ المشكلة عن طريق أخذ العينات من الإشارة نفسها المستمرة زمنياً تكون متشابهة كما في شكل (١٠,١٣). (الرمز الجانبي s في الإشارة $x_s[n]$ تم وضعه للتخلص من الخلط بين التحويلات المختلفة التي ستأتي). إن الشكل الموجي يكون هو نفسه. الفرق الوحيد هو أن DTFT يعتمد على التردد المعمم F أو Ω وCTFT على التردد الحقيقي f أو ω. يمكن استنتاج نظرية العينة باستخدام DTFT بدلاً من CTFT وستكون النتيجة هي نفسها.

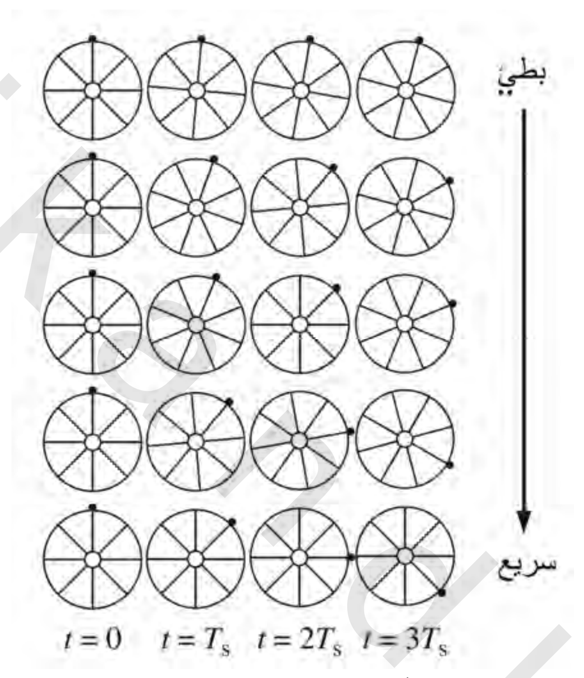


شكل رقم (١٠,١٣) مقارنة بين CTFT لإشارة معينة صدميا و DTFT لعينات إشارة

التزوير Aliasing

إن ظاهرة التزوير (تداخل هذه النسخ) ليست مفهوماً رياضياً غريباً خارج نطاق خبرة الناس العاديين. تقريبا كل واحد قد لاحظ هذه الظاهرة، ولكن من المحتمل بدون أن يعرف ماذا يسمى هذه الظاهرة. إحدى

الممارسات الشهيرة التي توضح ظاهرة النسخ المزيفة أو المستعارة تحدث أحيانا أثناء مشاهدة التليفزيون. افترض أنك تلاحظ أحد الأفلام الغربية على التليفزيون وهناك صورة لحصان يجر عربة عجلاتها بها أسلاك أو قوائم من مركزها إلى المحيط. مع زيادة سرعة العربة أسرع وأسرع ستصل إلى لحظة عندها تظهر العجلة كما لو كانت توقفت عن الدوران للأمام وتبدأ في الظهور كما لو كانت تدور للخلف على الرغم من العربة تتحرك للأمام. إذا تمت زيادة السرعة أكثر من ذلك فإن العجلات ستظهر كما لو أنها توقفت وبعدها تدور للأمام مرة ثانية. إن هذا يعتبر مثالاً جيداً على ظاهرة النسخ المزيفة ، أو المستعارة.



شكل رقم (١٠,١٤) الأوضاع الزاوية لعجلة العربة عند أربع لحظات للعيننة

على الرغم من عدم ظهور ذلك للعين البشرية ، فإن الصورة على شاشة التليفزيون يتم التقاطها 30 مرة في الثانية (في نظام الفيديو القياسي NTSC). بمعنى أن الصورة في الحقيقة يتم أخذ عيناتها بمعدل 30 هرتز. شكل (١٠,١٤) يبين الأوضاع على العجلة ذات الأسلاك القطرية عند ٤ لحظات لأخذ العينة وذلك للعديد من سرعات الدوران ، بدءا من سرعة الدوران المنخفضة عند القمة والتقدم في اتجاه السرعات العالية في الأسفل. (هناك نقطة مؤشر تم إضافتها على العجلة للمساعدة في رؤية الدوران الحقيقي للعجلة ، في مقابل الدوران الظاهري).

العجلة لها ثمانية أسلاك قطرية ، بحيث إنه مع الدوران بمقدار ثمن دورة كاملة فإن العجلة تظهر كما لو في موضعها الأصلي. لذلك فإن صورة العجلة لها دورة زاوية مقدارها $\pi/4$ أو 45^o ، وهي المسافة الزاوية بين الأسلاك. إذا كانت سرعة دوران العجلة هي f_0 دورة/الثانية (Hz) فإن تردد الصورة الأساسي هو $8f_0$Hz. أي أن الصورة تتكرر ثماني مرات تماماً في الدورة الكاملة للعجلة.

لنفترض أن الصورة يتم أخذها بمعدل 30 هرتز (T_s=1/30 s). في الصف الأعلى تدور العجلة في اتجاه عقارب الساعة بسرعة $-5^o/T_s$ ($-150^o/s$ أو $-0.416rev/s$)، لذلك فإنه في الصف الأعلى، فإن الأسلاك دارت بمقدار 0^o و 5^o و 10^oو 15^o في اتجاه عقارب الساعة. لذلك فإن عين ومخ الملاحظ تفسر تتابع الصور بحيث تبدو كما لو كانت العجلة تدور في اتجاه عقارب الساعة نتيجة تقدم الزوايا مع لحظات أخذ العينات. في هذه الحالة، فإن العجلة تظهر كما لو كانت تدور بتردد دوران الصورة وهو $-150^o/s$.

في الصف الثاني تكون سرعة الدوران أربع مرات أسرع من الصف الأول، وزوايا الدوران عند لحظات أخذ العينات صفراً وعشرين وأربعين وستين درجة في اتجاه عقارب الساعة. هنا ما زالت العجلة تظهر تدور في اتجاه عقارب الساعة عند سرعة دورانها الحقيقية $-600^o/s$. في الصف الثالث، أصبحت سرعة الدوران تساوي $-675^o/s$. هنا يبدأ الغموض الظاهر نتيجة أخذ العينات في الظهور. إذا لم تكن النقطة المؤشر موجودة، فإنه قد يكون من غير الممكن تحديد إذا كانت العجلة تدور بمقدار -22.5^o لكل عينة أم $+22.5^o$ لكل عينة، لأن عينات الصورة تتماثل تماماً لهاتين الحالتين. إنه من غير الممكن، عن طريق النظر على عينات الصور، تحديد إذا كان الدوران في اتجاه أم عكس عقارب الساعة. في الصف الرابع تدور العجلة بسرعة مقدارها $-1200^o/s$. الآن (بإهمال النقطة المؤشر) تظهر العجلة كما لو كانت تدور بمقدار $+5^o$ لكل عينة بدلاً من التردد الدوراني الحقيقي -40^o لكل عينة. استقبال المخ البشري سيظهر كما لو كانت العجلة تدور 5^o عكس عقارب الساعة لكل عينة بدلاً من 40^o في اتجاه عقارب الساعة. في الصف الأسفل تكون سرعة الدوران $-1350^0/s$ أو 45^o لكل عينة في اتجاه عقارب الساعة. الآن تظهر العجلة كما لو كانت ثابتة على الرغم من أنها تدور في اتجاه عقارب الساعة. سرعة دورانها الزاوية تبدو كما لو كانت صفراً؛ لأنها يتم أخذ عيناتها بمعدل يساوي تماماً لتردد الصورة الأساسي.

مثال ١٠,١

حساب معدلات نيكويست للإشارات

احسب معدل نيكويست لكل واحدة من الإشارات التالية:

(أ) $x(t)=25\cos(500\pi t)$

$X(f)=12.5[\delta(f-250)+\delta(f+250)]$

أكبر تردد (وهو التردد الوحيد) موجود في هذه الإشارة هو f_m=250Hz. وبالتالي فإن معدل نيكويست سيكون 500Hz.

(ب) $x(t)=15\,\text{rect}(t/2)$

$X(f)=30\,\text{sinc}(2f)$

حيث إن الدالة سنك لا تؤول إلى الصفر أبداً وتظل موجودة دائماً، وبتردد محدد، فإن أعلى تردد في الإشارة سيكون غير محدد أو غير معروف وبالتالي فإن معدل نيكويست سيكون غير معروف. الدالة المستطيلة ليست محدودة النطاق الترددي.

ج) x(t)=10sinc(5t)
X(f)=2rect(f/5)

أكبر تردد موجود في x(t) هو قيمة fالتي تكون عندها الدالة rect لها القيمة غير المتصلة عند العبور من الواحد للصفر f_m=2.5Hz. وبالتالي فإن معدل نيكويست سيكون 5Hz.

د) x(t)=2sinc(5000t)sin(500000πt)

$$X(f) = \frac{1}{2500} rect\left(\frac{f}{500}\right) * \frac{j}{2}[\delta(f + 250{,}000) - \delta(f - 250{,}000)]$$

$$X(f) = \frac{j}{5000}\left[rect\left(\frac{f + 250{,}000}{5000}\right) - rect\left(\frac{f - 250{,}000}{5000}\right)\right]$$

أكبر تردد في x(t) هو f_m=252.5kHz، وبالتالي فإن معدل نيكويست سيكون 505kHz.

مثال ١٠,٢

تحليل مرشح RC كمرشح مضاد للنسخ المزيفة أو المستعارة

افترض أن إحدى الإشارات المطلوب قراءتها من خلال نظام لاكتساب، أو قراءة البيانات لها مقدار طيفي مسطح حتى 100kHz ثم ينزل هناك إلى الصفر. افترض أيضاً أن أسرع معدل يمكن أن يقرأ به هذا النظام لهذه البيانات هو 60kHz. صمم مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة ومضاد للنسخ المستعارة بحيث يقلل مقدار طيف الإشارة إلى 30kHz إلى أقل من 1% من قيمتها عند الترددات المنخفضة جداً بحيث يتم تقليل النسخ المستعارة إلى أقل ما يمكن.

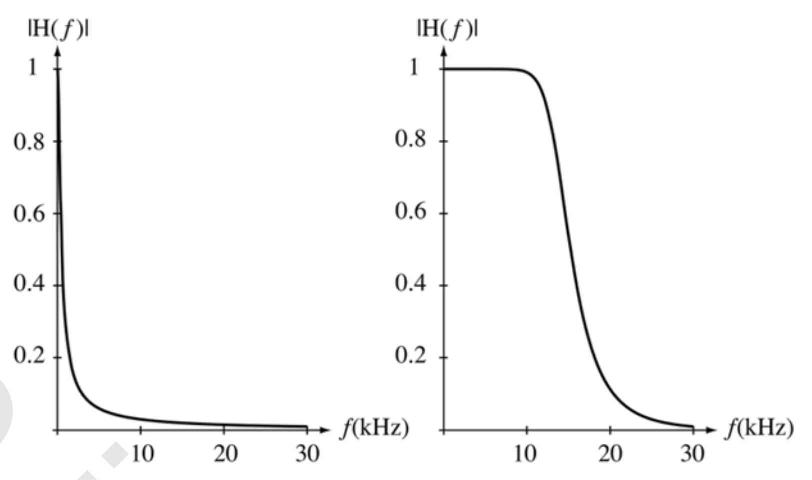
$$H(f) = \frac{1}{j2\pi fRC+1}$$

مقدار مربع الاستجابة الترددية للمرشح يساوي:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{(2\pi fRC)^2+1}$$

وقيمتها عند الترددات المنخفضة جداً تقترب من الواحد. سنضع الثابت الزمني RC بحيث يكون مربع المقدار عند 30kHz يساوي $().01)^2$ كما يلي:

$$|H(30{,}000)|^2 = \frac{1}{(2\pi\times 30{,}000\times RC)^2+1} = (0.01)^2$$



شكل رقم (١٠,١٥) (أ) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة والمضاد للنسخ المستعارة

(ب) مقدار الاستجابة الترددية لمرشح بتروورث منفذ للترددات المنخفض ومضاد للنسخ المستعارة من الدرجة السادسة

بحل هذه المعادلة سنجد أن RC=0.5305. التردد الركني (التردد عند 3dB-) للمرشح RC هو 300Hz ، وهي 100 مرة أقل من تردد نيكويست الذي يساوي 30kHz كما في شكل (١٠,١٥). يجب وضع هذا التردد منخفضاً بهذه القيمة لتحقيق المتطلبات باستخدام مرشح بقطب واحد ؛ لأن استجابته الترددية تنزلق ببطء كبير. لهذا السبب فإن معظم المرشحات المضادة للنسخ المستعار يتم تصميمها بدرجات أعلى حتى يكون لها معدل سريع في الانتقال من مجال المرور إلى مجال الوقف أو الكبح. شكل (١٠,١٥ب) يوضح الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة من الدرجة السادسة ومن النوع بتروورث. (المرشحات بتروورث سيتم تغطيتها في الفصل ١٥). الدرجات الأعلى من المرشح ستحافظ على الإشارة أكثر من المرشح RC.

الإشارات المحدودة الزمن والإشارات المحدودة النطاق

تذكر أن العبارة الحسابية الأصلية لطريقة أخذ العينات من إشارة كانت $x_s[n]=x(nT_s)$. هذه المعادلة محققة لأي قيمة صحيحة للـ n وهذا يعني أن الإشارة x(t) يتم أخذ عيناتها عند كل الأزمنة. لذلك فإننا سنحتاج لعدد لا نهائي من العينات لوصف الدالة x(t) تماما من المعلومات الموجودة في $x_s[n]$. نظرية أخذ العينات مبنية أو معتمدة على هذه الطريقة. وعلى ذلك ، فبالرغم من معرفة معدل نيكويست ، والذي قد يكون محدداً ، فإنه قد نحتاج (وهذا بصفة عامة) أن نأخذ عدداً لا نهائياً من العينات لإعادة التشكيل التامة للإشارة الأصلية من عيناتها ، حتى ولو كانت هذه الإشارة محدودة النطاق وستكون العيننة فوق حدية.

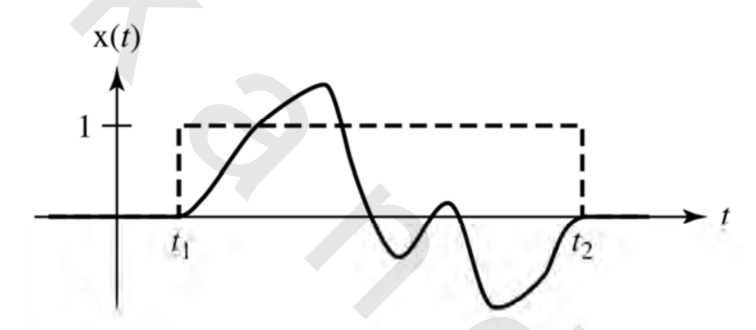
إنه من الجائز أن نعتقد أنه إذا كانت الإشارة محدودة زمنياً (لها قيم لا تساوي الصفر على مدى زمني محدود)، فإنه يمكن أخذ العينات في هذه الفترة الزمنية فقط ، مع معرفة أن كل العينات الأخرى تكون صفراً ، مع

كون كل المعلومات في الإشارة. المشكلة مع هذه الفكرة هي أنه لا توجد إشارة محدودة زمنياً وتكون في الوقت نفسه محدودة المجال، ولذلك لن يوجد معدل عينتة معروف أو مناسب.

إن حقيقة أن أي إشارة لن تكون في الوقت نفسه محدودة الزمن ومحدودة المجال، تعتبر قانوناً أساسياً في تحليل فورير. يمكن التحقق من هذا القانون عن طريق العرض التالي. افترض أن أي إشارة x(t) لها قيم تساوي الصفر خارج المدى التالي $t_1<t<t_2$. افترض أن CTFT هو X(f). إذا كانت x(t) محدودة زمنياً بالمدى الزمني $t_1<t<t_2$، فإنه يمكن ضربها في دالة مستطيلة يكون جزأها الذي لا يساوي الصفر يغطي نفس المدى الزمني بدون تغيير الإشارة. بمعنى:

$$x(t) = x(t)rect\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)$$ المعادلة رقم (١٠,١)

حيث $t_0=(t_1+t_2)/2$ و $\Delta t=t_1+t_2$ كما في شكل (١٠,١٦).



شكل رقم (١٠,١٦) دالة محدودة زمنياً ومستطيل محدود بالحد الزمني نفسه للإشارة

بإيجاد CTFT لكل من الطرفين في المعادلة (١٠,١) نحصل على ما يلي:

$$X(f) = X(f) * \Delta t\ sinc(\Delta t f)e^{-j2\pi f t_0}$$

هذه المعادلة الأخيرة تقول إن X(f) نفسها لن تتأثر نتيجة التفافها مع الدالة سنك. حيث إن sinc(Δtf) لها امتداد لا نهائي لا يساوي الصفر في التردد f، فإنه إذا تم التفافها مع X(f) التي لها امتداد محدود لا يساوي الصفر في التردد f، فإن نتيجة التفاف الدالتين سيكون لها امتداد لا نهائي لا يساوي الصفر في التردد f. ولذلك فإن المعادلة الأخيرة لا يمكن تحقيقها بأي X(f) يكون لها امتداد محدود من القيم التي لا تساوي الصفر في التردد f، مما يثبت أنه إذا كانت هناك أي إشارة محدودة الزمن، فإنه لا يمكن أن تكون محدودة المجال أيضاً. العكس من ذلك وهو أن أي إشارة تكون محدودة المجال لا يمكن أن تكون محدودة الزمن أيضا، يمكن إثباتها بطريقة مشابهة.

أي إشارة يمكن أن تكون في الوقت نفسه غير محدودة في كل من الزمن والتردد، ولكنها لا يمكن أن تكون في الوقت نفسه محدودة في كل من الزمن والتردد.

الاستيفاء interpolation

الاستيفاء المثالي

الوصف السابق عن كيفية استعادة الإشارة الأصلية قد أوضح أنه يمكننا ترشيح الإشارة المعينة صدمياً للتخلص من كل النسخ المستعارة فيما عدا النسخة المتمركزة عند التردد الصفري. إذا كان هذا المرشح هو مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة له معامل تكبير ثابت $Ts=1/f_s$في مجال المرور وعرض مجاله هو f_c حيث $f_m<f_c<f_s-f_m$ ، فإن هذه العملية يمكن وصفها في المجال الترددي كما يلي :

$$X(f) = T_S rect(f/2f_c) \times X_\delta(f) = T_S rect(f/2f_c) \times f_s X(f) * \delta_{f_s}(f)$$

إذا أجرينا التحويل العكسي لهذه المعادلة نحصل على :

$$X(t) = \underbrace{T_s f_s}_{=1} 2f_c \,\mathrm{sinc}(2f_c t) * \underbrace{\mathrm{X(t)}(1/f_s)\delta\, T_s(t)}_{=(1/f_s)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)\delta(t-nT_S)}}$$

$$X(t) = 2(f_c/f_s)\mathrm{sinc}(2f_c \mathrm{t}) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)\delta(t-nT_S)}$$

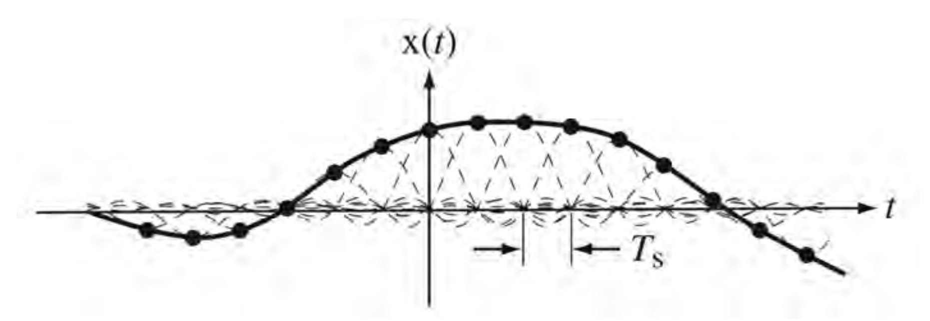
$$X(t) = 2(f_c/f_s)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)sinc}\big(2f_c(\mathrm{t-nT_S})\big)$$ المعادلة رقم (١٠،٢)

بتتبع هذه الفكرة غير العملية، وهي العينة الصدمية، فقد وصلنا لنتيجة تسمح لنا بملء قيم الإشارة عند كل الأزمنة، بمعلومية قيم هذه الإشارة عند نقاط متساوية التباعد زمنياً. لا يوجد هناك صدمات في المعادلة (١٠،٢)، فقط هناك قيم العينات، وهي قيم شدة الصدمات التي قد تم توليدها عن طريق العينة الصدمية. عملية ملء القيم الغائبة بين العينات هي ما يسمى بالاستيفاء أو interpolation.

افترض الحالة الخاصة $f_c=f_s/2$. في هذه الحالة، فإن عملية الاستيفاء يمكن وصفها بالمعادلة المبسطة التالية :

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)sinc((t-nT_S)/T_s)}$$

الآن يتكون الاستيفاء ببساطة من ضرب كل دالة سنك في قيمة العينة المقابلة لها وجمع كل دوال السنك المحجمة والمزاحة كما هو موضح في شكل (١٠،١٧).



شكل رقم (١٠,١٧) عملية الاستيفاء لمرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة تردده الركني يساوي نصف معدل أخذ العينات

بالرجوع لشكل (١٠.١٧)، نلاحظ أن قمة كل دالة سنك عند زمن كل عينة وتكون بصفرٍ عند نقاط كل العينات الأخرى. وبالتالي فإن الاستيفاء يكون صحيحاً عند نقاط العينات. الاستنتاج السابق يبين أنه صحيحاً أيضاً عند كل النقاط بين العينات.

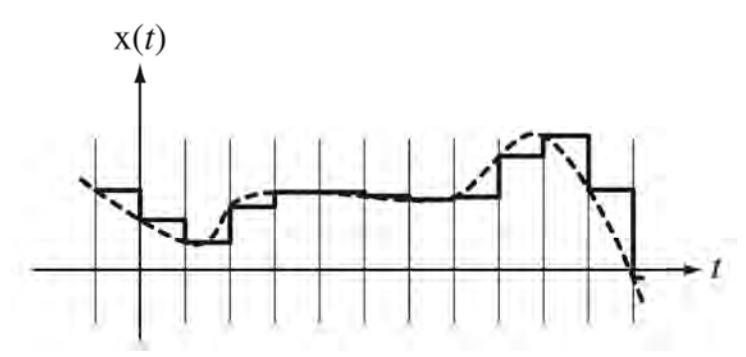
الاستيفاء العملي

طريقة الاستيفاء في الجزء السابق تعيد تشكيل الإشارة تماماً ولكنها تعتمد على فرض لا يمكن تحقيقه عملياً، وهو وجود عدد لا نهائي من العينات. القيمة الاستيفائية عند أي نقطة هي مجموع المشاركات من عدد لا نهائي من دوال السنك المحجمة، وكل منها تمتد إلى الما لانهاية في الزمن. ولكن نتيجة لظروف عملية، فإننا لا يمكننا قراءة عدد لا نهائي من العينات ولا يمكننا معالجتها، فإنه يجب علينا تقريباً أن نشكل الإشارة باستخدام عدد محدود من العينات، وهناك العديد من الطرق التي يمكن استخدامها لذلك. اختيار إحدى هذه الطرق لاستخدامها في عملية الاستيفاء في أي حالة يعتمد على دقة التشكيل المطلوبة وعلى مقدار العيننة الزائدة للإشارة.

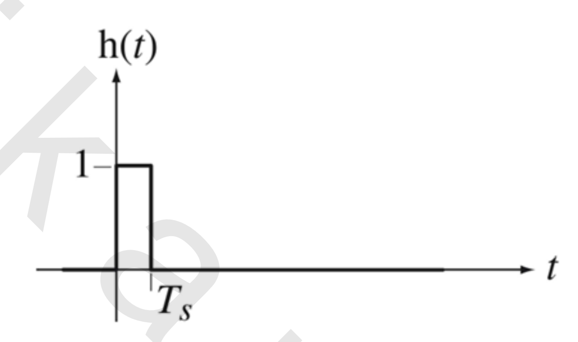
الإمساك من الدرجة الصفرية

ربما تكون أبسط فكرة للتشكيل التقريبي للإشارة هي أن نجعل القيمة المشكلة للإشارة هي قيمة آخر عينة كما في شكل (١٠.١٨). إن هذه طريقة بسيطة؛ لأن العينات وهي في صورة كود أو شفرة يمكنها أن تكون الدخل للمحول الرقمي التماثلي DAC الذي يمكن قدحة ليعطي إشارة خرج جديدة مع كل نبضة تزامن. الإشارة الناتجة بهذه الطريقة تأخذ شكل درجات السلم التي تتبع الإشارة الأصلية. هذه الطريقة لتشكيل الإشارة يمكن نمذجتها عن طريق العيننة الصدمية للإشارة، ثم نجعل الإشارة المعيننة صدمياً تكون دخلاً لنظام يسمى نظام المسك من الدرجة صفر الذي تكون استجابته الصدمية كما يلي وكما في شكل (١٠.١٩):

$$h(t) = \begin{Bmatrix} 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & otherwise \end{Bmatrix} = rect\left(\frac{1 - T_s/2}{T_s}\right)$$



شكل رقم (١٠,١٨) نظام المسك من الدرجة الأولى.

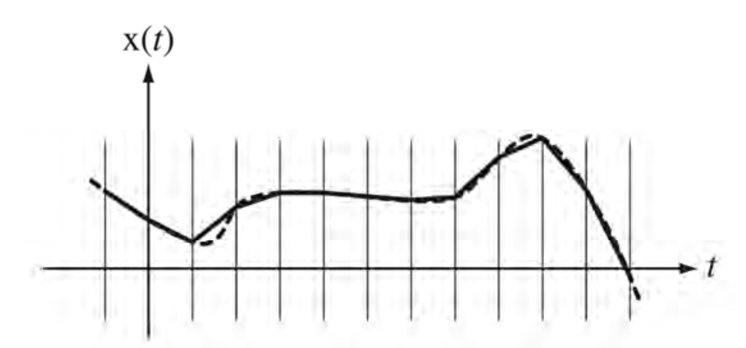


شكل رقم (١٠,١٩) الاستجابة الصدمية لنظام المسك من الدرجة الأولى.

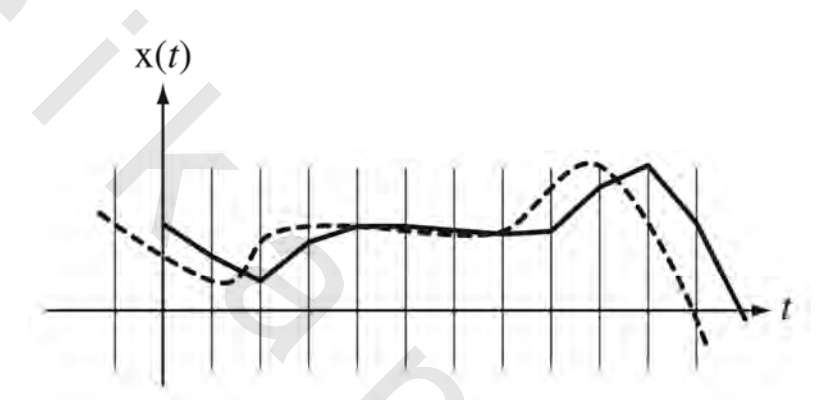
أحد الطرق الشائعة لتقليل تأثير النسخ المستعار هي اتباع الإمساك من الدرجة صفر بمرشح عملي منفذ للترددات المنخفضة الذي يقوم بتنعيم هذه الدرجات نتيجة الإمساك من الدرجة صفر. إن وجود الماسك من الدرجة صفر بالتأكيد سيسبب تأخيراً بالنسبة للإشارة الأصلية؛ لأنه يكون سببياً كما أن المرشح العملي المنفذ للترددات المنخفضة سيضيف تأخيراً أكثر.

الإمساك من الدرجة الأولى

فكرة طبيعية أخرى هي الاستيفاء بين العينات باستخدام خطوطاً مستقيمة، كما في شكل رقم (١٠,٢٠). إن ذلك بالتأكيد سيعطي تقريباً أفضل للإشارة الأصلية، ولكنه أصعب قليلاً في التفيذ. كما هو واضح في شكل رقم (١٠,٢٠)، فإن قيمة الإشارة المستوفاة أو المشكلة عند أي لحظة تعتمد على قيمة العينة السابقة وقيمة العينة التالية. إن ذلك لا يمكن تحقيقه في الزمن الحقيقي؛ لأن قيمة العينة التالية تكون غير معروفة في الزمن الحقيقي. ولكن إذا كان مسموحاً بتأخير الإشارة المشكلة بمقدار زمن عينة واحدة Ts، فإنه يمكننا تنفيذ هذه العملية في الزمن الحقيقي. الإشارة المشكَّلة بهذه الطريقة ستظهر كما في شكل رقم (١٠,٢١).



شكل رقم (١٠,٢٠) إشارة أعيد تشكيلها باستخدام استيفاء الخطوط المستقيمة.

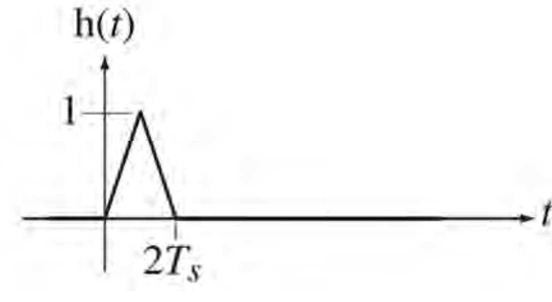


شكل رقم (١٠,٢١) إشارة مُشكَّلة باستيفاء الخطوط المستقيمة ومؤخرة بزمن عينة واحدة.

هذه الطريقة للاستيفاء يمكن تنفيذها عن طريق استخدام ماسك من الدرجة صفر والذي نتبعه بماسك من آخر مثله تماما من الدرجة صفر. إن ذلك يعني أن الاستجابة الصدمية لهذا النظام الاستيفائي هو التفاف استجابة الصدمة لماسك صفري مع نفسه كما يلي وكما في شكل (١٠,٢٢):

$$h(t) = rect\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right) * rect\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right) = tri\left(\frac{t - T_s}{T_s}\right)$$

هذا النوع من الاستيفاء يسمى المسك من الدرجة الأولى.



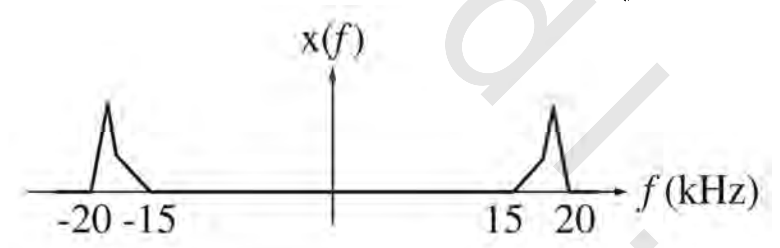
شكل رقم (١٠,٢٢) استجابة الصدمة للماسك من الدرجة الأولى.

واحد من الأمثلة الشهيرة على استخدام العينة وإعادة تشكيل الإشارة هو إعادة تشغيل الاسطوانة المدمجة الصوتية CD. تحتفظ CD بعينات من الإشارة الموسيقية التي تم اكتسابها بمعدل 44.1kHz. نصف هذا المعدل هو التردد 22.05kHz. الاستجابة الترددية لأذن بشرية صحيحة لشخص صغير تمتد في العادة من 20Hz حتى حوالي 20kHz مع بعض التغيرات في هذا المدى. لذلك فإن معدل أخذ العينات يكون أكبر قليلاً من ضعف أكبر تردد تستطيع الأذن البشرية أن تسمعه أو تكتشفه.

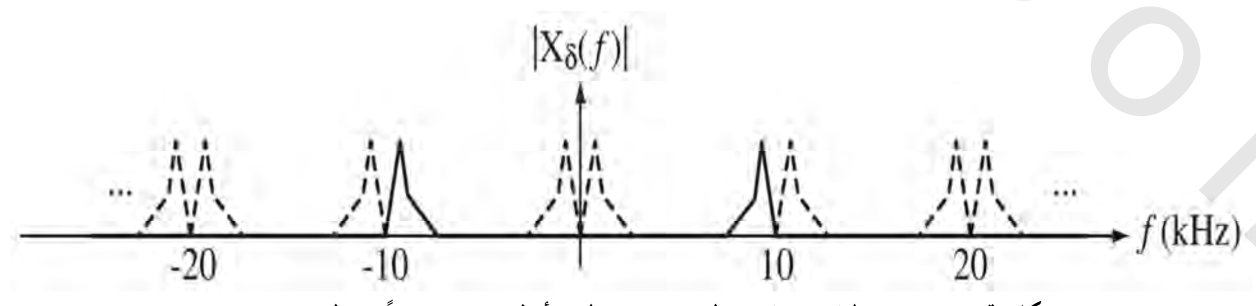
أخذ عينات (عيننة) إشارات لها مجال مرور

إن نظرية أخذ العينات، كما تم ذكرها مسبقا، كانت تعتمد على فكرة بسيطة. إذا تم أخذ العينات بسرعة عالية بما فيه الكفاية، فإن النسخ المستعارة لن تتداخل وفي هذه الحالة يمكن إعادة تشكيل الإشارة الأصلية باستخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة. ولقد وجد أنه إذا تم أخذ العينات بمعدل أسرع من ضعف أكبر تردد في الإشارة، فإنه يمكن استرجاع الإشارة الأصلية من هذه العينات. وهذا حقيقي لكل الإشارات، ولكن لبعض الإشارات يمكن تقليل المعدل الأدنى لأخذ العينات.

عند وضع الفرض بأنه يجب أخذ العينات بمعدل أكبر من ضعف أكبر تردد في الإشارة، كنا نفترض ضمنياً أنه إذا أخذنا العينات بأي معدل أقل من ذلك، فإن تلك النسخ المستعارة ستتداخل، ولكن ذلك ليس حقيقياً مع كل الإشارات. فمثلاً، افترض إشارة مستمرة زمنياً لها طيف لمجال تمرير متوسط لا يساوي الصفر فقط في المدى الترددي $15kHz<|f|<20kHz$. وبالتالي فإن عرض مجال هذه الإشارة هو 5kHz كما في شكل (١٠,٢٣).

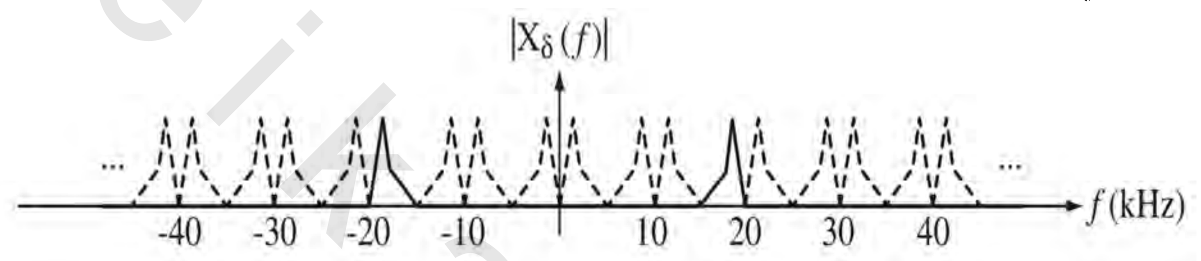


شكل رقم (١٠,٢٣) طيف إشارة بمجال تمرير متوسط ضيق.



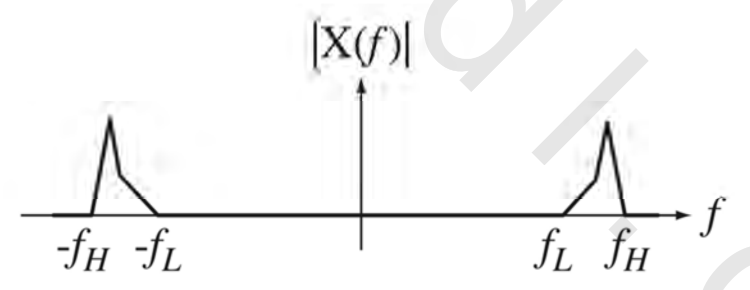
شكل رقم (١٠,٢٤) طيف إشارة بمجال تمرير متوسط تم أخذ عيناتها صدمياً بمعدل 20kHz.

إذا قمنا بأخذ عينات هذه الإشارة بمعدل 20kHz ربما سنحصل على نسخ مستعارة كالموضحة في شكل (١٠,٢٤). مثل هذه النسخ المستعارة لا تتداخل. ولذلك فإنه من الممكن بمعرفة طيف الإشارة الأصلية والمرشح المناسب، أن نستعيد الإشارة من هذه العينات. إنه حتى يمكننا أن نأخذ العينات بمعدل 10kHz ، وهو نصف أكبر تردد في الإشارة، و النسخ المستعار سيكون كما في شكل (١٠,٢٥)، وسيكون من الممكن استعادة الإشارة الأصلية (نظريا) باستخدام المرشح نفسه. ولكن إذا أخذنا العينات بأي معدل أقل من ذلك فإن النسخ المستعارة ستتداخل بالتأكيد وسيكون من الصعب استرداد الإشارة الأصلية. لاحظ أن هذا المعدل لأخذ العينات ليس أعلى من ضعف أكبر تردد في الإشارة، ولكنه ضعف عرض مجال الإشارة.



شكل رقم (١٠,٢٥) طيف إشارة ذات مجال مرور متوسط معيننة بمعدل 10kHz

في هذا المثال كانت النسبة بين أكبر تردد وعرض المجال للإشارة رقماً صحيحاً. عندما تكون هذه النسبة ليست رقما صحيحا تصبح المسألة أكثر صعوبة لإيجاد أقل معدل. ولأخذ العينات يتجنب النسخ المستعار، كما في شكل (١٠,٢٦).



شكل رقم (١٠,٢٦) مقدار الطيف لإشارة تمرير مجال متوسط عامة

يحدث النسخ المستعار عند إزاحات المضاعفات الصحيحة لمعدل أخذ العينات. افترض أن الرقم الصحيح k يشير إلى النسخ المستعارة. وبالتالي فإن النسخة المستعارة رقم (k-1) يجب أن تقع كلها تحت f_L ويجب أن تقع النسخة رقم k كلها فوق f_H، وذلك يعني:

$$(k-1)f_s + (-f_L) < f_L \Rightarrow (k-1)f_s < 2f_L$$

وأيضا:

$$kf_s + (-f_H) > f_H \Rightarrow kf_s > 2f_H$$

بإعادة ترتيب هذين التعبيرين نحصل على :

$$(k-1)f_s < 2(f_H - B)$$

حيث B هي عرض المجال f_H-f_L ويمكننا كتابة :

$$\frac{1}{f_s} < \frac{k}{2f_H}$$

الآن بوضع حاصل ضرب الجوانب اليسرى لهذه التعبيرات التي هي أقل من حاصل ضرب الجوانب اليمنى فإننا نحصل على :

$$k-1 < (f_H - B)\frac{k}{f_H} \Rightarrow k < \frac{f_H}{B}$$

وحيث إن k يجب أن تكون صحيحة ، فإن ذلك يعني أن الحد الحقيقي على k هو :

$$k_{max} = \left\lfloor \frac{f_H}{B} \right\rfloor$$

وهو أكبر رقم صحيح في f_H/B. وبالتالي فإن الشرطين التاليين :

$$k_{max} = \left\lfloor \frac{f_H}{B} \right\rfloor \text{ و } k_{max} > \frac{2f_H}{f_{s,min}}$$

أو الشرط الوحيد التالي :

$$f_{s,min} > \frac{2f_H}{\lfloor f_H/B \rfloor}$$

يحددان أقل معدل لأخذ العينات الذي لن يحدث عنده نسخ مستعار.

مثال ١٠,٣

أقل معدل لأخذ العينات لتجنب النسخ المستعار

افترض إشارة ليس لها مكونات طيفية لا تساوي الصفر خارج النطاق 34kHz<|f|<47kHz. ما هو أقل معدل لأخذ العينات يتجنب النسخ المستعار ؟

$$f_{s,min} > \frac{2f_H}{\lfloor f_H/B \rfloor} = \frac{94 \text{ kHz}}{\lfloor 47 \text{ kHz}/13 \text{ kHz} \rfloor} = 31.333 \text{ kHz}$$

مثال ١٠,٤

أقل معدل لأخذ العينات لتجنب النسخ المستعار

افترض إشارة ليس لها مكونات لا تساوي الصفر خارج المدى 0<|f|<580kHz. ما هو أقل معدل أخذ للعينات يتجنب النسخ المستعار.

$$f_{s,min} > \frac{2f_H}{\lfloor f_H/B \rfloor} = \frac{1160 \text{ kHz}}{\lfloor 580 \text{ kHz}/580 \text{ kHz} \rfloor} = 1160 \text{ kHz}$$

وهذه إشارة مرور متوسط وأقل معدل لأخذ العينات يساوي ضعف أكبر تردد كما تم تحديده في نظرية العيننة.

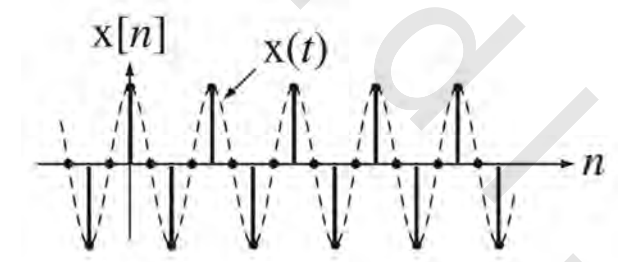
في معظم حالات التصميم الهندسية الحقيقية، يكون اختيار معدل العينات أكثر من ضعف أكبر تردد في الإشارة هو الحل العملي. كما سنرى بعد قليل، يكون هذا المعدل أكبر بدرجة معقولة من معدل نيكويست من أجل تبسيط بعض عمليات معالجة الإشارة الأخرى.

أخذ عينات الدالة الجيبية

الفكرة الكلية وراء تحليل فورير هي أن أي إشارة يمكن تحليلها إلى مجموعة من الدوال الجيبية (الحقيقية أو المركبة). لذلك، دعنا نستكشف عملية العيننة عن طريق النظر إلى بعض الدوال الجيبية الحقيقية المعيننة فوق أو تحت أو عند معدل نيكويست. في كل مثال يكون هناك عينة تحدث عند الزمن t=0. إن ذلك سيضع علاقة طورية بين الإشارة الحقيقية الموصوفة حسابيا وطريقة أخذ عيناتها. (إن ذلك يكون اختيارياً، ولكن في العادة يجب أن يكون هناك زمن لأخذ العينات يمثل زمن مرجعي، وعندما نحصل على العينات في زمن محدد، ستكون أول عينة في العادة عند الزمن t=0 إلا إذا تم ذكر ما يخالف ذلك. أيضا في الاستخدام العادي لـ DFT في المعالجة الرقمية للإشارات، فإن أول عينة نفترض في العادة أنها تحدث عند الزمن t=0).

الحالة ١

دالة جيب تمام cosine معيننة بمعدل أربع مرات ترددها أو عند ضعف معدل نيكويست كما في شكل رقم (١٠,٢٧).

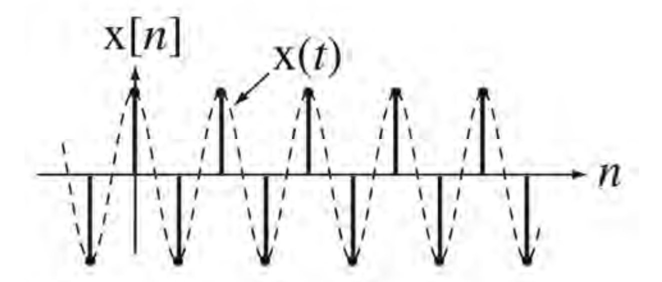


الشكل رقم (١٠,٢٧) دالة جيب تمام معيننة عند ضعف معدل نيكويست الخاص بها.

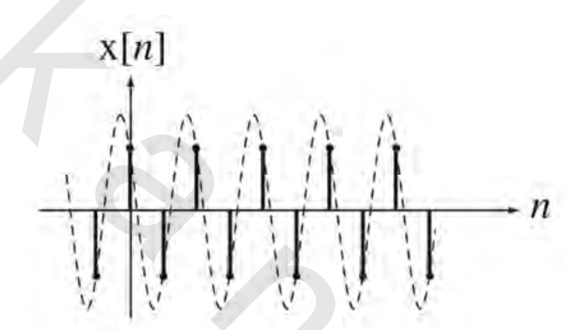
من الواضح هنا أنه بمعرفة قيم العينات وبمعرفة أن الإشارة معيننة بدرجة سريعة بما فيه الكفاية، فإن ذلك يكون كافياً للوصف الكامل للدالة الجيبية بصورة وحيدة أو فريدة. لا يوجد هناك أي دالة جيبية أخرى بهذا التردد، أو بأي تردد آخر تحت معدل نيكويست يمكنها أن تمر تماماً خلال كل نقاط العينات على المدار الزمني الكامل $-\infty<n<\infty$. في الحقيقة لا توجد أي إشارة أخرى من أي نوع تكون محدودة المجال تحت معدل نيكويست يمكنها أن تمر تماماً خلال كل نقاط هذه العينات.

الحالة ٢

دالة جيب تمام معينة عند ضعف ترددها أو عند معدل نيكويست كما في شكل (١٠,٢٨).



شكل رقم (١٠,٢٨) جيب تمام معينة عند معدل نيكويست.



شكل رقم (١٠,٢٩) دالة جيب بنفس العينات مثل جيب التمام معينة عند معدل نيكويست.

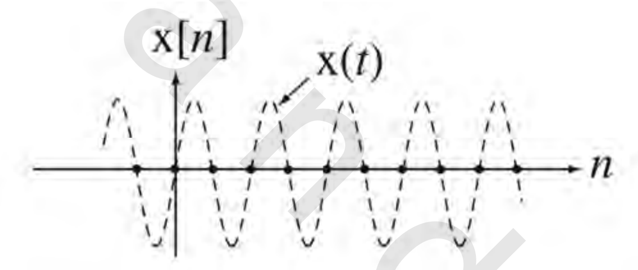
هل هذه العينات كافية لتحديد الإشارة بصورة فريدة ؟ الإجابة هي لا. افترض الدالة الجيبية الموضحة في شكل (١٠,٢٩) والتي لها التردد نفسه وتمر تماما خلال العينات نفسها.

إن هذه تعتبر حالة خاصة توضح دقة نظرية العينة التي ذكرناها مسبقاً. لكي يتم التأكد من إعادة تشكيل أي إشارة عامة من عيناتها، فإن معدل أخذ العينات يجب أن يكون أكبر من معدل نيكويست بدلاً من أن يكون مساوياً تماماً لمعدل نيكويست. في الأمثلة السابقة لم يكن الأمر مهماً؛ لأن طاقة الإشارة عند تردد نيكويست تماماً كانت صفراً (لا توجد صدمة في مقدار طيف الإشارة عند هذا التردد). إذا كانت هناك دالة جيبية في أي إشارة، عند حد المجال تماماً، فإن معدل أخذ العينات يجب أن يزيد على معدل نيكويست لكي نتمكن من إعادة التشكيل التامة. لاحظ أنه لا يوجد هناك أي التباس عن تردد الإشارة. ولكن هناك التباس في المقدار والطور كما هو موضح. إذا تم تطبيق خطوات طريقة الاستيفاء بالدالة سنك المستنتجة مسبقاً على العينات التي في شكل (١٠,٢٩) فإن الدالة الجيبية التي في شكل (١٠,٢٨) هي التي ستنتج.

أي دالة جيبية عند تردد معين يمكن التعبير عنها كمجموع من جيوب التمام غير المزاحة بمقدار معين عند التردد نفسه ودالة جيبية غير مزاحة بمقدار معين عند التردد نفسه. مقادير الجيوب وجيوب التمام غير المزاحة تعتمد على طور الدالة الجيبية الأصلية. باستخدام الحقائق المثلثية التالية :

$$A\,cos(2\pi f_0 t + \Theta) = A\,cos(2\pi f_0 t)cos(\Theta) - A\,sin(2\pi f_0 t)sin(\Theta).$$
$$A\,cos(2\pi f_0 t + \Theta) = \underbrace{A\,cos(\Theta)}_{A_C}\;cos(2\pi f_0 t) + \underbrace{[-A\,sin(\Theta)]}_{A_S}\;sin(2\pi f_0 t).$$
$$A\,cos(2\pi f_0 t + \Theta) = A_C cos(2\pi f_0 t) + \;A_S\,sin(2\pi f_0 t)$$

عند عيننة الدالة الجيبية عند معدل نيكويست تماماً فإن الاستيفاء بالدالة سنك تعطي عادة جزء جيب التمام وتهمل جزء الجيب وهذا أحد تأثيرات النسخ المستعار. جزء جيب التمام في الدالة الجيبية العامة يسمى عادة الجزء الطوري من الدالة الجيبية وجزء الجيب يسمى جزء الطور المتعامد. إن إسقاط الجزء الطوري المتعامد في أي دالة جيبية يمكن رؤيته بسهولة في النطاق الزمني عن طريق عيننة دالة جيبية غير مزاحة عند معدل نيكويست تماماً. كل العينات ستكون أصفاراً، كما في شكل رقم (١٠,٣٠).



شكل رقم (١٠,٣٠) دالة جيبية معيننة عند معدل نيكويست.

إذا أضفنا دالة جيبية بأي مقدار عند هذا التردد تماماً وبعد قمنا بأخذ عيناتها، فإن العينات ستكون هي نفسها كما لو كانت الدالة الجيبية لم تكن هناك لأن قيمتها تساوي صفراً عند زمن كل عينة كما في شكل (١٠,٣١). لذلك فإن الجزء المتعامد الطور أو الجزء الجيبي الذي يكون عند نفس تردد نيكويست تماماً يفقد تماماً عند عيننة هذه الإشارة.

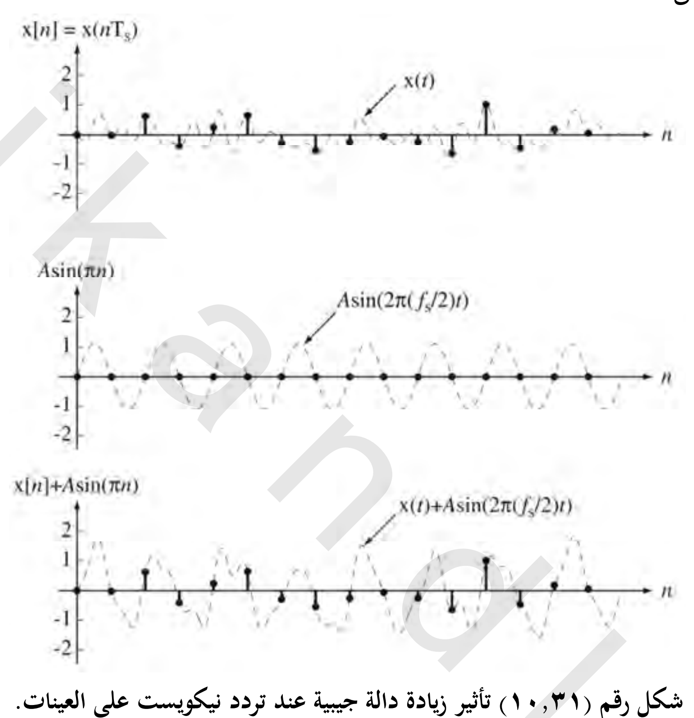
الحالة ٣

عينات مأخوذة من دالة جيبية أعلى قليلا من معدل نيكويست كما في شكل (١٠,٣٢).

الآن حيث إن معدل أخذ العينات أعلى قليلاً من معدل نيكويست، فإن العينات لن تحدث كلها عند نقاط عبور الصفر للدالة الأصلية وسيكون هناك معلومات كافية في العينات لإعادة تشكيل الإشارة. سيكون هناك جيب واحد فقط يكون تردده أقل من تردد نيكويست، ومقداره، وطوره سيمران تماماً خلال هذه العينات.

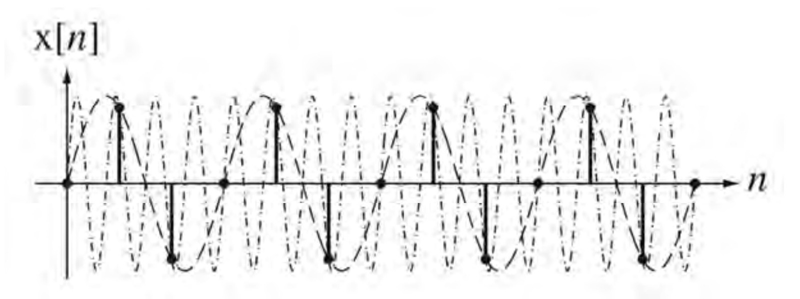
الحالة ٤

دالتان جيبيتان بترددين مختلفين ومعينتان بنفس بالمعدل نفسه وبقيم العينات نفسها كما في شكل (١٠,٣٣). في هذه الحالة ستكون الدالة الجيبية زائدة العينة، والدالة الجيبية ذات التردد العالي ستكون ناقصة التردد. وهذا يوضح الالتباس الناتج عن نقص العينة. إذا كان لدينا معرفة أو اتصال مع العينات المأخوذة من الدالة الجيبية ذات التردد المرتفع، ونعتقد أن الإشارة قد تم عينتها بطرقة تامة تبعاً لنظرية العينة، فإننا سنفسرها كما لو كانت آتية من الجيب ذي التردد الأقل.



شكل رقم (١٠,٣١) تأثير زيادة دالة جيبية عند تردد نيكويست على العينات.

شكل رقم (١٠,٣٢) دالة جيبية معينة بمعدل أعلى قليلاً من معدل نيكويست.



شكل رقم (١٠,٣٣) دالتان جيبيتان مختلفتان في التردد ولهما قيم العينات نفسها.

إذا تم أخذ عينات الدالة الجيبية $x_1(t)=A\cos(2\pi f_0t+\theta)$ بمعدل يساوي f_s، هذه العينات ستكون هي نفسها مثل العينات من دالة جيبية أخرى $x_2(t)=A\cos(2\pi(f_0+kf_s)t+\theta)$ حيث k رقم صحيح (يشمل الأرقام الصحيجة السالبة). يمكن توضيح عن طريق توسيع المعامل $x_2(t)x_2(t)=A\cos(2\pi f_0t+2\pi(kf_s)t+\theta)$. لاحظ حدوث العينات عند الأزمنة nTs حيث n رقم صحيح. لذلك فإن قيم العينة رقم n للدالتين الجيبيتين ستكون:

$$x_1(nT_s) = A\,cos(2\pi f_0 nT_s + \Theta)$$

وأيضا:

$$x_2(nT_s) = A\,cos(2\pi f_0 nT_s + 2\pi(kf_s)nT_s + \Theta)$$

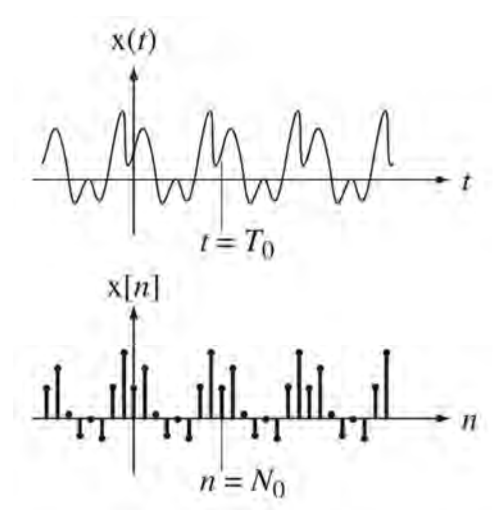
وحيث إن $f_sTs=1$ فإن المعادلة الثانية يمكن تبسيطها إلى $x_2(nTs)=A\cos(2\pi f_0nTs+2k\pi n+\theta)$. حيث أن kn هي حاصل ضرب رقمين صحيحين وهو أيضا يكون رقما صحيحا، وحيث إن إضافة رقم صحيح من 2π لمعامل الدالة الجيبية لا يغير من قيمتها:

$$x_2(nT_s) = A\,cos(2\pi f_0 nT_s + 2k\pi n + \Theta) = A\,cos(2\pi f_0 nT_s + \Theta) = x_1(nT_s)$$

الدوال الدورية المحدودة المجال

لقد رأينا في أحد الأجزاء السابقة ما هي المتطلبات للحصول على عملية عيننة كاملة لأي إشارة. ولقد تعلمنا أيضاً، وعموماً، أنه لكي يمكن إعادة التشكيل الكامل للإشارة، فإنه يكون مطلوباً الحصول على عدد لا نهائي من العينات. حيث إن أي نظام معالجة للإشارات الرقمية DSP يكون لها مقدرة محدودة على الذاكرة، فإنه من الضروري أن نستكشف طرقاً لتحليل الإشارة باستخدام عدد محدود من العينات.

هناك نوع واحد من الإشارات التي يمكن وصفها بالكامل بعدد محدد من العينات، بمعنى أنها إشارة محدودة المجال دورية. معرفة ما يحدث في دورة واحدة يكون كافياً لوصف كل الدورات، والدورة الواحدة تكون محدودة الفترة الزمنية كما في شكل رقم (١٠,٣٤).



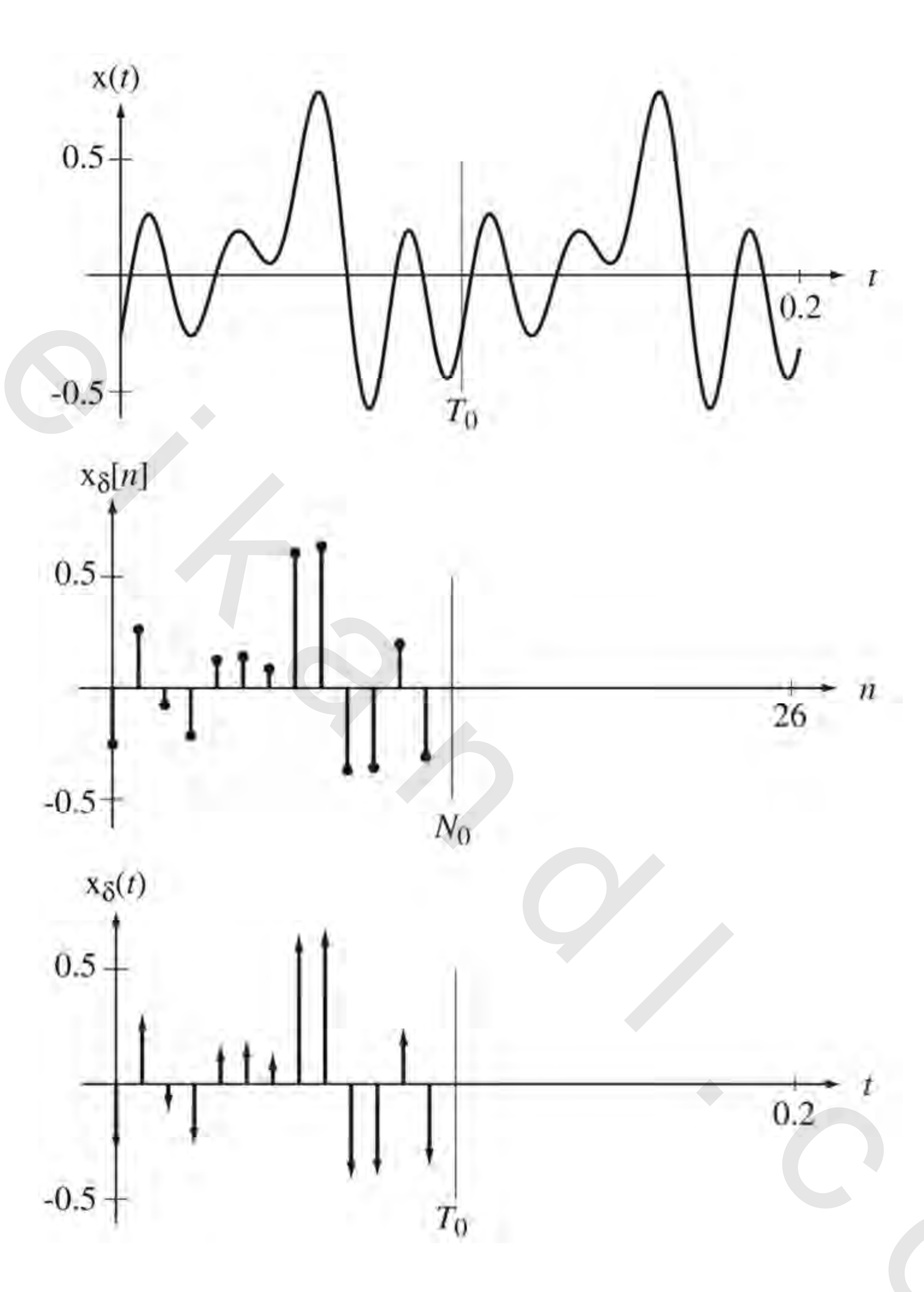
شكل رقم (١٠,٣٤) إشارة محدودة المجال، ودورية، ومستمرة زمنياً، وإشارة متقطعة زمنياً مشكلة عن طريق أخذ عينات من هذه الإشارة بمعدل ٨ مرات لكل دورة أساسية

لذلك فإن عدد محدود من العينات على مدار دورة واحدة من إشارة محدودة المجال ودورية بمعدل يكون فوق معدل نيكويست ويكون أيضاً مضاعفاً صحيحاً من التردد الأساسي يكون كافياً للوصف الكامل لهذه الإشارة. إن جعل معدل أخذ العينات يساوي مضاعفاً صحيحاً من التردد الأساسي يؤكد أن العينات من أي دورة أساسية تكون هي نفسها تماماً مثل العينات من أي دورة أساسية أخرى.

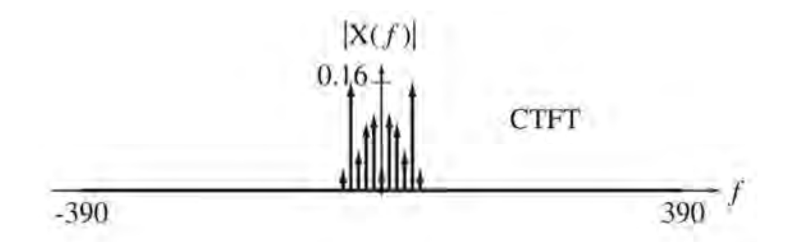
سنفترض أن الإشارة المشكلة من عينة إشارة $x(t)$ محدودة المجال، ودورية، وبمعدل فوق معدل نيكويست ستكون هي الإشارة الدورية $x_s[n]$، وافترض أن صورة معيننة صدمياً من $x(t)$ عند المعدل نفسه ستكون $x_\delta(t)$ كما في شكل (١٠,٣٥).

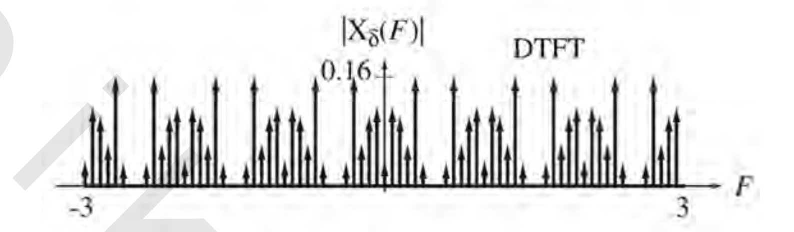
شكل (١٠,٣٥) يبين دورة أساسية واحدة فقط من العينات للتأكيد على أن دورة واحدة من العينات تكون كافية للوصف الكامل لإشارة دورية محدودة المجال. يمكننا إيجاد تحويلات فورير المناسبة لهذه الإشارات، كما في شكل (١٠,٣٦).

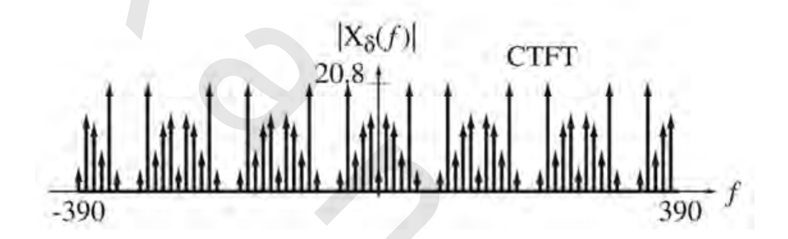
تحويل فورير المستمر زمنياً CTFT للإشارة $x(t)$ يتكون من صدمات فقط؛ لأنه دوري ويتكون من عدد محدود من الصدمات؛ لأنه محدود المجال. لذلك فإن عدداً محدوداً من الأرقام يصف بالكامل الإشارة في كل من النطاق الترددي والزمني. إذا ضربنا شدة الصدمات في $X(f)$ في معدل أخذ العينات f_s سنحصل على شدة النبضات في المدى الترددي نفسه لـ $X_\delta(f)$.



شكل رقم (١٠,٣٥) دالة دورية محدودة المجال ومستمرة زمنياً، ودالة متقطعة زمنياً وإشارة صدمة مستمرة زمنياً متولدة عن طريق عيننة هذه الإشارة بمعدل أعلى من معدل نيكويست







شكل رقم (١٠,٣٦) مقدار تحويلات فورير الثلاث في النطاق الزمني.

مثال ١٠,٥

إيجاد دالة CTFS التوافقية من دالة DFT التوافقية.

أوجد دالة CTFS التوافقية للدالة $x(t)=4+2\cos(20\pi t)-3\sin(40\pi t)$ عن طريق العينة فوق معدل نيكويست وعند مضاعف صحيح من التردد الأساسي على دورة أساسية واحدة وأوجد دالة الـ DFT التوافقية لهذه العينات.

هناك ثلاثة ترددات موجودة في هذه الإشارة وهي 0Hz و 10Hz و 20Hz. ولذلك فإن أعلى تردد موجود في الإشارة هو f_m=20Hz وبالتالي فإن معدل نيكويست سيكون 40Hz. التردد الأساسي هو القاسم المشترك الأعظم للـ 10Hz والـ 20Hz وهو 10Hz. ولذلك يجب أن نأخذ العينات بتزامن 1/10 ثانية. إذا كنا سنأخذ العينات عند معدل نيكويست لمدة دورة واحدة أساسية، سنحصل على ٤ عينات. إذا كنا سنأخذ العينات فوق معدل نيكويست عند مضاعف صحيح من التردد الأساسي، سنأخذ ٥ عينات أكثر في الدورة الأساسية الواحدة. لجعل الحسابات أبسط

سنأخذ العينات ٨ مرات في دورة أساسية واحدة، وهو ما يساوي معدل عيننة مقداره 80 هرتز. وبالتالي مع بدء العيننة عند الزمن t=0 فإن العينات ستكون كما يلي:

$$\{x[0], x[1], \ldots, x[7]\} = \{6, \quad 1+\sqrt{2}, \quad 4, \quad 7-\sqrt{2}, 2, \quad 1-\sqrt{2}, \quad 4, \quad 7+\sqrt{2}\}$$

باستخدام معادلة حساب دالة DFT التوافقية لدالة متقطعة زمنياً:

$$X[k] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \mathrm{x[n]} e^{-j2\pi kn/N_0}$$

$$\{X[0], X[1], \ldots, X[7]\} = \{32, 8, j12, 0, 0, 0, -j12, 8\}$$

الجانب الأيمن من المعادلة السابقة هو دورة أساسية واحدة من دالة DFT التوافقية X[k] للدالة x[n]. بإيجاد دالة CTFS التوافقي للدالة x(t)=4+2cos(20πt)-3sin(40πt) مباشرة باستخدام:

$$c_x[k] = (1/T_0) \int_{T_0} \mathrm{X(t)e}^{-j2\pi kt/T_0} \mathrm{dt}$$

سنحصل على ما يلي:

$$\{c_x[-4], c_x[-3], \ldots, c_x[4]\} = \{0, 0, -j\,3/2\,, 1, 4, 1, j\,3/2\,, 0, 0\}$$

من النتيجتين السابقتين، سنجد أن 1/N مضروبة في القيم X[0] و X[1] و X[2] و X[3] و X[4] في دالة DFT التوافقية والقيم التوافقية لل CTFS وهي $c_x[0]$ و $c_x[1]$ و $c_x[2]$ و $c_x[3]$ و $c_x[4]$ هي نفسها، وباستخدام حقيقة أن X[k] تكون دورية بدورة أساسية ٨، بمعنى أن (1/8){X[-4], X[-3], X[-2], X[-1]} وأيضا $c_x[-1]$ و $c_x[-2]$ و $c_x[-3]$ و $c_x[-4]$ ستكون هي نفسها أيضاً.

دعنا الآن نكسر نظرية العيننة عند معدل نيكويست. في هذه الحالة هناك ٤ عينات في دورة أساسية واحدة:

$$\{X[0], X[1], X[2], X[3]\} = \{6, 4, 2, 4\}$$

وستكون دورة واحدة لدالة DFT التوافقية كما يلي:

$$\{X[0], X[1], X[2], X[3]\} = \{16, 4, 0, 4\}$$

القيم التي لا تساوى الصفر في دالة CTFS التوافقية ستكون هي المجموعة التالية:

$$\{c_x[-2], c_x[-1], \ldots, c_x[2]\} = \{\,-j\,3/2\,, 1, 4, 1, j\,3/2\}$$

القيمة j3/2 الخاصة بـ $x_x[2]$ غائبة من دالة DFT التوافقية، لأن X[2]=0. إن ذلك هو مقدار الدالة الجيبية عند التردد 40Hz. إن ذلك يثبت أنه عند أخذ عينات من دالة جيبية عند معدل نيكويست تماماً، فإننا لن نراها في العينات؛ لأن هذه العينات تكون تماماً عند نقاط عبور الصفر.

من الممكن للقارئ المفكر أن يلاحظ أن وصف أي إشارة اعتماداً على عينات في النطاق الزمني من دورة أساسية واحدة تتكون من مجموعة محددة من الأرقام $x_s[n]$ حيث $n_0<n<n_0+N$، والتي تحتوي على N من الأعداد الحقيقية المستقلة، ووصف دالة ال DFT التوافقية المقابلة لهذه الإشارة في النطاق الترددي تتكون من مجموعة محددة

من الأرقام $X_s[k], k_0 \le k \le k_0+N$ ، التي تحتوي على N من الأرقام المركبة وبالتالي 2N من الأرقام الحقيقية (اثنان من الأرقام الحقيقية لكل رقم مركب، الجزء الحقيقي والجزء التخيلي). ولذلك فإنه قد يبدو أن الوصف في النطاق الزمني يكون أكثر فعالية من الوصف في النطاق الترددي حيث إنه يتحقق بعدد أقل من الأرقام الحقيقية. ولكن كيف سيكون ذلك عندما تكون المجموعة $X_s[k], k_0 \le k \le k_0+N$ سيتم حسابها من المجموعة $x_s[n]$ حيث $n_0 < n < n_0+N$ بدون أي معلومات إضافية ؟ النظرة الفاحصة للعلاقة بين هاتين المجموعتين من الأرقام ستبين أن هذا الفرق الظاهري هو وهم.

كما شرحنا مسبقاً في الفصل ٧ ، فإن $X_s[0]$ تكون دائماً حقيقية ، ويمكن حسابها بمعادلة DFT كما يلي :

$$X_s[0] = \sum_{n=\langle N \rangle} X_s[n]$$

حيث إن كل الـ $x_s[n]$ تكون حقيقية ، فإن $X_s[0]$ يجب أن تكون حقيقيةً أيضاً لأنها ببساطة مجموع كل الـ $x_s[n]$. ولذلك ، فإن هذا الرقم لن يكون له أبداً قيمة تخيلية لا تساوي الصفر. هناك حالتان يجب افتراضهما بعد ذلك ، وهما N رقم زوجي و N رقم فردي.

الحالة 1 ، N رقم زوجي

للبساطة ، وبدون فقد في العمومية ، يمكننا كتابة :

$$X_s[k] = \sum_{n=\langle N \rangle} X_s[n] e^{-j\pi kn/N} = \sum_{n=k_0}^{k_0+N-1} X_s[n] e^{-j\pi kn/N}$$

بفرض $k_0=-N/2$ ، فإن :

$$X_s[k_0] = X_s[-N/2] = \sum_{n=\langle N \rangle} X_s[n] e^{j\pi n} = \sum_{n=\langle N \rangle} X_s[n](-1)^n$$

و $X_s[-N/2]$ ستكون بالتأكيد حقيقية. كل قيم دوال DFT التوافقية في دورة واحدة ، فيما عدا $X_s[0]$ و $X_s[-N/2]$ ، تحدث في صورة أزواج على الصورة $X_s[k]$ و $X_s[-k]$. تذكر أنه لأي $x_s[n]$ ، فإن $X_s[k] = X_s^*[-k]$. بمعنى ، بمجرد أن نعرف $X_s[k]$ فإننا نعرف $X_s[-k]$ أيضاً. لذلك ، على الرغم من أن كل $X_s[k]$ تحتوي على رقمين حقيقيين ، وأيضا $X_s[-k]$ ، فإن $X_s[-k]$ لن تضيف أي معلومات لأننا نعرف مسبقاً أن $X_s[k] = X_s^*[-k]$. لاحظ أن $X_s[-k]$ ليست مستقلة عن $X_s[k]$. لذلك فإنه لدينا الآن ، كأرقام مستقلة ، $X_s[0]$ و $X_s[N/2]$ و $X_s[k]$ حيث $1 \le k \le N/2$. كل $X_s[k]$ من k=1 حتى k=N/2-1 تعطي عدد 2(N/2-1)=N-2 من الأرقام الحقيقية المستقلة. بجمع الرقمين الحقيقيين بالتأكيد ، وهما $X_s[0]$ ، $X_s[N/2]$ سيكون لدينا في النهاية عدد N من الأرقام الحقيقية المستقلة في وصف الإشارة في النطاق الترددي.

الحالة 2: N رقم فردي

للتبسيط، وبدون فقد في العمومية سنفترض $k_0=-(N-1)/2$. في هذه الحالة يكون لدينا ببساطة $X_s[0]$ بالإضافة إلى $(N-1)/2$ من الأزواج المركبة المترافقة $X_s[k]$ و $X_s[-k]$. لقد رأينا مسبقاً أن $X_s[k] = X_s^*[-k]$. ولذلك فإن لدينا $X_s[0]$ واثنين من الأرقام الحقيقية المستقلة لكل زوج مترافق أو N-1 من الأرقام الحقيقية المستقلة للعدد الكلي N من الأرقام الحقيقية المستقلة.

المحتوى المعلوماتي في صورة أرقام حقيقية مستقلة محفوظ في عملية التحويل من النطاق الزمني إلى النطاق الترددي.

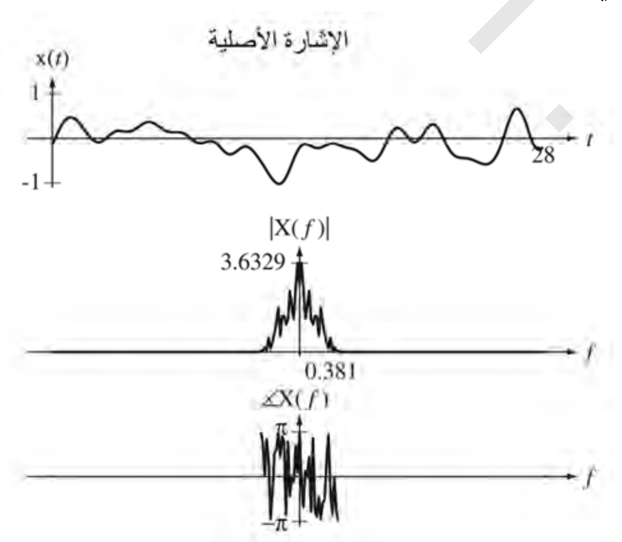
معالجة الإشارات باستخدام DFT

العلاقة بين CTFT و DFT

في الشرح التالي للعلاقة بين CTFT و DFT سنعرض خطوات المعالجة من CTFT للدالة الأصلية حتى DFT عن إشارة مثال. بعد ذلك سيتم عرض العديد من الاستخدامات لعمليات معالجة الإشارات. سنستخدم الصورة F للـ DTFT لأن علاقات التحويل تكون أكثر تماثلاً منها في الصورة Ω.

افترض الإشارة x(t) تم أخذ عيناتها وافترض أن العدد الكلي من العينات المأخوذة هو N حيث $N=Tf_s$، و T هي زمن العينة الكلي و f_s هي تردد العينة، بالتالي فإن الزمن بين العينات سيكون $Ts=1/f_s$. فيما يلي سنرى مثالاً على إشارة أصلية في كل من النطاقين الزمني والترددي كما في شكل (١٠.٣٧).

خطوة المعالجة الأولى في التحويل من CTFT إلى DFT هي أن نأخذ عينات الإشارة x(t) لتكوين الإشارة $x_s[n]=x(nTs)$. الصورة المقابلة للنطاق الترددي للدالة المتقطعة زمنياً هي تحويل الـ DTFT لها. في الجزء التالي سننظر إلى العلاقة بين هذين التحويلين.



شكل رقم (١٠,٣٧) إشارة أصلية وتحويل CTFT لها.

العلاقة بين CTFT و DTFT

CTFT هو تحويل فورير لدالة مستمرة زمنياً وDTFT هو تحويل فورير لدالة متقطعة زمنياً. إذا ضربنا الدالة المستمرة زمنياً x(t) في صدمات دورية دورتها هي Ts، فإننا نولد الدالة الصدمية المستمرة زمنياً كما يلي:

$X_\delta(t) = x(t)\delta_{\mathrm{T_s}}(t) = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)}\delta(\mathrm{t-nT_s})$ المعادلة رقم (١٠,٣)

إذا كونا الآن الدالة $x_s[n]$ التي قيمها هي قيم الدالة المستمرة زمنياً x(t) عند مضاعفات صحيحة لـ Ts (وهي أيضاً تمثل مقدار الصدمات في دالة الصدمات المستمرة زمنياً $x_\delta(t)$)، سنحصل على العلاقة $x_s[n]=x(nTs)$. الدالتان $x_s[n]$ و $x_\delta(t)$ يتم وصفهما بمجموعة الأرقام نفسها (شدة الصدمة) ويحتويان نفس المعلومات. إذا حسبنا الآن ال CTFT للمعادلة (١٠,٣) سنحصل على:

$$X_\delta(f) = x(f) * f_s\delta_{f_s}(f) = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)e}^{-j2\pi f n\mathrm{T_s}}$$

حيث:

$$f_s = 1/T_s \ \ and \ x(t) \overset{f}{\leftrightarrow} X(f)$$

أو:

$$X_\delta(f) = f_s \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x}(f - \mathrm{k}f_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_s[n]e^{-j2\pi f n/f_s}$$

إذا قمنا بعمل التغيير التالي: $f \to f_sF$ سنحصل على:

$$X_\delta(f_sF) = f_s \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x}\big(f_s(\mathrm{F-k})\big) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_s[n]e^{-j2\pi nF}}_{=X_s(F)}$$

العلاقة الأخيرة هي التعريف التام لـ DTFT لـ $x_s[n]$، وهي $X_s(F)$. باختصار، إذا كانت $x_s[n]=x(nTs)$ و $x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_s[n]\delta(t-nTs)$ فإن:

$X_s(F) = X_\delta(f_sF)$ المعادلة رقم (١٠,٤)

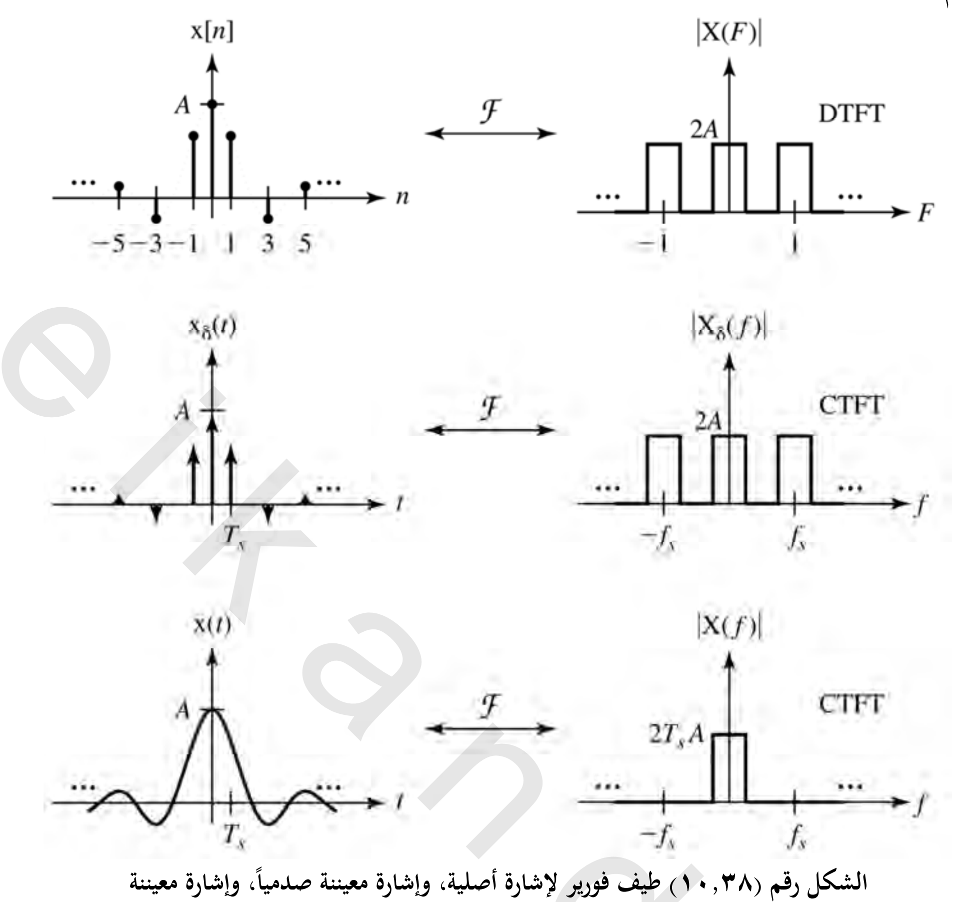
أو:

$X_\delta(f) = X_s\left(\frac{f}{f_s}\right)$ المعادلة رقم (١٠,٥)

وأيضاً:

$X_s(F) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(f_s(F-k)\big)$ المعادلة رقم (١٠,٦)

انظر شكل رقم (١٠،٣٨).



الشكل رقم (١٠،٣٨) طيف فورير لإشارة أصلية، وإشارة معيننة صدمياً، وإشارة معيننة

الآن يمكننا كتابة DTFT للـ $x_s[n]$ والذي هو$X_s(F)$ بدلالة ال CTFT للـ x(t) والذي هوX(f). إنها ستكون كالتالي:

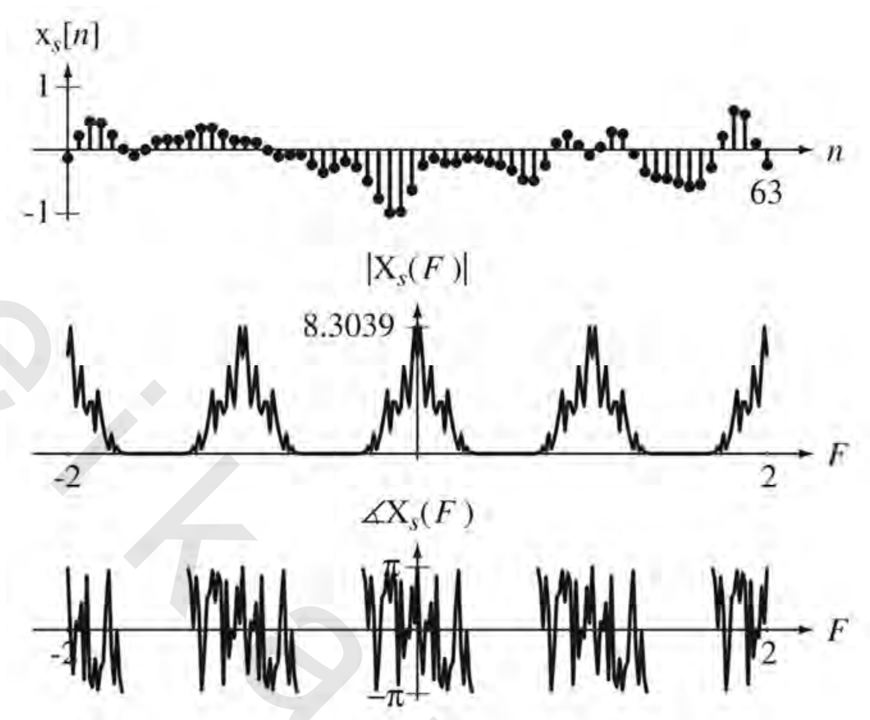
$$X_s(F) = f_s\, X(f_sF) * \delta_1(\mathrm{F}) = f_s \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{X}\big(f_s(\mathrm{F}-\mathrm{k})\big)$$

الصورة المحجمة ترددياً والمكررة دورياً للـ X(f) موضحة في شكل (١٠،٣٩).

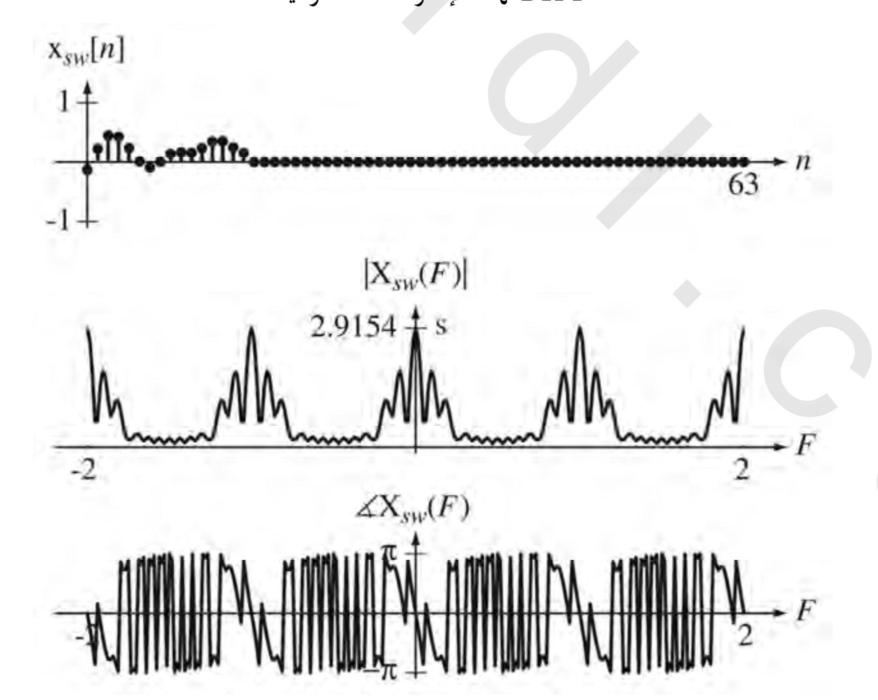
بعد ذلك يجب أن نقصر عدد العينات على هذا العدد الذي يحدث في كل زمن عينة الزمن المتقطع N. افترض أن زمن أول عينة هو n=0. (إن هذا الفرض التلقائي في الـ DFT. يمكن استخدام أزمنة مرجعية أخرى ولكن تأثير هذا الزمن المرجعي الآخر يكون ببساطة في صورة إزاحة طورية تتغير خطياً مع التردد). يمكن تحقيق ذلك عن طريق ضرب $x_s[n]$ في دالة نافذة كالتالي:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n < N \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

وكما هو موضح في شكل (١٠,٤٠).



شكل رقم (١٠,٣٩) إشارة أصلية، معيننة زمنياً لتكوين إشارة متقطعة زمنياً، وتحويل DTFT لهذه الإشارة المتقطعة زمنياً



شكل رقم (١٠,٤٠) إشارة أصلية، معيننة زمنياً وأخذت منها نافذة لتكوين إشارة متقطعة زمنياً، و DTFT لهذه الإشارة المتقطعة زمنياً

هذه الدالة للنافذة بها عدد N من القيم التي لا تساوي الصفر، الأولى منها تكون عند الزمن n=0. سنسمي الدالة المعيننة والتي أخذ منها نافذة بالاسم $x_{sw}[n]$. وبالتالي فإن:

$$w_{SW}[n] = w[n]X_S[n] = \begin{cases} X_S[n], & 0 \le n < N \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

إن عملية قصور الإشارة على مدى معين N في الزمن المتقطع تسمى النوفذة، لأننا نعتبر فقط هذا الجزء من الإشارة المعيننة الذي تتم رؤيته من خلال نافذة ذات طول محدد. دالة هذه النافذة ليس بالضرورة أن تكون مستطيلة. في العادة يتم استخدام أشكال أخرى للنافذة عملياً لتقليل تأثير يسمى الارتشاح، أو التسريب (سيتم وصفه حالاً) في النطاق الترددي. DTFT للإشارة $x_{sw}[n]$ هو الالتفاف الدوري لـ DTFT للإشارة $x_s[n]$ و DTFT لدالة النافذة w[n]، التي يمكن كتابتها على الصورة $X_{sw}(F)=W(F)*X_s(F)$. DTFT لدالة النافذة سيكون:

$$W(F) = e^{-j\pi F(N-1)}N\ drcL(F,N)$$

وبالتالي:

$$X_{SW}(F) = e^{-j\pi F(N-1)}N\ drcL(F,N)\ \Theta\ f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(f_s(F-k)\big)$$

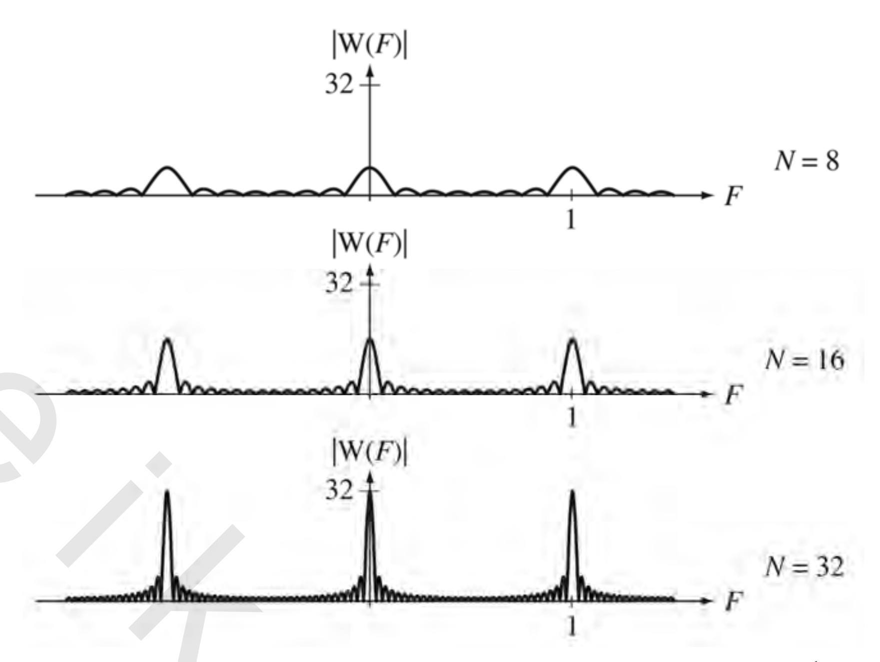
أو باستخدام حقيقة أن الالتفاف الدوري مع الإشارات الدورية يكافئ الالتفاف غير الدوري مع أي إشارة غير دورية التي يمكن تكرارها لتكون إشارة دورية.

$$X_{SW}(F) = f_s\big[e^{-j\pi F(N-1)}N\ drcL(F,N)\big] * X(f_sF)$$ المعادلة رقم (١٠,٧)

ولذلك فإن النوفذة في المجال الترددي في الأزمنة المتقطعة هو أن تحويل فورير للإشارة المعيننة زمنياً قد تم التفافه دورياً مع:

$$W(F) = e^{-j\pi F(N-1)}N\ drcL(F,N)$$

كما في شكل (١٠.٤١).



شكل رقم (١٠,٤١) مقدار DTFT لدالة النافذة التالية لثلاث قيم مختلفة لعرض النافذة :

$$\mathbf{w[n]} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{0 \le n < N} \\ \mathbf{0}, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ستؤدي عملية الالتفاف إلى انتشار $X_s(f)$ في النطاق الترددي، مما يتسبب في انتشار $X_s(F)$ عند أي تردد إلى الترددات القريبة في $X_{sw}(F)$. وهو ما جاء منه تعبير الانتشار. إن استخدام دالة نافذة مختلفة يكون DTFT لها أكثر تحديداً في النطاق الترددي يقلل من هذا التسريب (ولكن لا يمكن التخلص منه). كما هو موضح في شكل (١٠,٤١) فإنه مع زيادة عدد العينات N ، فإن عرض الفص الرئيسي لكل دورة أساسية لهذه الدالة يقل، مما يقلل من هذا التسريب. لذلك فإن طريقة أخرى لتقليل التسريب تكون عن طريق استخدام عدد أكبر من العينات.

عند هذه النقطة من العملية نحن لدينا تتابع من الأرقام من الإشارة المعينة والمنوفذة، ولكن DTFT للإشارة المنوفذة يكون دالة دورية في التردد F المستمر ولذلك لا يكون مناسباً للتخزين في ذاكرة الحاسب والتعامل معه منها. إن حقيقة أن الدالة في النطاق الزمني أصبحت محدودة زمنياً بسبب النوفذة، وحقيقة أن دالة النطاق الترددي تكون دورية تسمح لنا الآن أن نأخذ عينات في النطاق الترددي في الدورة الأساسية لكي نصف النطاق الترددي بالكامل. من الطبيعي عند هذه النقطة أن نتعجب كيف أنه علينا أن نأخذ عينات من الدالة في النطاق الترددي لكي نكون قادرين على إعادة تشكيلها من عيناتها. إن الإجابة عن ذلك تكون مطابقة تقريباً للإجابة بالنسبة للعينة في النطاق الزمني للإشارات فيما عدا أن الزمن والتردد تتبدل أدوارهما. العلاقات بين النطاقين الزمني والترددي تكون متطابقة تقريبا نتيجة التبادلية بين تحويلات فورير الأمامية والعكسية.

علاقات العيننة والتكرار الدوري

تحويل ال DFT العكسي لأي دالة دورية x[n] لها دورة أساسية N يتم تعريفها كما يلي :

$$X[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X[k]e^{j2\pi kn/N}$$ المعادلة رقم (١٠،٨)

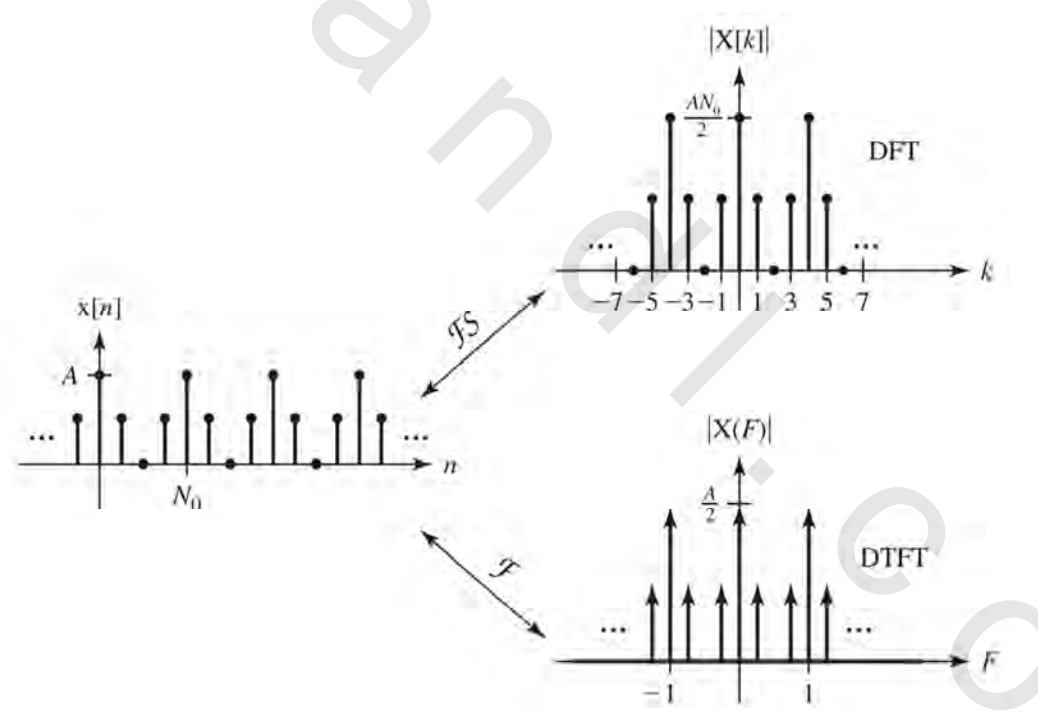
بأخذ DTFT للطرفين باستخدام زوج تحويل DTFT التالي : $e^{j2\pi f_0 n} \leftrightarrow \delta_1(F-F_0)$ يمكننا أن نوجد DTFT للإشارة x[n]، كالتالي :

$$X(F) = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X[k]\delta_1(F-k/N)$$ المعادلة رقم (١٠،٩)

وبالتالي :

$$X(F) = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X[k]\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta(F-k/N-q) = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(F-k/N)$$ المعادلة رقم (١٠،١٠)

وهذه يوضح أنه بالنسبة للدوال الدورية ، فإن DFT يكون ببساطة حالة خاصة محجمة من DTFT. إذا كانت أي دالة x[n] دورية ، فإن DTFT لها يتكون من صدمات فقط تحدث عند k/N بشدة مقدارها X[k]/N كما في شكل (١٠،٤٢).



شكل رقم (١٠،٤٢) الدالة التوافقية و DTFT للدالة x[n]=(A/2)[1+cos(2πn/4)].

باختصار ، وبالنسبة للدالة x[n] التي لها دورة أساسية مقدارها N ، فإن :

$$X(F) = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(F - k/N)$$ المعادلة رقم (١٠,١١)

لنفترض أن x[n] هي دالة غير دورية DTFT لها هو X(F). وافترض أن $x_p[n]$ هي امتداد دوري للدالة x[n] بدورة أساسية مقدارها N_p كالتالي وكما في شكل (١٠,٤٣) :

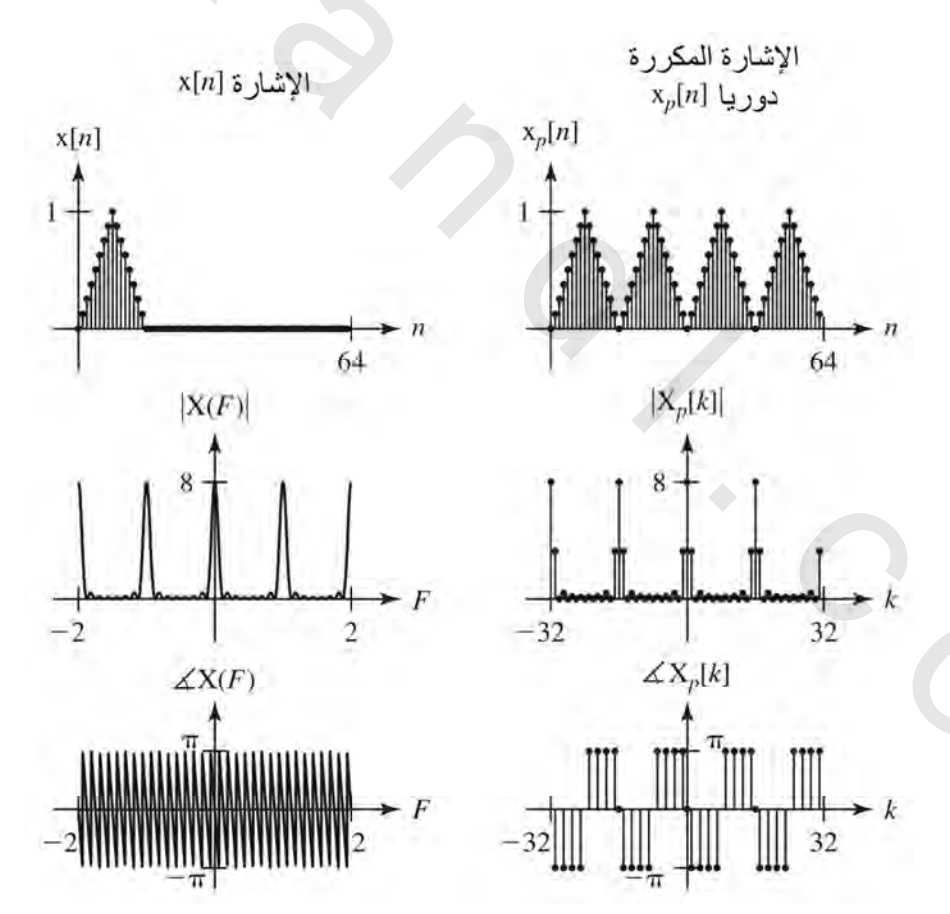
$$X_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[n - mN_p] = X[n] * \delta_{N_p}[n]$$ المعادلة رقم (١٠,١٢)

باستخدام الثنائية بين الضرب والالتفاف لـ DTFT ، وبإيجاد DTFT للمعادلة (١٠,١٢) نحصل على :

$$X_p(F) = X(F)(1/N_p)\delta_{1/N_p}(F) = (1/N_p)\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k/N_p)\delta(F - k/N_p)$$ (١٠,١٣)

باستخدام (١٠,١١) و (١٠,١٣) :

$$X_p[k]=X(k/N_p)$$ المعادلة رقم (١٠,١٤)



شكل رقم (١٠,٤٣) إشارة وتحويل DTFT لها والتكرار الدوري للإشارة ودالة DFT التوافقية له

حيث $X_p[k]$ هي DFT لـ $x_p[n]$. إذا تم التكرار الدوري لأي إشارة $x[n]$ غير دورية، بدورة أساسية N_p لتشكيل دالة دورية $x_p[n]$ تكون قيم الدالة التوافقية لـ DFT لها هي $X_p[k]$ يمكن إيجادها من $X(F)$، التي تمثل DTFT لـ $x[n]$، محسوبة عند الترددات المتقطعة k/N_p. إن هذا يشكل تقابل بين العيننة في النطاق الترددي والتكرار الدوري في النطاق الزمني.

إذا قمنا الآن بتكوين تكرار دوري للإشارة $x_{sw}[n]$ كما يلي:

$$X_{swp}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{sw}[n - mN]$$

بدورة أساسية N، و DFT لها سيكون:

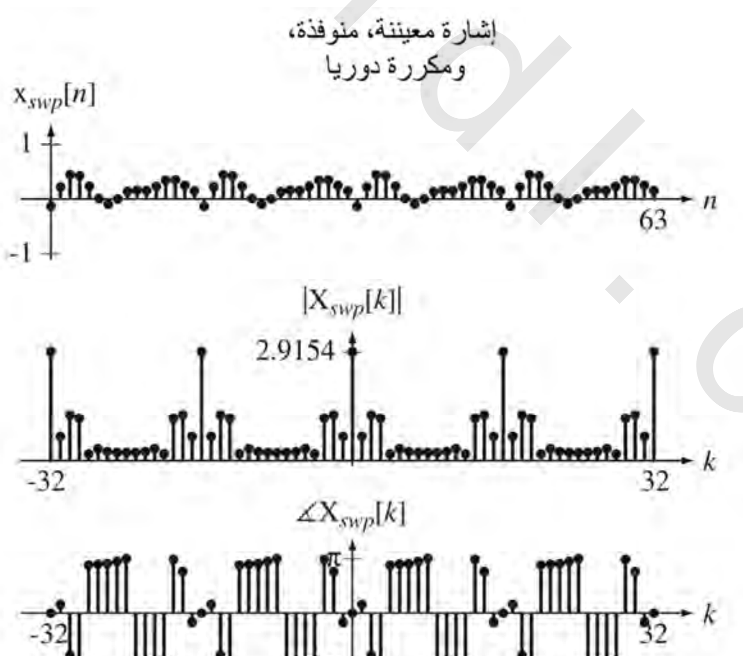
$$X_{swp}[k] = X_{sw}(k/N)$$ حيث k تمثل رقماً صحيحاً

أو من المعادلة (١٠.٧)،

$$X_{swp}[k] = f_s\left[e^{-j\pi F(\mathrm{N}-1)}\mathrm{N}\ \mathrm{drcl}(\mathrm{F},\mathrm{N}) * \mathrm{X}(f_s\mathrm{F})\right]F \to k/N$$

إن تأثير العملية السابقة، وهي العيننة في النطاق الترددي، تسمى أحياناً التجميع السياجي كما في شكل (١٠.٤٤).

حيث إن الطول غير الصفري للإشارة $x_{sw}[n]$ تساوي N تماماً، فإن $x_{swp}[n]$ تكون تكرار دوري للدالة $x_{sw}[n]$ بدورة أساسية تساوي طول هذه الدالة بحيث إن الصور العديدة للإشارة $x_{sw}[n]$ لن تتداخل ولكنها بدلا من ذلك ستتلامس. لذلك فإن $x_{sw}[n]$ يمكن استعادتها من $x_{swp}[n]$ عن طريق عزل دورة واحدة من $x_{swp}[n]$ في المدى الزمني المتقطع $0 \le n < N$.



شكل رقم (١٠،٤٤) الإشارة الأصلية، وعيننة زمنية لها، ونوفذة، وتكرار دوري لها لتشكيل إشارة دورية متقطعة زمنياً ودورية و DFT لها

والنتيجة هي :

$$X_{swp}[k] = f_s\left[e^{-j\pi F(\mathrm{N}-1)}\mathrm{N}\,\mathrm{drcl}(\mathrm{F},\mathrm{N}) * \mathrm{X}(f_s\mathrm{F})\right]F \to k/N$$

التي تمثل DFT للامتداد الدوري للإشارة المتقطعة زمنياً المتكونة من أخذ عينات الإشارة الأصلية على فترة زمنية محددة.

باختصار ، عند الانتقال من CTFT للإشارة المستمرة زمنياً إلى DFT للعينات المأخوذة من الإشارة المستمرة زمنياً على فترة زمنية محددة ، فإننا نفعل ما يلي : في النطاق الزمني :

١- اقرأ عينات الإشارة المستمرة زمنياً.

٢- خذ نافذة من هذه العينات عن طريق ضربها في دالة نافذة.

٣- كرر دورياً العينات غير المساوية للصفر من الخطوة ٢

في النطاق الترددي:

١- أوجد DTFT للإشارة المعيننة ، التي تعتبر صورة محجمة ومكررة دورياً من CTFT للإشارة الأصلية.

٢- نفذ الالتفاف الدوري للـ DTFT للإشارة المعيننة مع DTFT لدالة النافذة.

٣- خذ عينات الخطوة 2 في النطاق الترددي.

DFT و DFT العكسي ، والتي هي أصلا عمليات رقمية ، تكون تقابلاً تاماً بين مجموعة N من الأرقام الحقيقية ومجموعة N من الأرقام المركبة. إذا كانت مجموعة الأرقام الحقيقية تمثل مجموعة N من قيم الإشارة على مدار دورة واحدة من الإشارة x[n] المتقطعة زمنياً والدورية ، فإن المجموعة N من الأرقام المركبة ستكون مجموعة من المقادير المركبة على مدار دورة واحدة للـ DFTوهو X[k] للإشارة المتقطعة زمنياً. إن هذه تمثل المقادير المركبة للجيوب المتقطعة زمنياً التي ، عند إضافتها ، ستعطي الإشارة المتقطعة زمنياً Nx[n].

إذا كانت المجموعة N من الأرقام الحقيقية تمثل مجموعة من العينات من دورة واحدة من الإشارة الدورية المستمرة زمنياً والمحددة المجال المعيننة فوق معدل نيكويست وعند معدل مضاعف صحيح من ترددها الأساسي ، الأرقام الراجعة من DFT يمكن تحجيمها وتفسيرها كمقادير مركبة من دوال جيبية مركبة مستمرة زمنياً والتي عند إضافتها ستعيد توليد الإشارة الدورية المستمرة زمنياً.

ولذلك عند استخدام ال DFT في تحليل الإشارات الدورية المتقطعة زمنياً أو الإشارات الدورية المستمرة زمنياً والمحدودة المجال فإننا نستطيع الحصول على النتائج التي يمكن استخدامها في الحساب الدقيق لكل من DTFS ، أو DTFT ، أو CTFS ، أو CTFT للإشارة الدورية. عند استخدام DFT في تحليل الإشارات غير الدورية ، فإننا ضمنياً نقوم بعمل تقريب ؛ لأن DFT و DFT العكسي يكونان صحيحين تماماً للإشارات الدورية فقط.

إذا كانت مجموعة الأرقام الحقيقية N تمثل كل، أو عملياً كل القيم المختلفة عن الصفر من إشارة طاقة غير دورية متقطعة زمنياً، فإنه يمكننا إيجاد تقريب للـ DTFT لهذه الإشارة عند مجموعة من الترددات المتقطعة باستخدام النتائج المسترجعة من DFT. إذا كانت مجموعة الأرقام الحقيقية N تمثل عينات من كل، أو عملياً كل المدى غير المساوي للصفر لدالة غير دورية مستمرة زمنياً، فإنه يمكننا إيجاد تقريب للـ CTFT لهذه الإشارة المستمرة زمنياً عند مجموعة من الترددات المتقطعة باستخدام النتائج المسترجعة من DFT.

حساب الدالة التوافقية لتتابع CTFS باستخدام DFT

يمكن توضيح أنه إذا كانت الإشارة x(t) دورية بتردد دوري f_0، وإذا تم أخذ عيناتها بمعدل f_s يكون أعلى من معدل نيكويست، وإذا كانت نسبة معدل العينات إلى التردد الأساسي f_s/f_0 رقماً صحيحاً، فإن الـ DFT لهذه العينات وهو X[k] يكون له علاقة مع الدالة التوافقية للـ CTFS للإشارة $c_x[k]$ بالعلاقة التالية:

$$X[k] = N\ c_x[k] * \delta_N[k]$$

في هذه الحالة الخاصة ستكون العلاقة صحيحة وتامة.

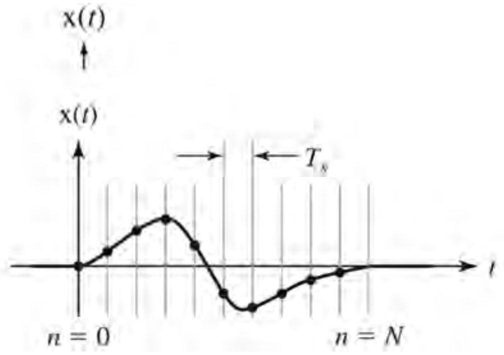
تقريب تحويل CTFT مع DFT

CTFT الأمامي

في الحالات التي تكون فيها الإشارة المطلوب تحويلها لا يمكن وصفها بدالة حسابية، أو أن تكامل تحويل فورير لا يمكن إجراؤه تحليلياً، فإنه أحياناً يمكننا تقريب CTFT عددياً باستخدام ا DFT. إذا كانت الإشارة المطلوب تحويلها إشارة طاقة سببية، فإنه يمكننا توضيح أن CTFT يمكن تقريبه عند ترددات متقطعة kf_s/N بالعلاقة:

$$X(k\,f_s/N) \cong T_S \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-j2\pi kn/N} \cong T_S \times DFT\big(x(nT_s)\big), |k| \ll N$$ المعادلة رقم (١٠,١٥)

حيث $Ts=1/f_s$ و N تم اختيارها بحيث إن المدى الزمني 0 حتى NTs يغطي كل طاقة الإشارة x كما في شكل (١٠,٤٥). لذلك إذا كانت الإشارة المطلوب تحويلها إشارة طاقة سببية وقمنا بأخذ عيناتها على مدى زمني يحتوي عملياً كل طاقة الإشارة، فإن التقريب في المعادلة (١٠,١٥) يصبح صحيحاً عندما |k|<<N.



شكل رقم (١٠,٤٥) إشارة طاقة سببية معينة بمعدل Ts ثانية بين العينات في الفترة الزمنية NTs

CTFT العكسي

CTFT العكسي معرف كما يلي:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} \, df$$

إذا كنا نعرف $X(kf_s/N)$ في المدى $-N<<-k_{max}\leq k\leq k_{max}<<N$ وإذا كان المقدار $X(kf_s/N)$ مهملاً خارج هذا المدى، فإنه من الممكن توضيح أن $n<<N$،

$$X(nT_S) \cong f_s \times DFT^{-1}\big(X_{ext}(kf_s/N)\big)$$

حيث:

$$X_{ext}(kf_s/N) = \begin{cases} X(kf_s/N), & -k_{max} \leq k \leq k_{max} \\ 0, & k_{max} < |k| \leq N/2 \end{cases}$$

$$X_{ext}(kf_s/N) = X_{ext}((k + mN)f_s/N)$$

تقريب DTFT مع DFT

التقريب العددي للـ DTFT باستخدام DFT تم استنتاجه في الفصل ٧. DTFT للـ x[n] المحسوب عند الترددات F=k/N أو Ω=2πk/N هو:

$$X(k/N) \cong DFT(X[n]) \quad \text{المعادلة رقم (١٠,١٦)}$$

تقريب الالتفاف المستمر زمنياً مع DFT

الالتفاف غير الدوري

واحد من الاستخدامات الشائعة الأخرى للـ DFT هي تقريب الالتفاف لاثنين من الدوال المستمرة زمنياً باستخدام الـ DFT باستخدام عينات منهما. افترض أننا نريد إجراء الالتفاف على اثنين من الدوال غير الدورية x(t) و h(t). من الممكن أن نبين أنه إذا كانت|n|<<N،

$$y(nT_s) \cong T_s \times DFT^{-1}\Big(DFT\big(X(nT_s)\big) \times DFT\big(h(nT_s)\big)\Big) \quad \text{المعادلة رقم (١٠,١٧)}$$

الالتفاف الدوري

افترض أن كلاً من x(t) و h(t) كانتا إشارتين دوريتين مستمرتان زمنياً بدورة عامة T وتم أخذ عيناتهما على هذا الزمن بالضبط بمعدل f_s الذي يكون فوق معدل نيكويست، مع أخذ عدد N من العينات من كل إشارة. افترض y(t) هي نتيجة الالتفاف الدوري بين x(t) و h(t)، بالتالي يمكننا أن نبين أن:

$$y(nT_s) \cong T_s \times DFT^{-1}\Big(DFT\big(X(nT_s)\big) \times DFT\big(h(nT_s)\big)\Big) \quad \text{المعادلة رقم (١٠,١٨)}$$

الالتفاف المتقطع زمنياً مع DFT

الالتفاف غير الدوري

إذا كانت الإشارتان$x[n]$ و $h[n]$ معظم طاقتهما تقع في المدى $0\le n<N$ ، فإنه يمكن إثبات أنه إذا كانت $|n|<<N$ فإن :

$$y[n] \cong DFT^{-1}\big(DFT(X[n]) \times DFT(h[n])\big)$$ المعادلة رقم (١٠,١٩)

الالتفاف الدوري

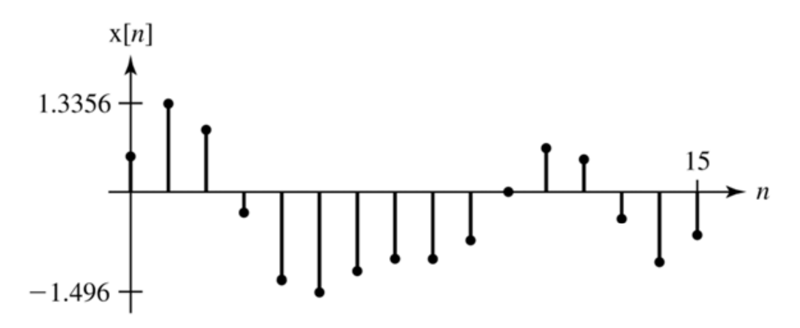
افترض أن كلاً من $x[n]$ و $h[n]$ إشارتين دوريتين بدورة عامة N. افترض أن $y[n]$ هي نتيجة الالتفاف الدوري بين كل من $x[n]$ و $h[n]$ ، وبالتالي يمكننا إثبات أن :

$$y[n] \cong DFT^{-1}\big(DFT(X[n]) \times DFT(h[n])\big)$$ المعادلة رقم (١٠,٢٠)

ملخص لمعالجة الإشارات باستخدام الـ DFT

CTFS	$X([k]) \cong e^{-j\pi k/N}\frac{\sin(k/N)}{\mathrm{N}}X[k],\ |k| \ll N$
CTFS	$X([k]) = Nc_x[k] * \delta_N[k]\ if\ f_s > f_{\mathrm{Nyq}}$ and $f_s/f_0\ is\ an\ integer$
CTFT	$X(kf_s/N) \cong T_S \times DFT\big(X(nT_S)\big)$
DTFT	$X(k/N) \cong DFT(X[n])$
الالتفاف غير الدوري المستمر زمنياً	$[X(t) * h(t)]_{t\to nT_s} \cong T_s \times DFT^{-1}\Big(DFT\big(X(nT_s)\big) \times DFT\big(h(nT_s)\big)\Big)$
الالتفاف غير الدوري المتقطع زمنياً	$X[n] * h[n] \cong DFT^{-1}\Big(DFT\big(X(n)\big) \times DFT\big(h(n)\big)\Big)$
الالتفاف الدوري المستمر زمنياً	$[X(t)\Theta h(t)]_{t\to nT_s} \cong T_s \times DFT^{-1}\Big(DFT\big(X(nT_s)\big) \times DFT\big(h(nT_s)\big)\Big)$
الالتفاف الدوري المتقطع زمنياً	$X[t]\Theta h[t] \cong T_s \times DFT^{-1}\big(DFT(X[n]) \times DFT(h[n])\big)$

من الاستخدامات المثالية للـ DFT هي تقدير CTFT لإشارة مستمرة زمنياً باستخدام مجموعة محددة فقط من العينات المأخوذة من هذه الإشارة. افترض أننا قمنا بأخذ عينات من إشارة مستمرة زمنياً $x(t)$ 16 مرة بالمعدل 1kHz لاكتساب العينات $x[n]$ الموضحة في شكل (١٠,٤٦).



شكل رقم (١٠,٤٦) 16 عينة من إشارة مستمرة زمنياً.

ماذا نعرف حتى الآن ؟ نحن نعرف قيم x(t) عند 16 نقطة زمنية، على مدار زمي مقداره 16 ميللي ثانية. نحن لا نعرف ما هي قيم الإشارة السابقة أو اللاحقة لـ x(t). نحن أيضاً لا نعرف ما هي القيم التي تحدث بين العينات التي اكتسبناها. ولذلك لكي نعطي أي ملخص معقول عن x(t) وCTFT الخاص بها سنحتاج إلى معلومات إضافية.

افترض أننا نعلم أن x(t) محدودة المجال حتى أقل من 500Hz. إذا كانت هذه الإشارة محدودة المجال، فإنها لا يمكن أن تكون محدودة الزمن، وبالتالي فقد عرفنا أنه خارج الزمن الذي تم فيه أخذ عينات الإشارة، فإن قيم هذه الإشارة ليست كلها أصفارا. في الحقيقة فإنها لا يمكن أن تكون قيمة ثابتة، لأنها إذا كانت كذلك، فإنه يمكننا طرح هذه القيمة الثابتة من الإشارة، وبالتالي سنحصل على إشارة محدودة زمنياً، والتي لا يمكن أن تكون محدودة المجال. قيم الإشارة خارج النطاق 16 ميللي ثانية يمكنها أن تتغير بطرق عدة، أو يمكنها أن تتغير حسب نموذج معين. إذا كانت تتكرر في نموذج دوري، مع هذه 16 قيمة كدورة أساسية، بالتالي فإن x(t) تكون إشارة محدودة المجال ودورية وفريدة. هذه الإشارة المحدودة المجال التي لها هذه الدورة الأساسية هي فقط التي تعطي هذه العينات. هذه العينات والـ DFT لها تعطي هذا الزوج لـ DFT:

$$X[n] \overset{DFT}{\underset{16}{\longleftrightarrow}} X[k]$$

الدالة التوافقية لـ CTFS وهي $c_x[k]$ يمكن إيجادها من DFT من خلال المعادلة التالية:

$$X[k] = Nc_X[k] * \delta_N[k]$$ إذا كانت $f_s > f_{Nyq}$ و f_s/f_0 رقماً صحيحاً

وبالتالي فإن x(t) يمكن استعادتها بالكامل. أيضاً، فإن CTFT يكون هو مجموعة من الصدمات المتباعدة بمقدار تردد الإشارة الأساسي وشدتها هي نفسها مثل قيم الدالة التوافقية لـ CTFS.

الآن دعنا نضع فرضاً مختلفاً عمَّا يحدث خارج حدود الـ 16 ميلليثانية من مجموعة العينات الزمنية. افترض أننا نعلم أن x(t) تساوي صفراً خارج حدود 16 ميللي ثانية التي أخذنا خلالها العينات. بالتالي فإن الإشارة تكون محدودة زمنياً ولا يمكن أن تكون محدودة المجال وبالتالي فإننا لن نستطيع تحقيق نظرية العيننة. ولكن إذا كانت الإشارة ناعمة بما فيه الكفاية وقمنا بأخذ العينات بسرعة كافية، فإنه من الممكن أن تكون كمية طاقة الإشارة في CTFT فوق

معدل نيكويست مهملة ، ويمكننا أن نحسب تقريبات جيدة للـ CTFT للإشارة x(t) عند مجموعة معينة من الترددات باستخدام :

$$X(kf_s/N) \cong T_S \times DFT\big(X(nT_S)\big)$$

(١٠,٣) أخذ العينات (العيننة) المتقطعة زمنياً

أخذ العينات (العيننة) بالصدمة الدورية

في الأجزاء السابقة كانت كل الإشارات التي يتم أخذ عيناتها إشارات مستمرة زمنياً. الإشارات المتقطعة زمنياً يمكن عيننتها أيضاً. تماماً مثلما يحدث في الإشارات المستمرة زمنياً ، فإن الاهتمام الأساسي في عيننة الإشارات المتقطعة زمنياً يكون هو إذا كانت المعلومات في الإشارة سيتم الحفاظ عليها عن طريق عملية العيننة أم لا. هناك عمليتان متكاملتان تستخدمان في معالجة الإشارات المتقطعة زمنياً لتغير معدل العيننة للإشارة ، وهما التقسيم و الاستيفاء. التقسيم هو عملية لتقليل عدد العينات ، والاستيفاء هو عملية زيادة عدد العينات ، وسنفترض التقسيم أولا.

عندما نقوم بعمل العيننة الصدمية لإشارة مستمرة زمنياً فإننا نضرب هذه الإشارة في صدمة دورية مستمرة زمنياً. بالتماثل مع ذلك ، فإنه يمكننا عيننة إشارة متقطعة زمنياً عن طريق ضربها في صدمة دورية متقطعة زمنياً. إفترض أن الإشارة المتقطعة زمنياً المطلوب عيننتها هي x[n]. وبالتالي فإن الإشارة المعيننة ستكون كالتالي :

$$X_s[n] = X[n]\delta_{N_s}[n]$$

حيث Nsهي الزمن المتقطع بين العينات كما في شكل (١٠,٤٧).

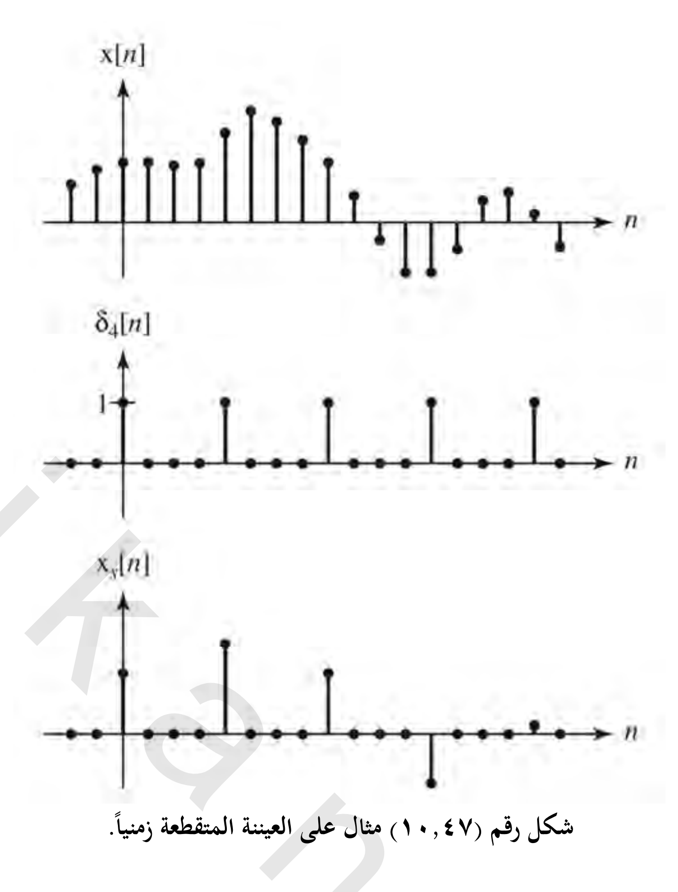
DTFT للإشارة المعيننة ستكون كالتالي وكما في شكل (١٠,٤٨) :

$$X_s(F) = X(F)\ \Theta\ F_s\delta_{F_s}(F),\ F_s = 1/N_s$$

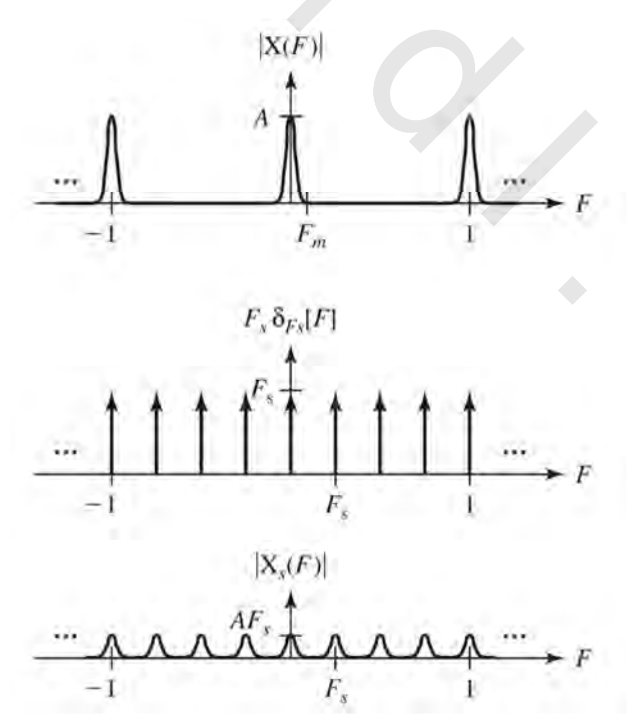
التشابه بين العيننة المتقطعة زمنياً والعيننة المستمرة زمنياً واضحة. في كل من الحالتين ، إذا كان النسخ المستعار لن يتداخل ، فإن الإشارة الأصلية يمكن استرجاعها من العينات وهناك معدل حرج لهذه العينات حتى يمكن استرجاع هذه الإشارات. معدل العيننة يجب يحقق العلاقة $F_s>2F_m$ حيث F_m هي التردد الدوري المتقطع زمنياً الذي فوقه سيكون DTFT للإشارة الأصلية المتقطعة زمنياً يساوي صفر (في الدورة الأساسية الرئيسية ، $|F|<1/2$). بمعنى أنه عندما $F_m<|F|<1-F_m$ سيكون DTFT للإشارة الأصلية يساوي صفر. الإشارة المتقطعة زمنياً التي تحقق هذه المطالب تكون محدودة المجال بالمعنى الزمني المتقطع.

تماماً مثلما هو الحال مع العيننة المستمرة زمنياً ، إذا تمت العيننة المثالية لأي إشارة ، فإنه يمكننا استرجاعها من هذه العينات عن طريق الاستيفاء. عملية استرجاع الإشارة الأصلية يتم وصفها في النطاق الزمني الترددي المتقطع كعملية ترشيح منفذة للترددات المنخفضة :

$$X(F) = X_s(F)\ [\ (1/F_s)\mathrm{rect}(F/2F_c) * \delta_1(F)]$$



شكل رقم (١٠,٤٧) مثال على العينة المتقطعة زمنياً.



شكل رقم (١٠,٤٨) DTFT لإشارة متقطعة زمنياً ونسخة معيننة منها

حيث F_c هي تردد قطع الزمن المتقطع للمرشح المثالي المتقطع زمنياً المنفذ للترددات المنخفضة. العملية المكافئة لذلك في نطاق الزمن المتقطع هي الالتفاف في الزمن المتقطع المعرفة كالتالي :

$$X_s[n] = X_s[n] * (2\,F_c/F_s)sinc(2F_c n)$$

في التطبيقات العملية لعيننة الإشارات المتقطعة زمنياً، فإنه ليس هناك معنى لاستعادة كل القيم الصفرية بين نقاط العيننة، لأننا نعرف مسبقاً أنها أصفار. لذلك فمن الشائع توليد إشارة جديدة $x_d[n]$، التي بها فقط قيم الإشارة المتقطعة زمنياً $x_s[n]$ عند مضاعفات صحيحة من فترة العيننة N_s. عملية تكوين هذه الإشارة الجديدة تسمى التقسيم أو الاستنفاد. لقد تم شرح عملية التقسيم في الفصل ٣. العلاقة بين هذه الإشارات ستكون كالتالي :

$$X_d[n] = X_s[N_s n] = X[N_s n]$$

هذه العملية هي عملية تحجيم زمني متقطعة زمنياً التي عندما تكون $N_s>1$، تسبب انضغاطاً زمنياً متقطع زمنياً والتأثير المقابل لذلك في النطاق الزمني الترددي المتقطع سيكون تمدداً ترددياً متقطع زمنياً. DTFT للإشارة $x_d[n]$ سيكون :

$$X_d(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_d[n]e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_s[N_S n]e^{-j2\pi Fn}$$

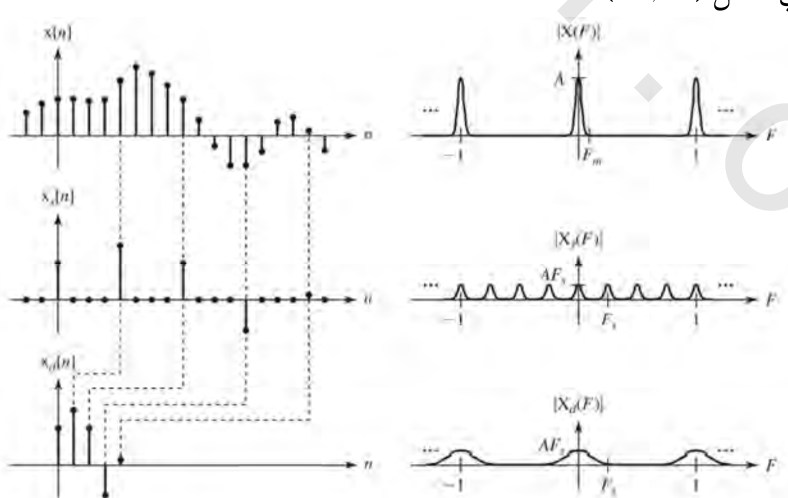
يمكننا إجراء تعديل في المتغيرات كالتالي $m=N_s n$ وبالتالي :

$$X_d(F) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ m \text{ رقم صحيح من } N_s}}^{\infty} X_s[m]e^{-j2\pi Fm/N_s}$$

الآن باعتبار مميزات حقيقة أن كل قيم $x_s[n]$تكون بين القيم المسموحة وهي، أن m تساوي مضاعفاً صحيحاً من N_s، تكون صفراً، فإنه يمكننا تضمين هذه الأصفار في المجموع لتعطي مايلي :

$$X_d(F) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_s[m]e^{-j2\pi(F/N_s)m} = X_s(F/N_s)$$

وبالتالي فإن DTFT للإشارة المقسمة، أو المهملة يكون نسخة محجمة من DTFT المتقطع زمنياً وترددياً من الإشارةالمعيننة كما في شكل (١٠،٤٩).



شكل رقم (١٠،٤٩) مقارنة بين تأثيرات النطاق المتقطع زمنياً والنطاق المتقطع زمنياً وترددياً على العيننة والتقسيم

لاحظ بحرص أن DTFT للإشارة المقسمة ليس نسخة محجمة متقطعة زمنياً وترددياً من DTFT للإشارة الأصلية، ولكنه بدلاً من ذلك نسخة محجمة متقطعة زمنياً وترددياً من DTFT لعينات من الإشارة الأصلية المتقطعة زمنياً.

إن تعبير العينة المخفضة downsampling يستخدم أحياناً بدلاً من تعبير التقسيم. هذا التعبير يأتي من فكرة أن الإشارة المتقطعة زمنياً قد نتجت عن طريق أخذ عينات من إشارة مستمرة زمنياً. إذا كانت الإشارة المستمرة زمنياً زائدة العينة بمعامل معين بالتالي، فإن الإشارة المتقطعة زمنياً يمكن تقسيمها، أو تخفيض عيناتها بالمعامل نفسه بدون فقد في المعلومات من الإشارة الأصلية المستمرة زمنياً، وبالتالي يتم إنقاص معدل العينة الفعلي أو تخفيضه.

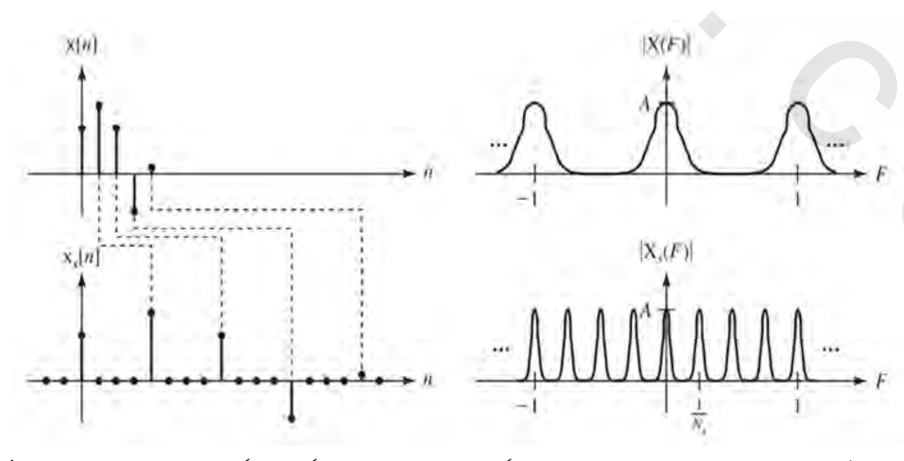
الاستيفاء

العكس من عملية التقسيم أو تخفيض العينة هوالاستيفاء أو رفع العينة، والعملية ببساطة تكون العملية العكسية من عملية التقسيم. أولاً يتم إدخال أصفار بين العينات، بعد ذلك يتم ترشيح هذه الإشارة الناتجة عن طريق مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة متقطع زمنياً. افترض أن الإشارة الأصلية المتقطعة زمنياً هي x[n] وافترض أن الإشارة الناتجة بعد زيادة N_s-1 من الأصفار بين العينات ستكون $x_s[n]$. وبالتالي يمكن كتابة ما يلي:

$$x_s[n] = \begin{cases} X[n/N_s], & n/N_s \text{ رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

هذا التعبير المتقطع زمنياً لـ x[n] لتشكيل أو تكوين $x_s[n]$ هو تماماً العكس من عملية الضغط المتقطع زمنياً للإشارة $x_s[n]$ لتكوين الإشارة $x_d[n]$ أثناء عملية التقسيم، ولذلك يجب أن نتوقع أن التأثير في النطاق المتقطع زمنياً وترددياً سيكون المعكوس أيضا. التوسيع المتقطع زمنياً بمعامل مقداره N_s يولد تضاغط متقطع زمنياً وترددياً بالمعامل نفسه كما يلي زكما في شكل رقم (١٠.٥٠):

$$X_s(F)=X(N_sF)$$



شكل رقم (١٠,٥٠) التأثيرات، في كل من النطاق المتقطع زمنياً والنطاق المتقطع زمنياً وترددياً، لإدخال عدد Ns-1 من الأصفار بين العينات

يمكن ترشيح الإشارة $x_s[n]$ بمرشح منفذ للترددات المنخفضة للاستيفاء بين القيم غير المساوية للصفر. إذا استخدمنا مرشحاً مثالياً منفذاً للترددات المنخفضة بمعامل تكبير يساوي واحداً بدالة العبور التالية :

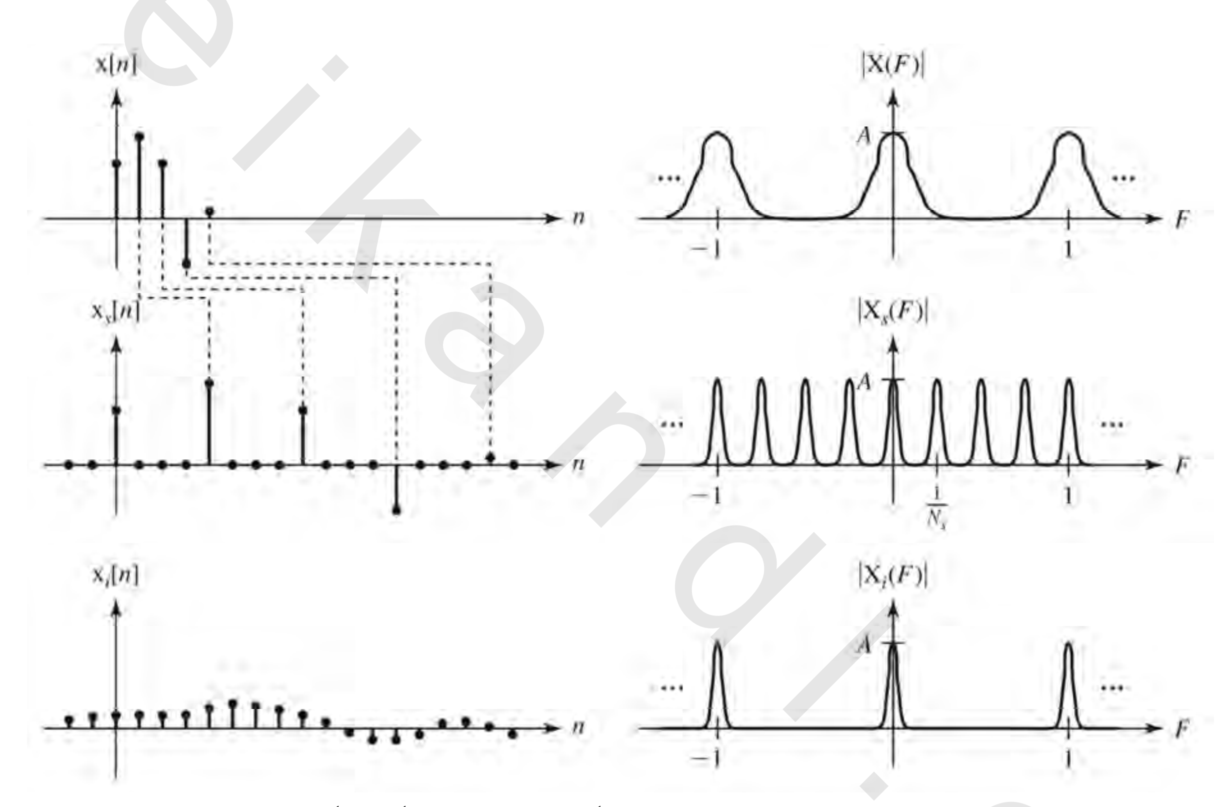
$$H(F) = rect(N_S F) * \delta_1(F),$$

فإننا سنحصل على إشارة مستوفاة كالتالي :

$$X_i(F) = X_S(F)[rect(N_S F) * \delta_1(F)]$$

والمكافئ لذلك في النطاق المتقطع زمنياً هو كالتالي وكما هو موضح في شكل (١٠,٥١) :

$$X_i[n] = X_S[n] * (1/N_1) sinc(n/N_s)$$



شكل رقم (١٠,٥١) مقارنة بين تأثيرات النطاق المتقطع زمنياً والنطاق المتقطع زمنياً وترددياً لعملية التوسع والاستيفاء

لاحظ أن الاستيفاء باستخدام المرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة، الذي معامل تكبيره واحد قد أدخل معامل تكبير مقداره $1/N_s$، مما يقلل من مقدار الإشارة المستوفاة $x_i[n]$ بالنسبة للإشارة الأصلية $x[n]$. يمكن تعويض هذا التأثير باستخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة معامل تكبيره يساوي N_s بدلاً من معامل تكبير الوحدة كما يلي :

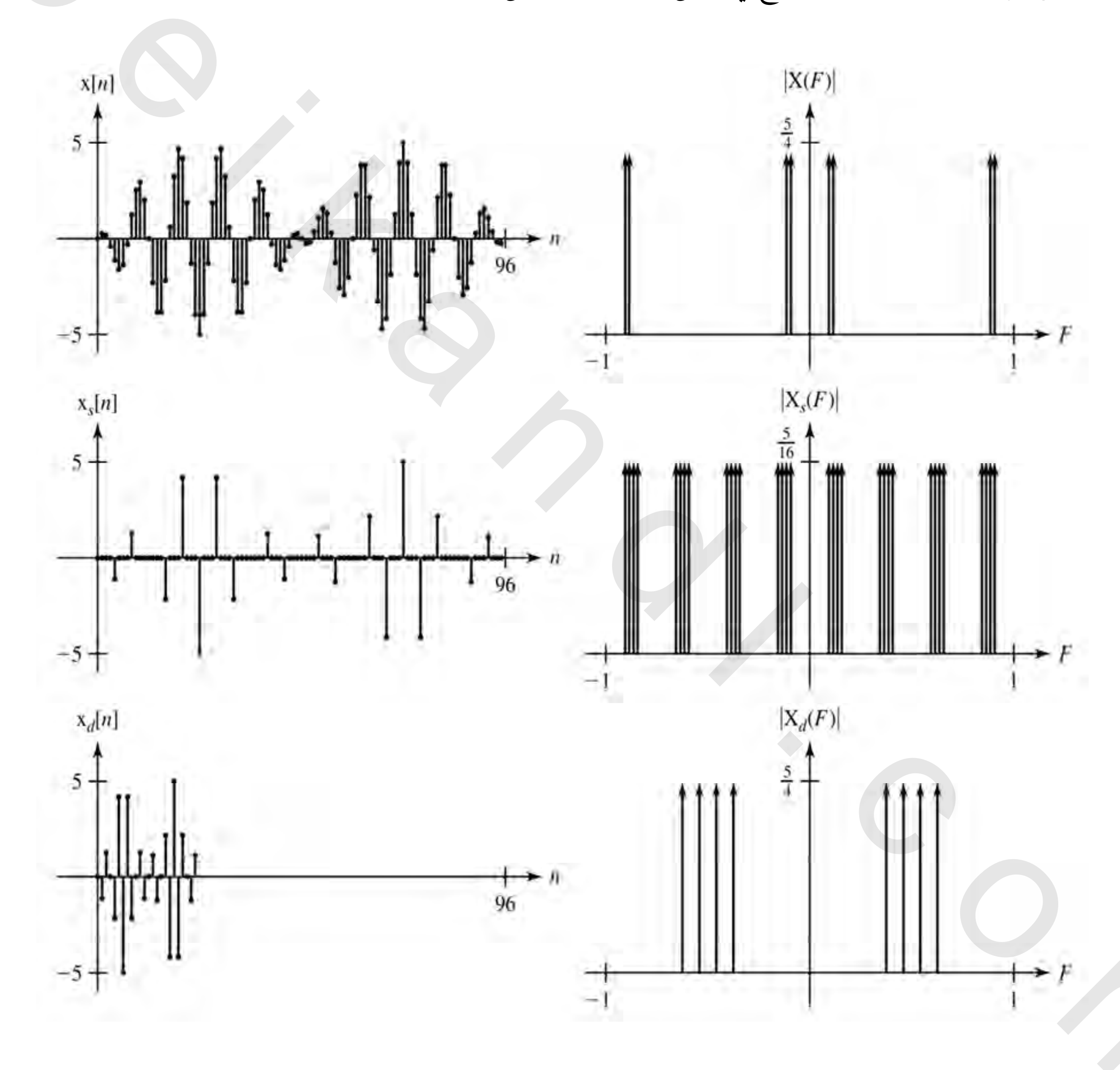
$$H(F) = N_s\, rect(N_S F) * \delta_1(F)$$

مثال ١٠,٦

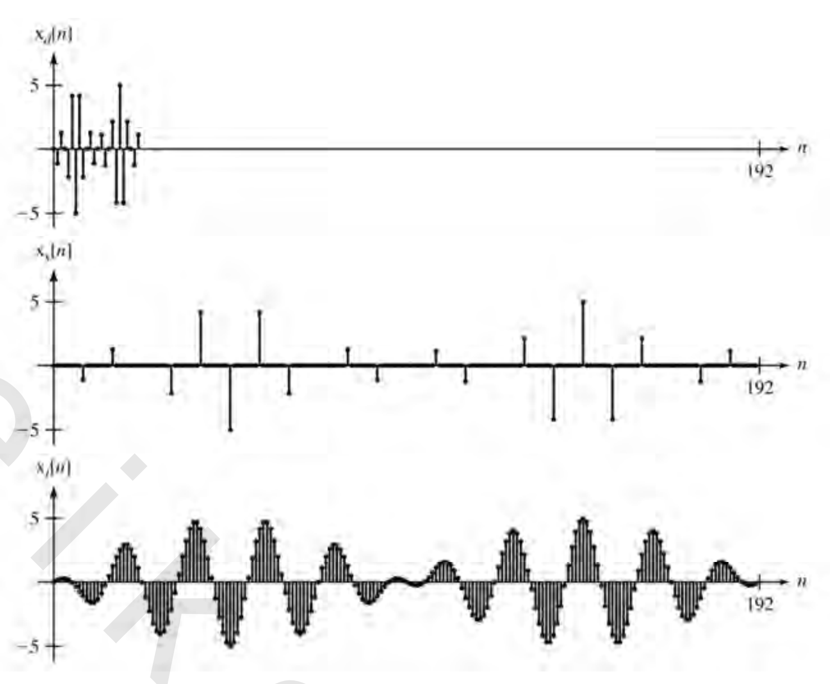
مطلوب أخذ عينات الإشارة التالية :

$$X(t) = 5\,sin(2000\pi t)cos(20,00\pi t)$$

بمعدل 80kHz على مدار دورة واحدة لتشكيل الإشارة المتقطعة زمنياً x[n]. خذ كل رابع عينة من x[n] لتكوين $x_s[n]$، وقسم أو خفض عيننة $x_s[n]$ لتكون الإشارة $x_d[n]$. بعد ذلك ارفع عيننة $x_d[n]$ بمعامل مقداره ثمانية لتكوين الإشارة $x_i[n]$ كما هو موضح في شكل (١٠,٥٢) وشكل (١٠,٥٣).



شكل رقم (١٠,٥٢) الإشارات المتقطعة زمنياً الأصلية وعيناتها والمقسمة و DTFT لها



شكل رقم (١٠,٥٣) الإشارات المتقطعة زمنياً المرشحة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة والمتقطع زمنياً والإشارة الأصلية وغير المعيننة

(١٠,٤) ملخص للنقاط المهمة

١- الإشارة المعيننة أو المعيننة صدمياً لها طيف فورير يكون نسخ متكررة دورياً لطيف الإشارة الأصلية التي عيننتها. كل تكرار يسمى نسخة مستعارة أو نسخة مزيفة.

٢- إذا كانت النسخ المستعارة في طيف الإشارة المعيننة لا تتداخل ، فإن الإشارة الأصلية يمكن استرجاعها من هذه العينات.

٣- إذا تمت عيننة الإشارة بمعدل أكبر من ضعف أكبر تردد في هذه الإشارة ، فإن النسخ المستعارة لن تتداخل.

٤- لا يمكن لإشارة أن تكون في الوقت نفسه محدودة زمنياً ومحدودة المجال.

٥- دالة الاستيفاء المثالية هي دالة السنك ولكن حيث إنها غير سببية ، فإنه عملياً يجب استخدام طرق أخرى.

٦- أي إشارة دورية محدودة المجال يمكن وصفها بالكامل بمجموعة محددة من الأرقام.

٧- CTFT لأي إشارة و DFT لعينات منها تكون متعلقة ببعضها بعضاً من خلال عمليات العيننة الزمنية ، والنوفذة ، والعيننة الترددية.

٨- يمكن استخدامل DFT لتقريب CTFT، و CTFS وعمليات معالجة الإشارات الشهيرة الأخرى ، ومع زيادة معدل العيننة و/أو عدد العينات فإن التقريب يكون أفضل.

٩- الطرق المستخدمة في عينة الإشارات المستمرة زمنياً يمكن استخدامها تقريباً بالطريقة نفسها في عينة الإشارات المتقطعة زمنياً، وهناك مفاهيم مماثلة لعرض المجال، وأقل معدل عينة، والنسخ المستعار، وهكذا.

تمارين مع إجاباتها

(في كل تمرين، تكون الإجابات مرتبة بطريقة عشوائية)

تعديل مقدار النبضة

١- مطلوب أخذ عينات الإشارة التالية:

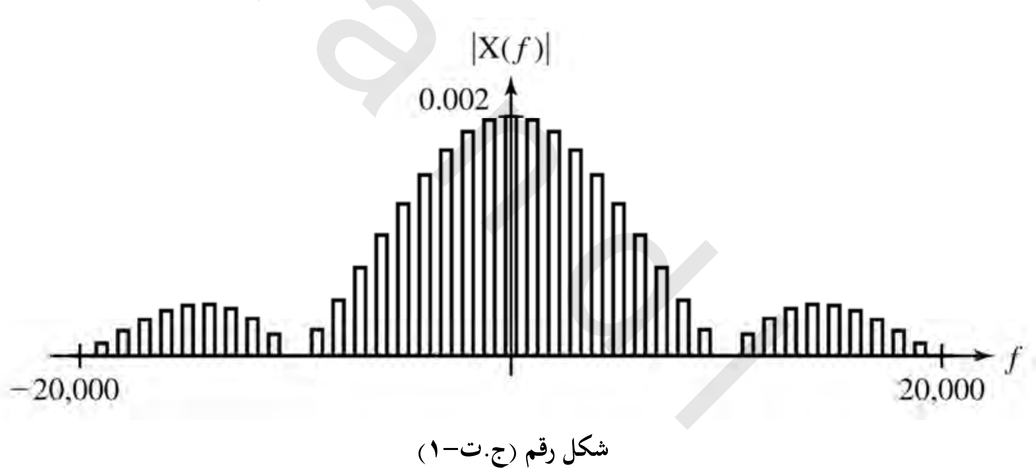
$$X(t) = 10\, sinc(500t)$$

عن طريق ضربها في طابور النبضات التالي:

$$P(t) = rect(10^4 t) * \delta_{0.001}(t)$$

وذلك لتكوين الإشارة $x_p(t)$. ارسم مقدار CTFT للإشارة $x_p(t)$ وهو Xp(f).

الإجابة:



شكل رقم (ج.ت-١)

٢- افترض الإشارة:

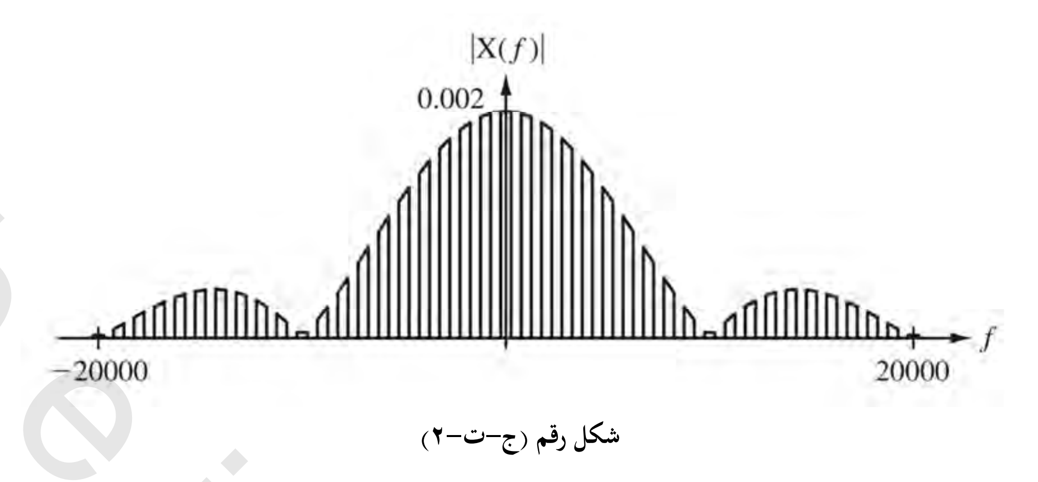
$$X(t) = 10\, sinc(500t)$$

كما في تمرين 1 وكون الإشارة التالية:

$$X_p(t) = [1000\, X(t) \times 0.001\delta_{0.001}(t)] * rect(10^4 t)$$

ارسم الدالة Xp(f) التي تمثل مقدار CTFT للدالة $x_p(t)$ وقارنها مع نتيجة التمرين 1.

الإجابة:



شكل رقم (ج−ت−٢)

أخذ العينات

٣− إشارة $x(t)=25\sin(200\pi t)$ تم عيننتها بمعدل 300Hz بحيث أن أول عينة تكون عند t=0. فما هي قيمة العينة رقم ٥ ؟

الإجابة: 21.651

٤− إشارة $x(t)=4\cos(20\pi t)$ تم أخذ عيناتها صدمياً بمعدل 40Hz لتكوين $x_s(t)$ ؟

(أ) ما هو أول تردد موجب فوق 10Hz تكون عنده $X_s(f)$ لا تساوي الصفر ؟

(ب) إذا تم ترشيح $x_s(t)$ بمرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة، ما هو أعلى تردد ركني للمرشح الذي يمكن أن ينتج استجابة جيبية ؟

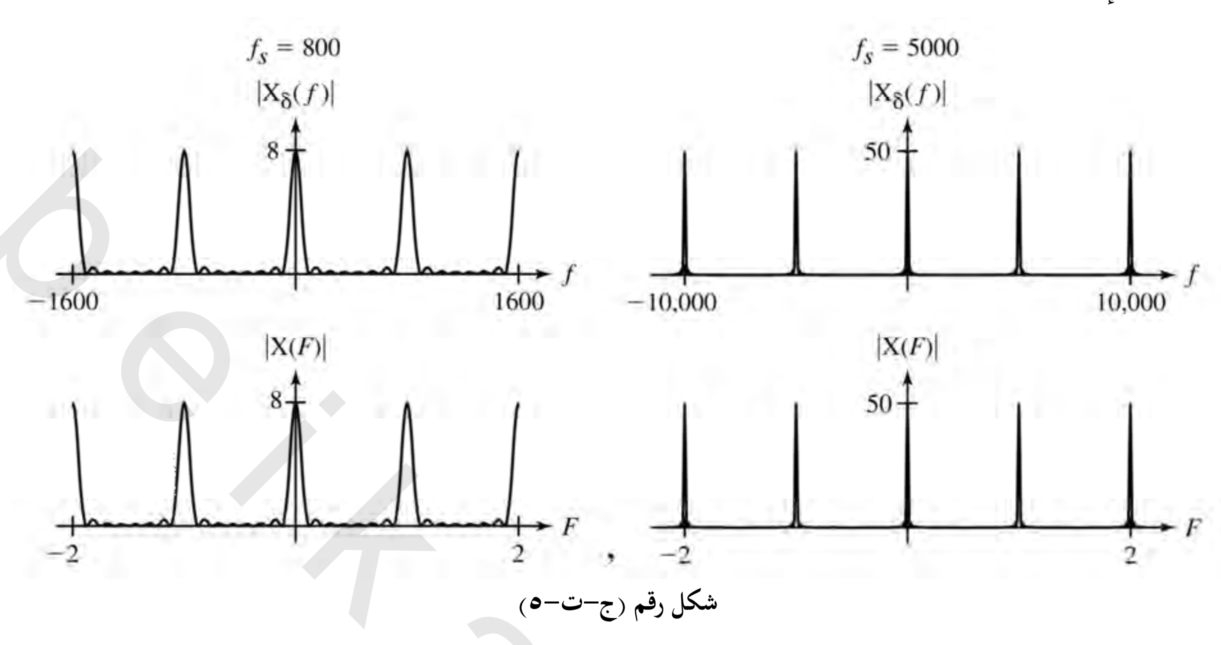
(ج) إذا تم ترشيح $x_s(t)$ بمرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة، ما هو أعلى تردد ركني للمرشح لا ينتج عنه أي استجابة ؟

(د) غير معدل العيننة إلى 12Hz وكرر الأجزاء (أ) و (ب) و (ت) ؟

الإجابة: 14 و 10 و 30 و 10 و 2 و 30٠٣

٥− افترض الإشارة $x(t)=\text{tri}(100t)$، كون الإشارة $x[n]$ عن طريق عينة $x(t)$ بمعدل $f_s=800$ وكون إشارة معلوماتية صدمية مكافئة $x_\delta(t)$ عن طريق ضرب $x(t)$ في تتابع دوري من صدمات الوحدة التي يكون ترددها الأساسي هو نفسه $f_0=f_s=800$. ارسم مقدار DTFT للإشارة $x[n]$ والـ CTFT للإشارة $x_\delta(t)$. غير معدل العيننة إلى $f_s=5000$ وكرر.

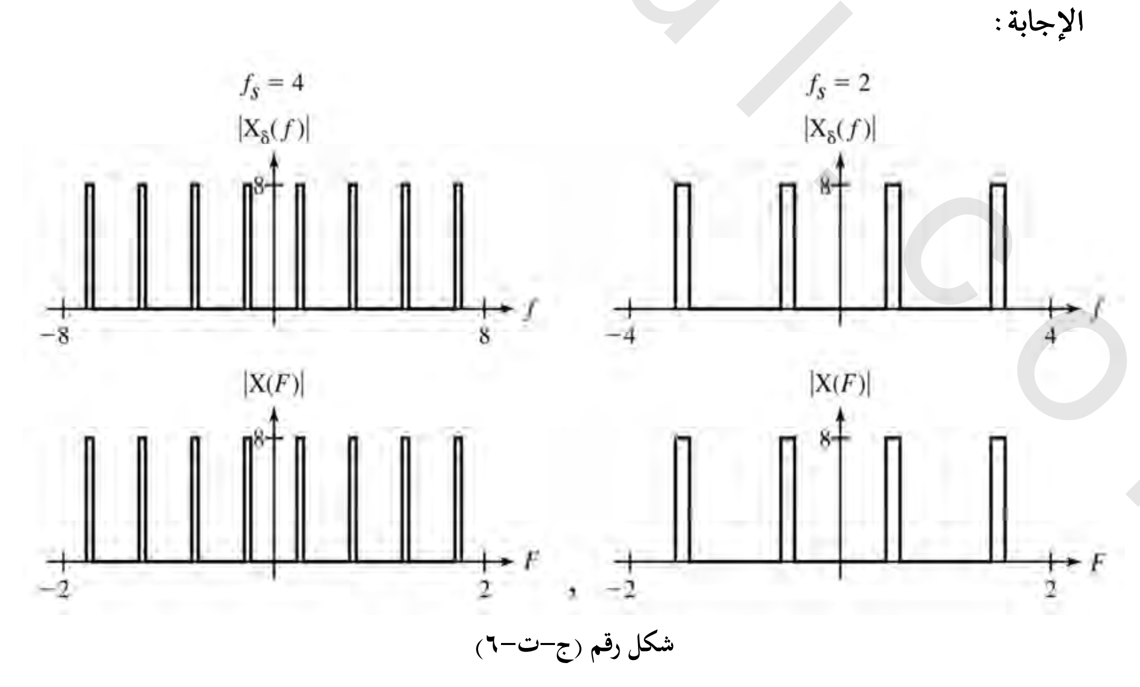
الإجابة :



شكل رقم (ج–ت–٥)

٦- إفترض الإشارة محدودة المجال $x(t)=sinc(t/4)cos(2\pi t)$ ، كون الإشارة $x[n]$ عن طريق عينة $x(t)$ بالمعدل $f_s=4$ وكون إشارة متكافئة المعلومات صدمية $x_\delta(t)$ عن طريق ضرب $x(t)$ في التتابع الدوري من صدمات الوحدة التي ترددها الأساسي هو نفسه $f_0=f_s=4$. ارسم مقدار DTFT للإشارة $x[n]$ و CTFT للإشارة $x_\delta(t)$. غير معدل العينة إلى $f_s=2$ وكرر.

الإجابة :



شكل رقم (ج–ت–٦)

العيننة الصدمية

٧- لكل إشارة x(t)، أوجد عيناتها الصدمية عند المعدل المحدد بضربها في الصدمة الدورية $\delta_{T_s}(t)\left(T_s = \frac{1}{f_s}\right)$ وارسم هذه الإشارات المعيننة صدمياً $x_\delta(t)$ على المدى الزمني المحدد، وارسم أيضاً مقدار وزاوية $X_\delta(f)$ التي تمثل الـ CTFT على المدى الترددي المحدد:

(أ) $X(t) = rect(100t), f_s = 1100$

$-20\ ms < t < 20\ ms, -3kHz < f < 3kHz$

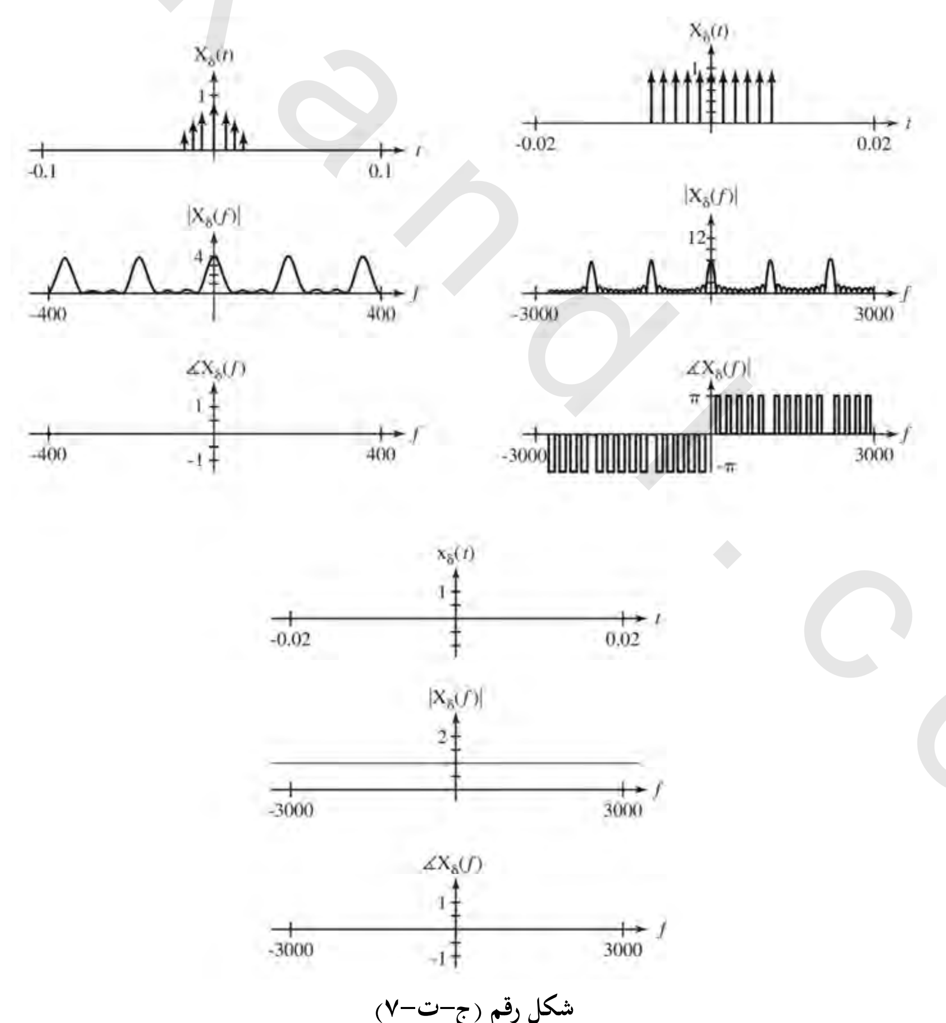
(ب) $X(t) = rect(100t), f_s = 110$

$-20\ ms < t < 20\ ms, -3kHz < f < 3kHz$

(ج) $X(t) = tri(45t), f_s = 180$

$-100\ ms < t < 100\ ms, -400 < f < 400$

الإجابة:

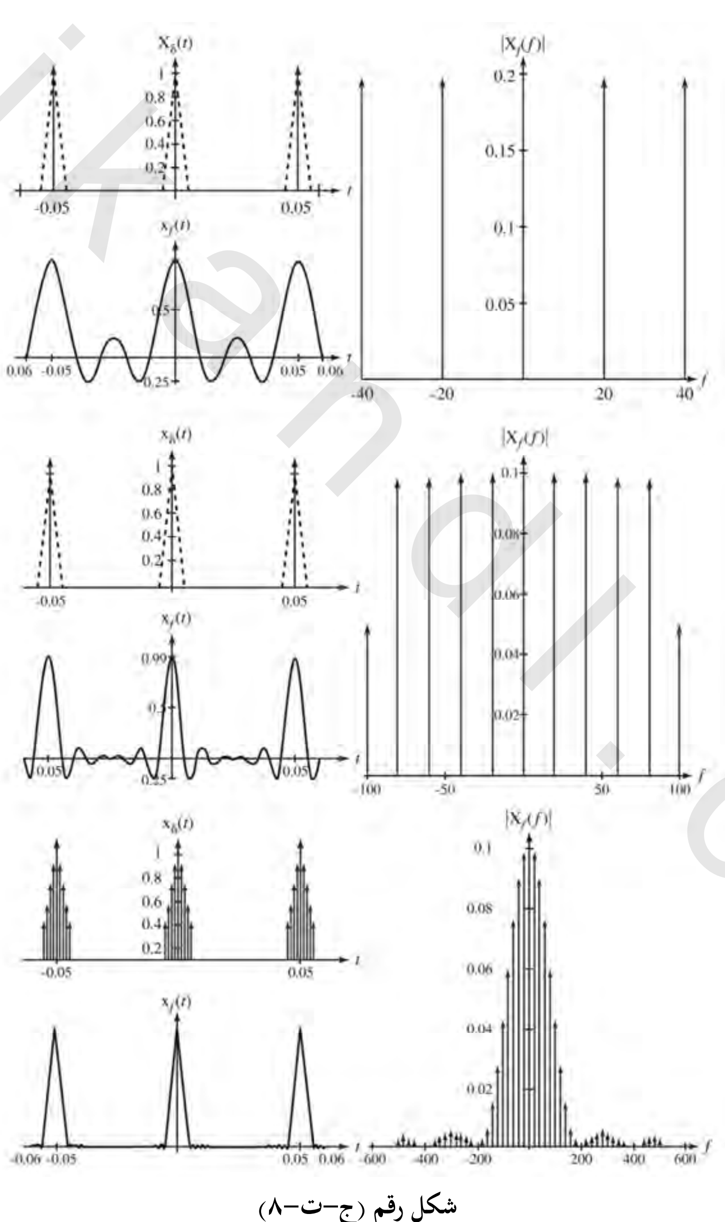


شكل رقم (ج–ت–٧)

٨- افترض الإشارة $x(t)=tri(200t)*\delta_{0.05}(t)$ ، مطلوب عينة هذه الإشارة صدمياً بالمعدل f_s المحدد بضربها في الصدمات الدورية التي على الصورة $\delta_{T_s}(t)\left(T_s=\frac{1}{f_s}\right)$. بعد ذلك رشح الإشارة المعينة صدمياً $x_\delta(t)$ باستخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة له معامل تكبير يساوي Ts في مجال التمرير وتردده الركني يساوي تردد نيكويست. ارسم الإشارة x(t) واستجابة المرشح المنفذ للترددات المنخفضة $x_f(t)$ على المدى الزمني التالي $-60ms<t<60ms$.

(أ) $f_s=1000$ (ب) $f_s=200$ (ت) $f_s=100$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٨)

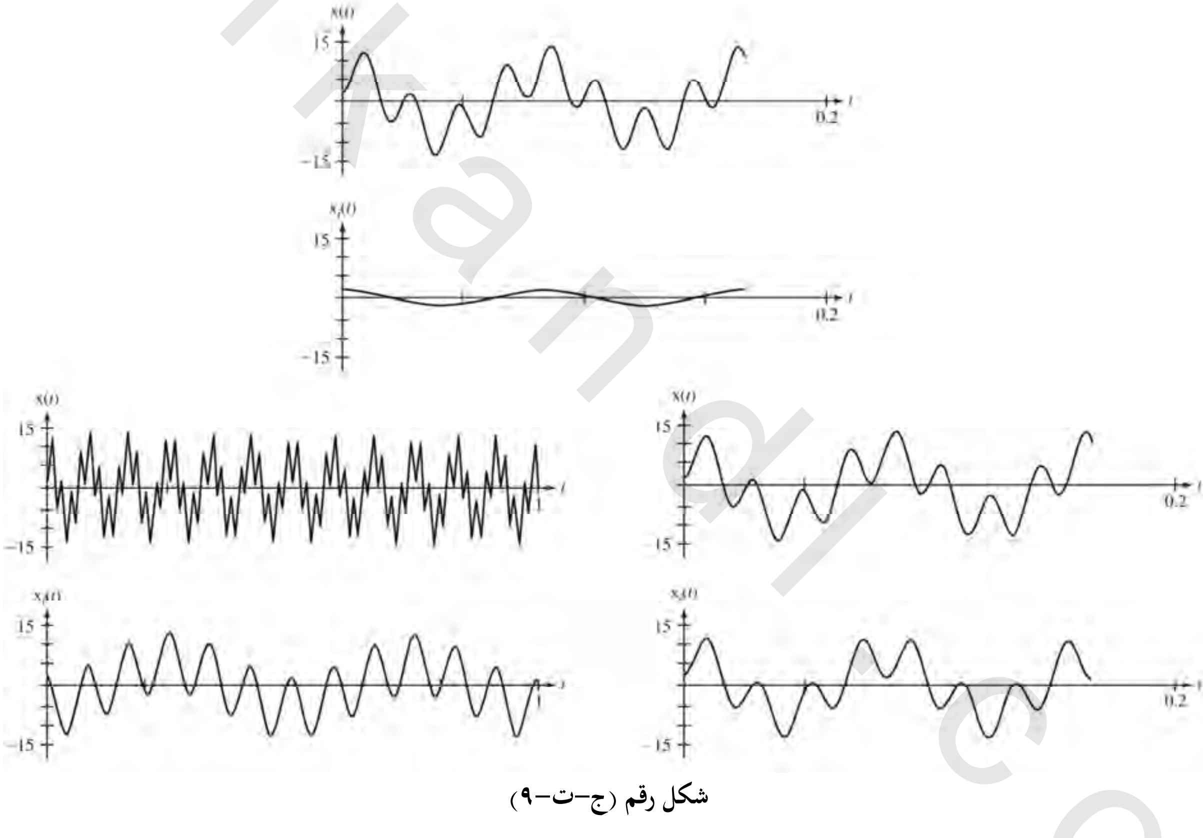
٩- افترض الإشارة $x(t)=8\cos(24\pi t) - 6\cos(104\pi t)$ ، مطلوب عيننة هذه الإشارة صدمياً بالمعدل المحدد بضربها في الصدمات الدورية التي على الصورة $\delta_{T_s}(t)\left(T_s = \frac{1}{f_s}\right)$. بعد ذلك رشح الإشارة المعيننة صدمياً باستخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة له معامل تكبير يساوي Ts في مجال التمرير وتردده الركني يساوي تردد نيكويست. ارسم الإشارة $x(t)$ واستجابة المرشح المنفذ للترددات المنخفضة $x_i(t)$ على مدى دورتين أساسيتين لـ $x_i(t)$.

(أ) $f_s=100$

(ب) $f_s=50$

(ج) $f_s=40$

الإجابة:



شكل رقم (ج-ت-٩)

معدلات نيكويست

١٠- أوجد معدلات نيكويست للإشارات التالية:

(أ) $X(t) = sinc(20t)$

(ب) $X(t) = 4sinc^2(100t)$

(ت) $X(t) = 8sin(50\pi t)$

(ث) $X(t) = 4sin(30\pi t) + 3\,cos(70\pi t)$

(ج) $X(t) = rect(300t)$

(ح) $X(t) = -10sin(40\pi t)cos(300\pi t)$

(خ) $X(t) = sinc(t/2)\delta_{10}(t)$

(د) $X(t) = sinc(t/2)\delta_{0.1}(t)$

الإجابة: 200 و 340 و 70، غير محدد و 50 و 0.4 و غير محدد و 20.

الإشارات المحددة زمنياً والمحددة مجاليا

١١- ارسم الإشارات التالية المحددة زمنياً. أوجد وارسم CTFT لكل منها وتأكد من أنها ليست محددة المجال:

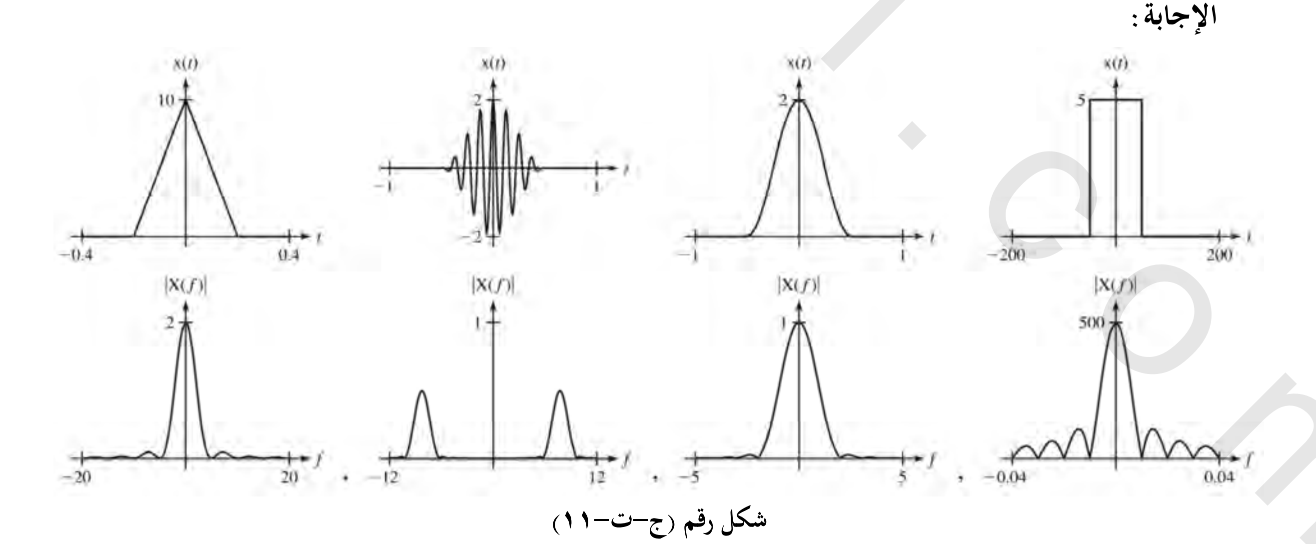
(أ) $X(t) = 5\,rect(t/100)$

(ب) $X(t) = 10\,tri(5t)$

(ت) $X(t) = rect(t)[1 + cos(2\pi t)]$

(ث) $X(t) = rect(t)[1 + cos(2\pi t)]cos(16\pi t)$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–١١)

١٢- ارسم مقدار CTFT التالي للإشارات محددة المجال وأوجد وارسم CTFT العكسي لكل منها. تأكد من أن هذه الإشارات لن تكون محددة زمنياً:

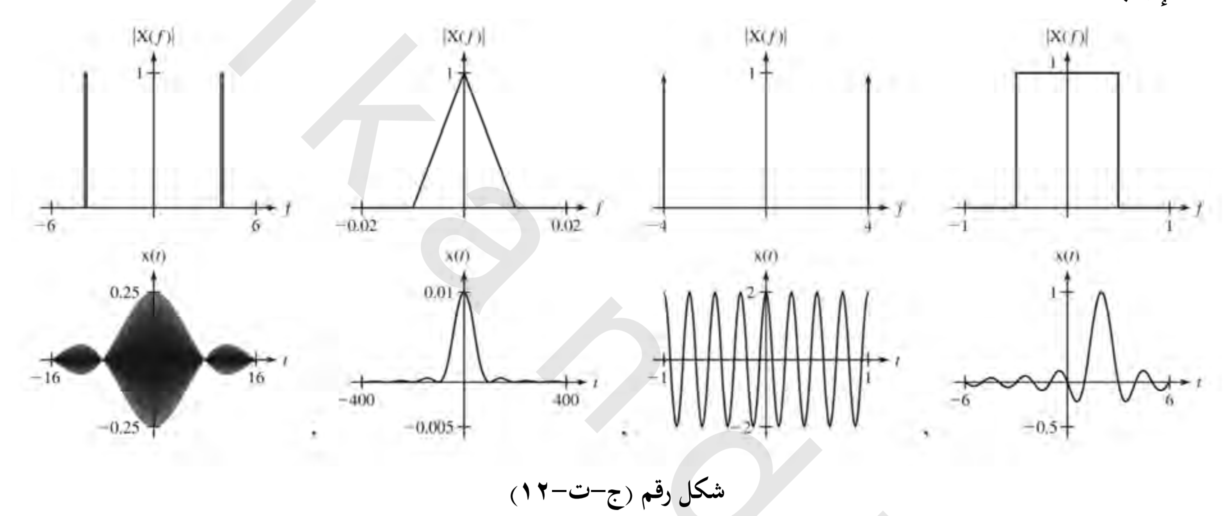
(أ) $X(f) = rect(f)e^{-j4\pi f}$

(ب) $X(f) = tri(100f)e^{j\pi f}$

(ت) $X(f) = \delta(f-4) + \delta(f+4)$

(ث) $X(f) = j[\delta(f+4) - \delta(f-4)] * rect(8f)$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–١٢)

الاستيفاء

١٣- مطلوب عينة الإشارة x(t)=sin(2πt) بمعدل عينة f_s. بعد ذلك باستخدام ماتلاب، ارسم الاستيفاء بين هذه العينات في المدى الزمني 1<t<1- باستخدام التقريب التالي:

$$y(t) \cong 2(f_c/f_s)\sum_{n=-N}^{N} X(nT_s)\, sinc\big(2f_c(t-nT_s)\big)$$

وذلك مع القيم التالية لكل من f_s و f_c و N:

(أ) $f_s = 4,\ f_c = 2,\ N = 1$

(ب) $f_s = 4,\ f_c = 2,\ N = 2$

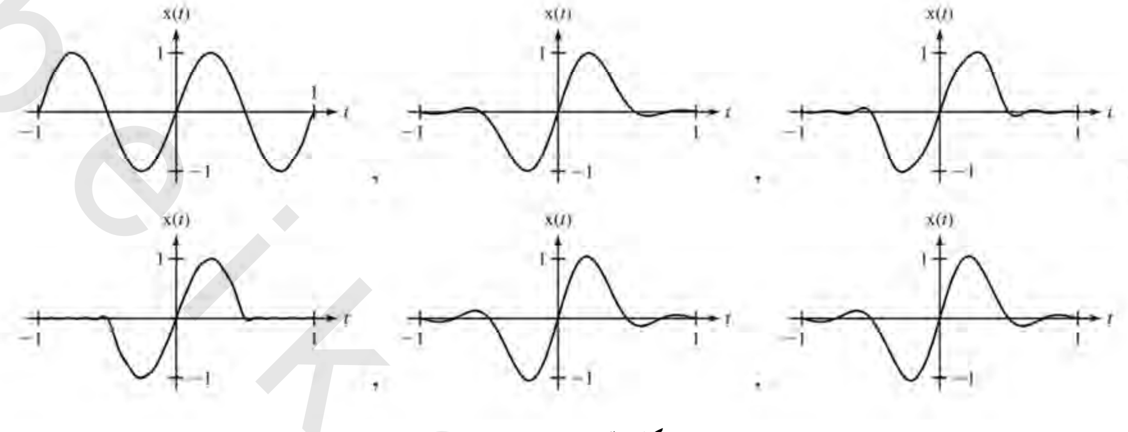
(ت) $f_s = 8,\ f_c = 4,\ N = 4$

(ث) $f_s = 8,\ f_c = 2,\ N = 4$

(ج) $f_s = 16,\ f_c = 8,\ N = 8$

(ح) $f_s = 16,\ f_c = 8,\ N = 16$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–١٣)

١٤- لكل إشارة وكل معدل عيننة فيما يلي، ارسم الإشارة الأصلية واستيفاء بين عينات الإشارة باستخدام مسك من الدرجة صفر، على المدى الزمني 1>t>1-. (دالة ماتلاب stairs من الممكن أن تكون مفيدة هنا):

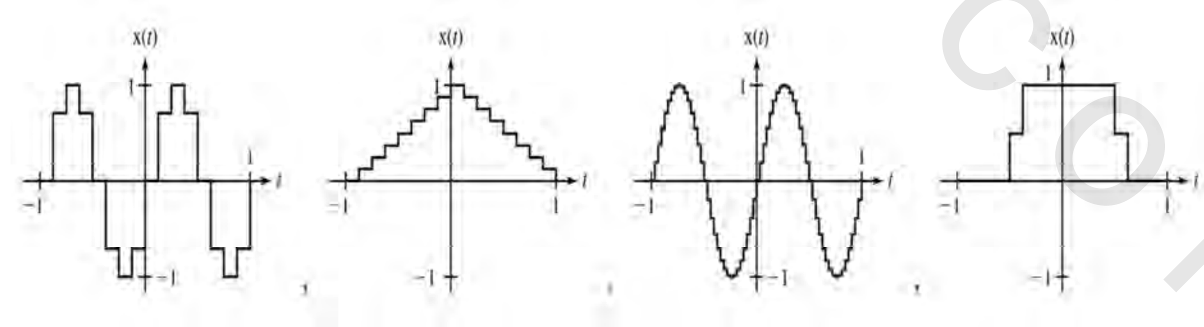
(أ) $X(t) = sin(2\pi t), f_s = 8$

(ب) $X(t) = sin(2\pi t), f_s = 32$

(ت) $X(t) = rect(t), f_s = 8$

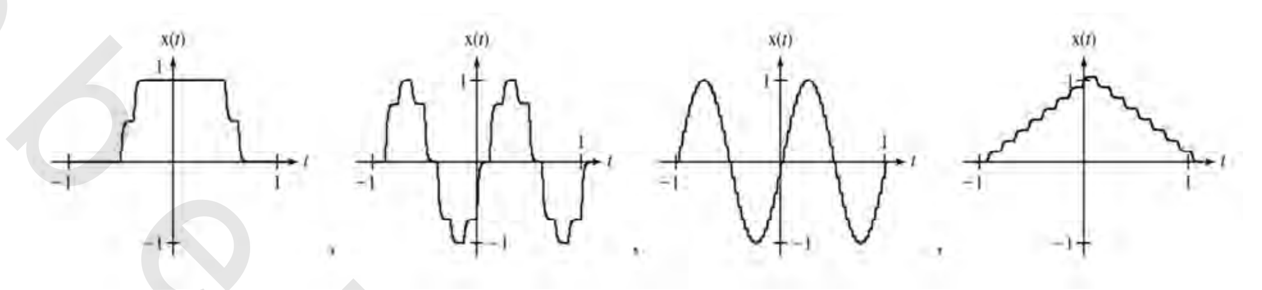
(ث) $X(t) = tri(t), f_s = 8$

الإجابة:



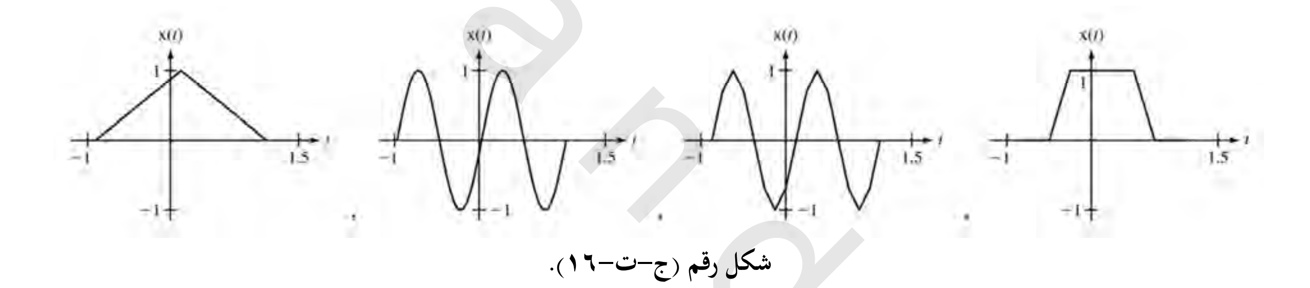
شكل رقم (ج–ت–١٤)

١٥- لكل إشارة في تمرين ١٤ ، استخدم مرشح منفذ للترددات المنخفضة لترشيح الإشارة المستوفاة بالمسك من الدرجة صفر باستخدام مرشح له قطب واحد وتردد الـ 3dB- يساوي ربع معدل العيننة.



شكل رقم(ج–ت–١٥).

١٦- أعد تمرين ١٤ مع استخدام مسك من الدرجة الأولى بدلاً من المسك من الدرجة الصفرية.



شكل رقم (ج–ت–١٦).

النسخ المستعارة (التزوير)

١٧- مطلوب عيننة الإشارتين $x_1(t) = e^{-t^2}$ و $x_1(t) = e^{-t^2} + \sin(8\pi t)$ في الفترة الزمنية التالية: 3>t>3- عند 8Hz ووضح أن قيم العينات في الإشارتين تكون هي نفسها.

١٨- لكل زوج من الإشارات التالية، خذ العينات عند المعدل المحدد وأوجد DTFT للإشارات المعيننة. في كل حالة، اشرح عن طريق فحص الـ DTFT لكل إشارتين، لماذا تكون الإشارتان هما نفسيهما:

(أ) $X(t) = 4\,cos(16\pi t)\ and\ X(t)4\,cos(76\pi t), f_s = 30$

(ب) $X(t) =\ 6sinc(8t)\ \ and\ X(t) =\ 6sinc(8t)cos(400\pi t), f_s = 100$

(ج) $X(t) = 9cos(14\pi t)\ and\ X(t) = 9cos(98\pi t), f_s = 56$

الإجابة:

$75\, rect(25F/2) * \delta_1(F), 2[\delta_1(F-8/30)+\delta_1(F+8/30)](9/2)[\delta_1(F-1/8)+\delta_1(F+1/8)]$

١٩- لكل دالة جيبية، أوجد أوجد دالتين جيبيتين آخرتين تكون تردداتهما أقرب ما يمكن من الدالة الجيبية المعطاة، والتي عند عينتها عند معدل معين يكون لها العينات نفسها تماماً:

(أ) $X(t) = 4\cos(8\pi t), f_s = 20$

(ب) $X(t) = 4\sin(8\pi t), f_s = 20$

(ج) $X(t) = 2\sin(-20\pi t), f_s = 50$

(د) $X(t) = 2\cos(-20\pi t), f_s = 50$

(هـ) $X(t) = 5\cos(30\pi t + \pi/4), f_s = 50$

الإجابة:

$-2\sin(-80\pi t) and\ 2\sin(-120\pi t), 5\cos(130\pi t+\pi/4)\ and\ 5\cos(-70\pi t+\pi/4),\ 4\sin(48\pi t)\ and\ -4\sin(32\pi t), 2\cos(80\pi t)\ and\ 2\cos(-120\pi t), 4\cos(48\pi t)\ and\ 4\cos(32\pi t)$

الإشارات الدورية محدودة النطاق

٢٠- مطلوب أخذ عينات الإشارات x(t) التالية لتكوين الإشارات x[n]. خذ العينات عند معدل نيكويست وبعد ذلك عند المعدل الأعلى التالي الذي تكون عنده f_s/f_0 رقماً صحيحاً (مما يعني أن زمن العينة الكلي مقسوماً على الزمن بين العينات يكون أيضاً رقماً صحيحاً). ارسم هذه الإشارات ومقادير CTFT للإشارات المستمرة زمنياً، و DTFT للإشارات المتقطعة زمنياً.

(أ) $X(t) = 2\sin(30\pi t) + 5\cos(18\pi t)$

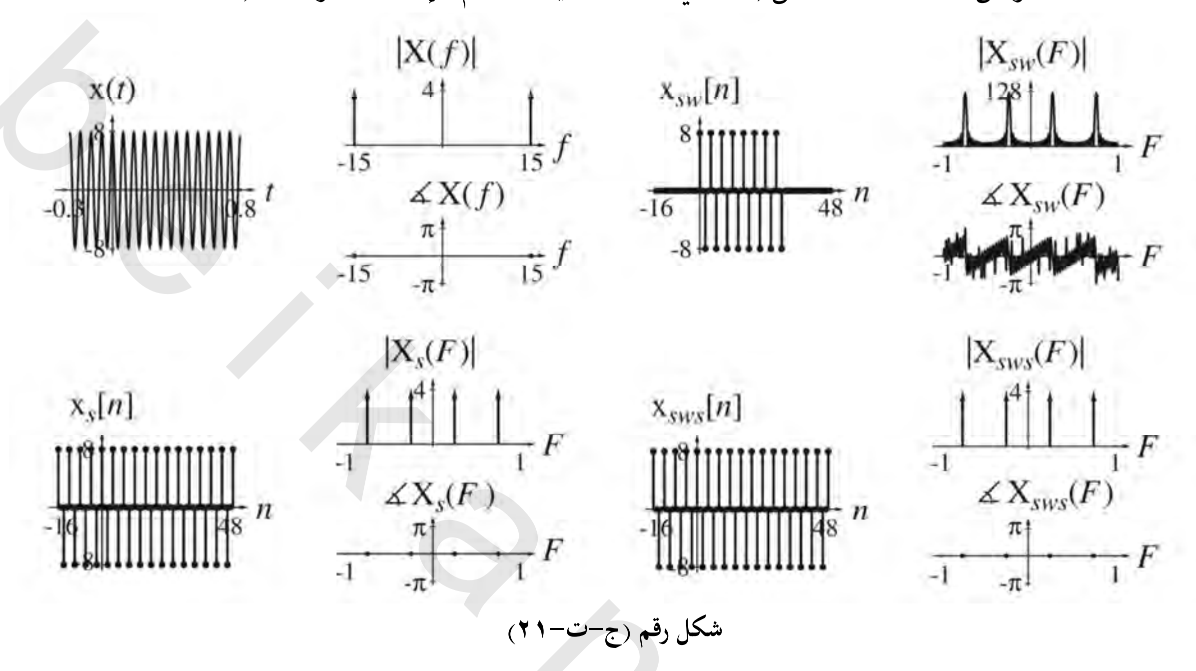
(ب) $X(t) = 6\sin(6\pi t)\cos(24\pi t)$

الإجابة:

شكل رقم (ج–ت–٢٠)

العلاقات بين CTFT وCTFS وDFT

٢١- ابدأ بالإشارة $x(t)=8\cos(30\pi t)$، ثم خذ عيناتها، ثم نوقذها، ثم كررها دورياً باستخدام معدل العينة $f_s=60$ وعرض النافذة $N=32$. لكل إشارة في هذه العملية، ارسم الإشارة وتحويلها، إما CTFT أو DTFT.



شكل رقم (ج-ت-٢١)

٢٢- مطلوب عينة كل إشارة $x(t)$ عدد N من العينات بالمعدل f_s لتوليد الإشارة $x[n]$. ارسم الدالة $x(t)$ مع الزمنt و $x[n]$ مع nT_s على الفترة الزمنية $0<t<NT_s$. أوجد $X[k]$ التي تمثل الـ DFT لـ N من العينات. ثم ارسم مقدار وزاوية $X(f)$ مع f و $T_sX[k]$ مع $k\Delta f$ على المدى الترددي التالي: $-f_s/2<f<f_s/2$ حيث $\Delta f=f_s/N$. ارسم $T_sX[k]$ كدالة مستمرة في $k\Delta f$ باستخدام الدالة plot في ماتلاب:

(أ) $X(t) = 5rect(2(t-2)),\ f_s = 16,\ N = 64$

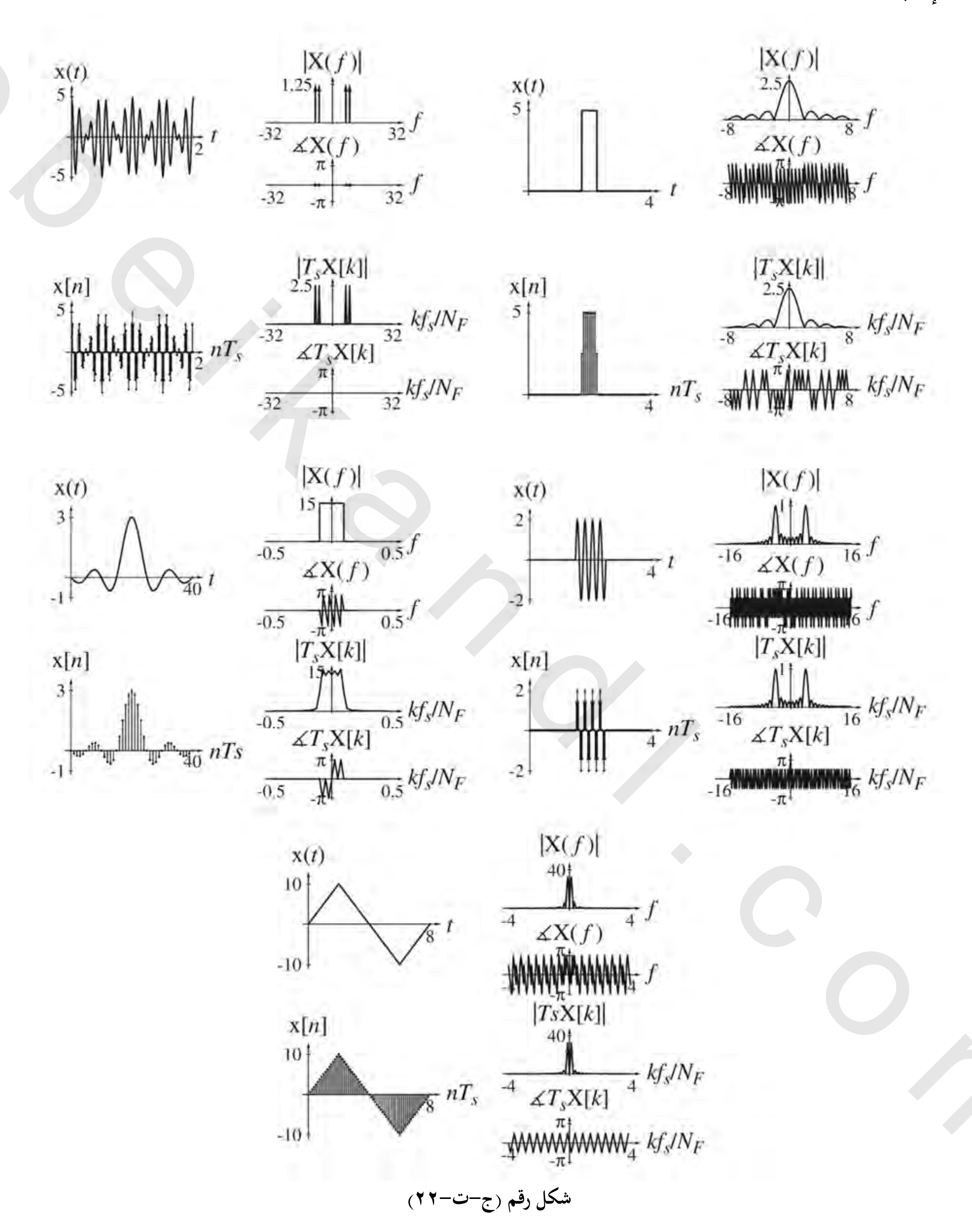
(ب) $X(t) = 3sinc((t-20)/5),\ f_s = 1,\ N = 40$

(ت) $X(t) = 2rect(t-2)sin(8\pi t),\ f_s = 32,\ N = 128$

(ث) $X(t) = 10\left[tri\left(\frac{t-2}{2}\right) - tri\left(\frac{t-6}{2}\right)\right],\ f_s = 8,\ N = 64$

(ج) $X(t) = 5cos(2\pi t)cos(16\pi t),\ f_s = 64,\ N = 128$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٢٢)

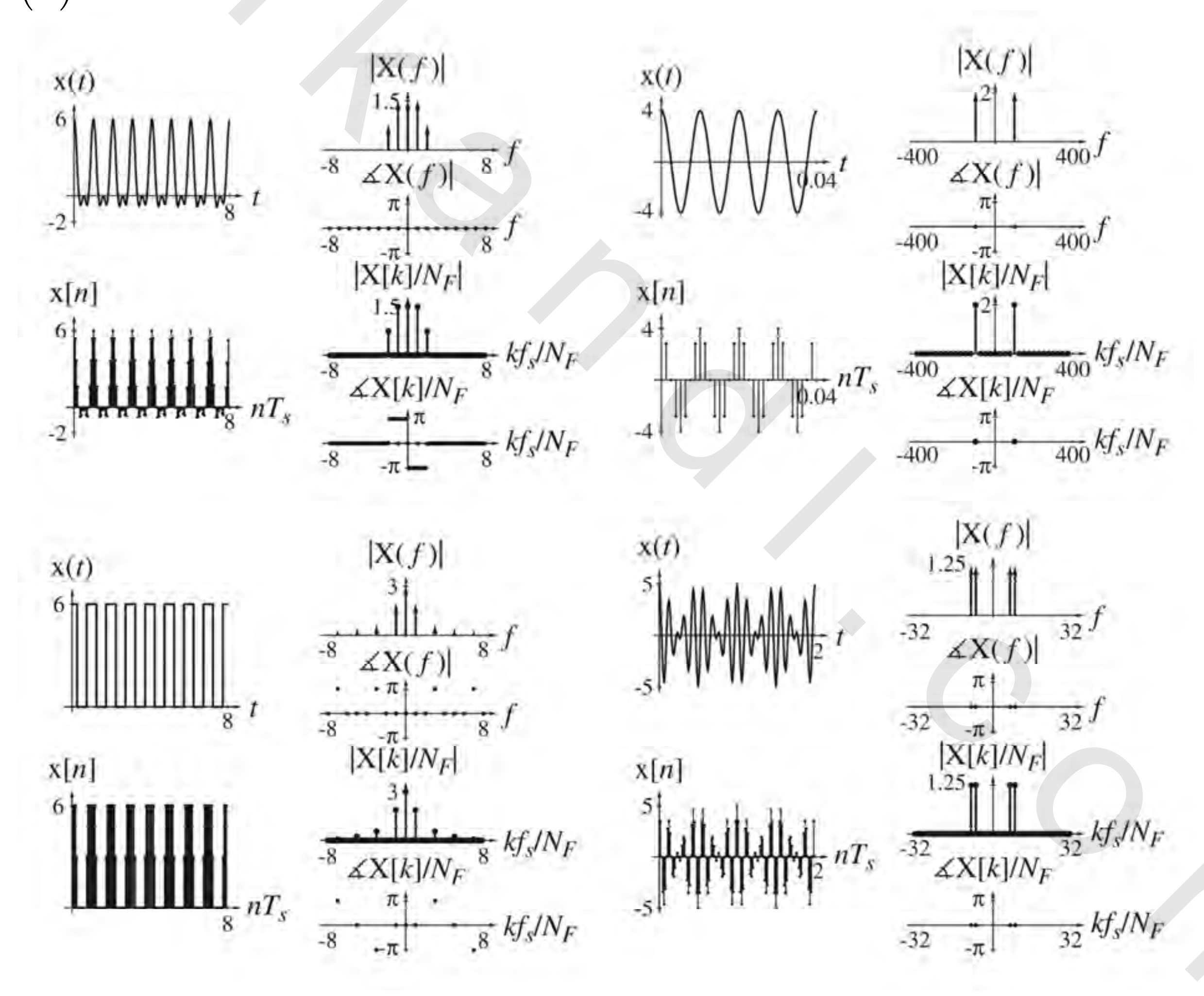
٢٣- مطلوب عينة كل إشارة x(t) عدد N من العينات بالمعدل f_s لتوليد الإشارة x[n]. ارسم الدالة x(t) مع الزمن t و x[n] مع nT_s على الفترة الزمنية $0<t<NT_s$. أوجد X[k] التي تمثل الـ DFT لـ N من العينات. ثم ارسم مقدار وزاوية X(f) مع f و X[k]/N مع $k\Delta f$ على المدى الترددي التالي: $-f_s/2<f<f_s/2$ حيث $\Delta f=f_s/N$. ارسم X[k]/N كدالة صدمة في $k\Delta f$ باستخدام الدالة stem في ماتلاب لتمثيل الصدمات:

(أ) $X(t) = 4cos(200\pi t),\ f_s = 800,\ N = 32$

(ب) $X(t) = 6rect(2t) * \delta_1(t),\ f_s = 16,\ N = 128$

(ت) $X(t) = 6sinc(4t) * \delta_1(t),\ f_s = 16,\ N = 128$

(ث) $X(t) = 5cos(2\pi t)cos(16\pi t),\ f_s = 64,\ N = 128$



شكل رقم (ج–ت–٢٣)

النوافذ

٢٤- أحياناً يتم استخدام أشكال مختلفة عن النافذة المستطيلة. باستخدام ماتلاب أوجد وارسم مقادير DFT لهذه النوافذ مع N=32.

(أ) نافذة فون هان، أو نافذة هاننج Hanning

$$w[n] = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right], 0 \leq n < N$$

(ب) نافذة بارتليت Bartlett

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n < N \end{cases}$$

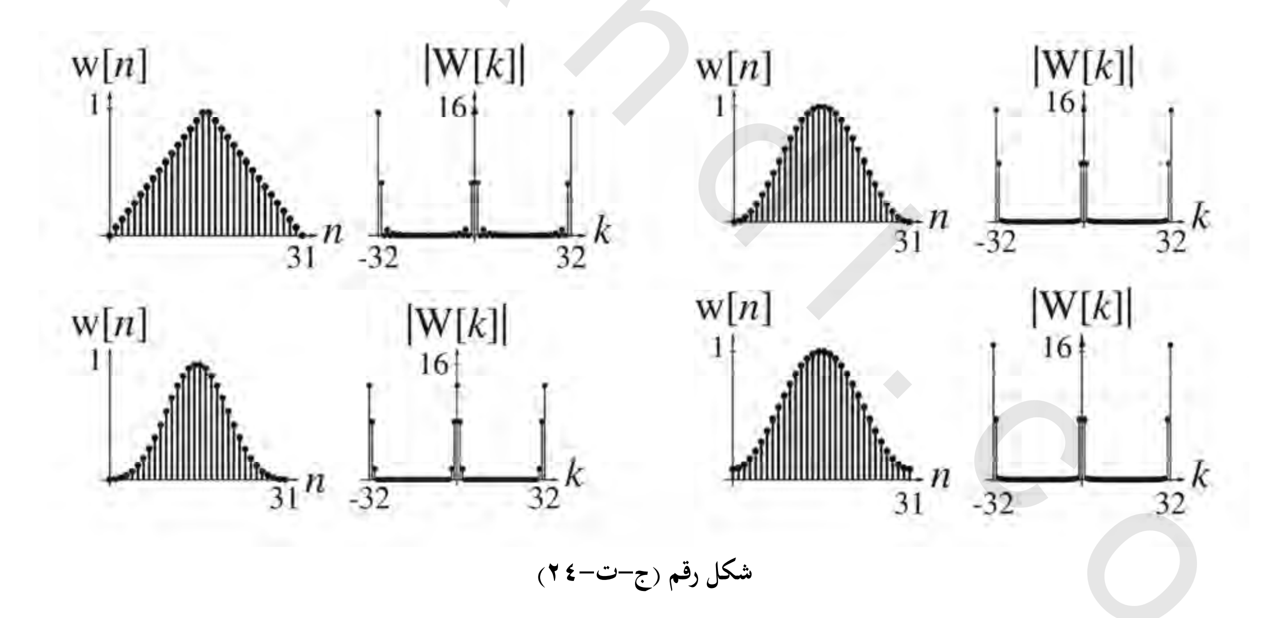
(ج) نافذة هامنج Hamming

$$w[n] = 0.54 - 0.46\, cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), 0 \leq n < N$$

(د) نافذة بلاكمان Blackman

$$w[n] = 0.42 - 0.5\, cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), 0 \leq n < N$$

الإجابة:



شكل رقم (ج-ت-٢٤)

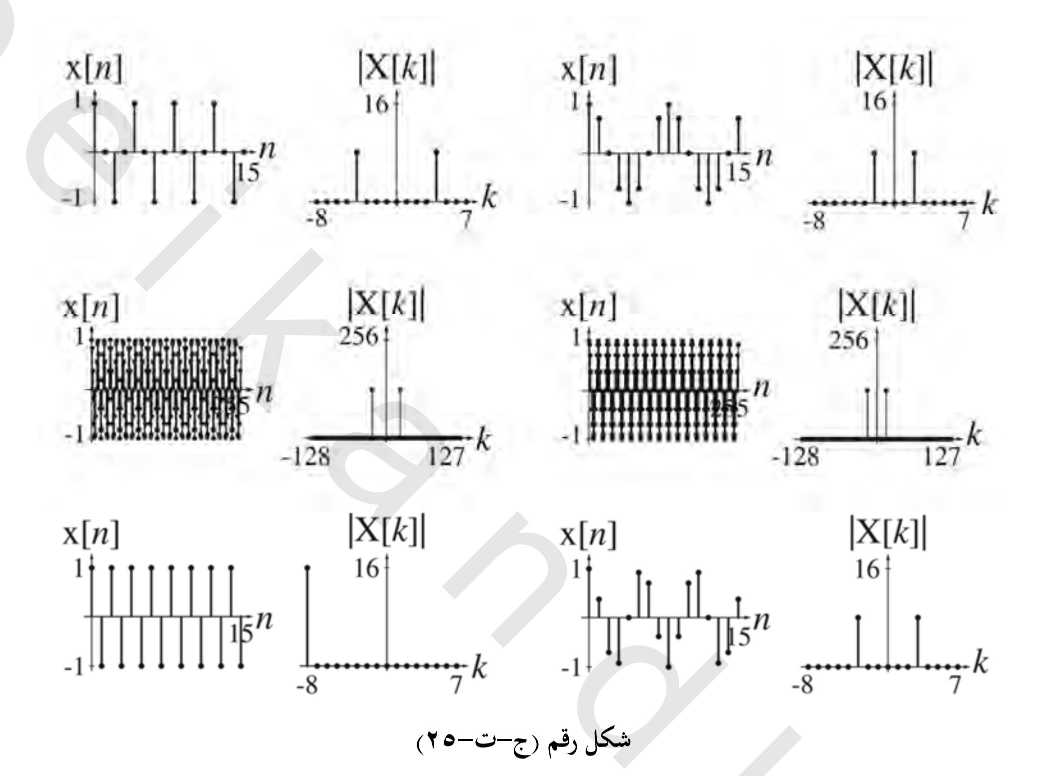
DFT

٢٥- خذ عينات الإشارات التالية عند المعدلات المبينة وللأزمنة المبينة أيضاً وارسم مقادير DFT مع الرقم التوافقي لكل منها في المدى $-N/2<k<(N/2)-1$.

(أ) $X(t) = cos(2\pi t),\ f_s = 2,\ N = 16$ (ب) $X(t) = cos(2\pi t),\ f_s = 8,\ N = 16$

(ت) $X(t) = cos(2\pi t),\ f_s = 16,\ N = 2$ (ث) $X(t) = cos(3\pi t),\ f_s = 2,\ N = 16$

(ج) $X(t) = cos(3\pi t),\ f_s = 8,\ N = 16$ (ح) $X(t) = cos(3\pi t),\ f_s = 16,\ N = 256$



شكل رقم (ج–ت–٢٥)

٢٦- خذ عينات الإشارات التالية عند المعدلات المبينة وللأزمنة المبينة أيضاً وارسم مقادير وزوايا الـ DFT مع الرقم التوافقي لكل منها في المدى –N/2<k<(N/2)-1.

(أ) $X(t) = tri(t-1),\ f_s = 2,\ N = 16$

(ب) $X(t) = tri(t-1),\ f_s = 8,\ N = 16$

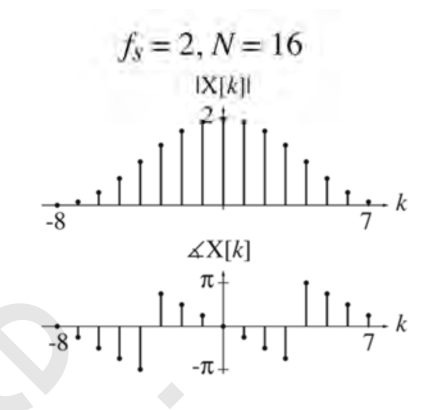
(ت) $X(t) = tri(t-1),\ f_s = 16,\ N = 256$

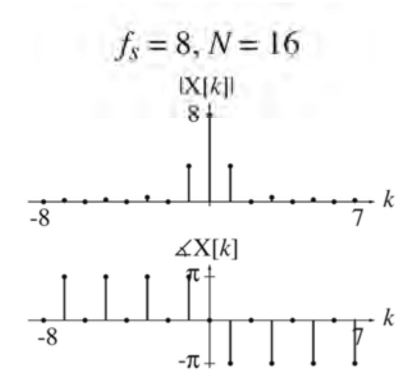
(ث) $X(t) = tri(t) + tri(t-4),\ f_s = 2,\ N = 8$

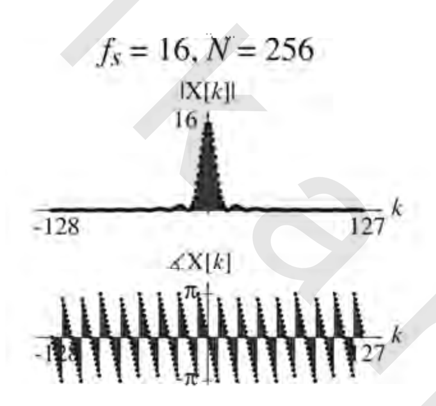
(ج) $X(t) = tri(t) + tri(t-4),\ f_s = 8,\ N = 32$

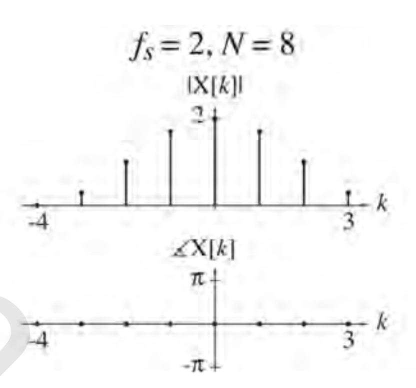
(ح) $X(t) = tri(t) + tri(t-4),\ f_s = 64,\ N = 256$

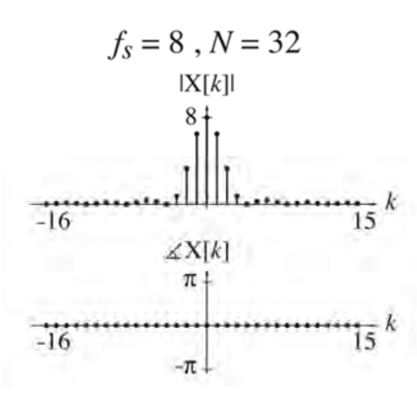
الإجابة :

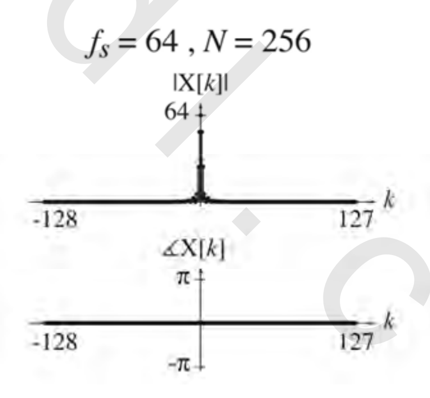












شكل رقم (ج–ت–٢٦)

٢٧- لكل إشارة مما يأتي، ارسم الإشارة الأصلية، والإشارة المعينة في فترة العينة المبينة :

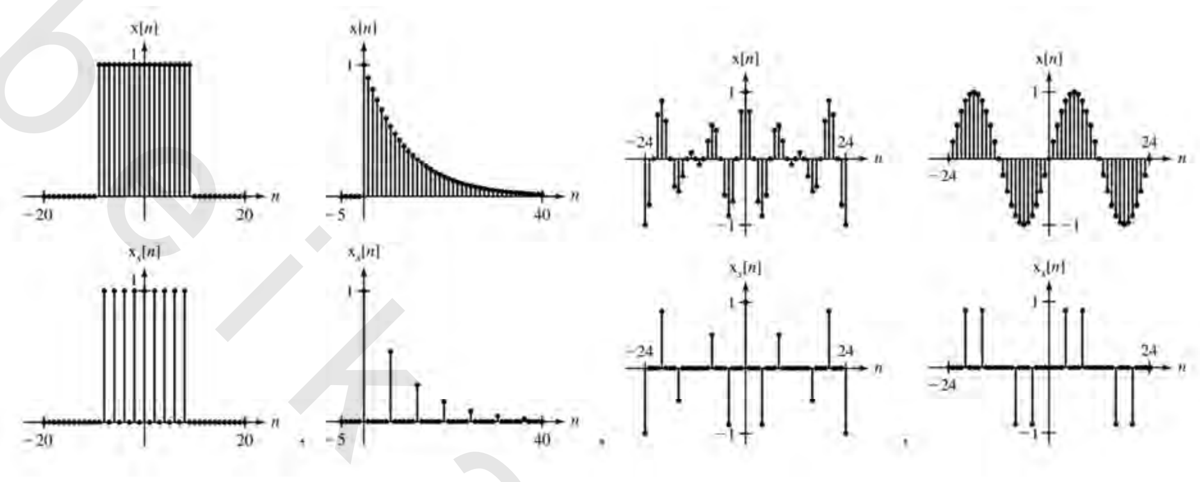
(أ) $X[n] = sin(2\pi n/24), \; N_s = 4$

(ب) $X[n] = (u[n+9] - u[n-10]), \; N_s = 2$

(ت) $X[n] = cos(2\pi n/48)cos(2\pi n/8), \ N_s = 2$

(ت) $X[n] = (9/10)^n u[n], \ N_s = 6$

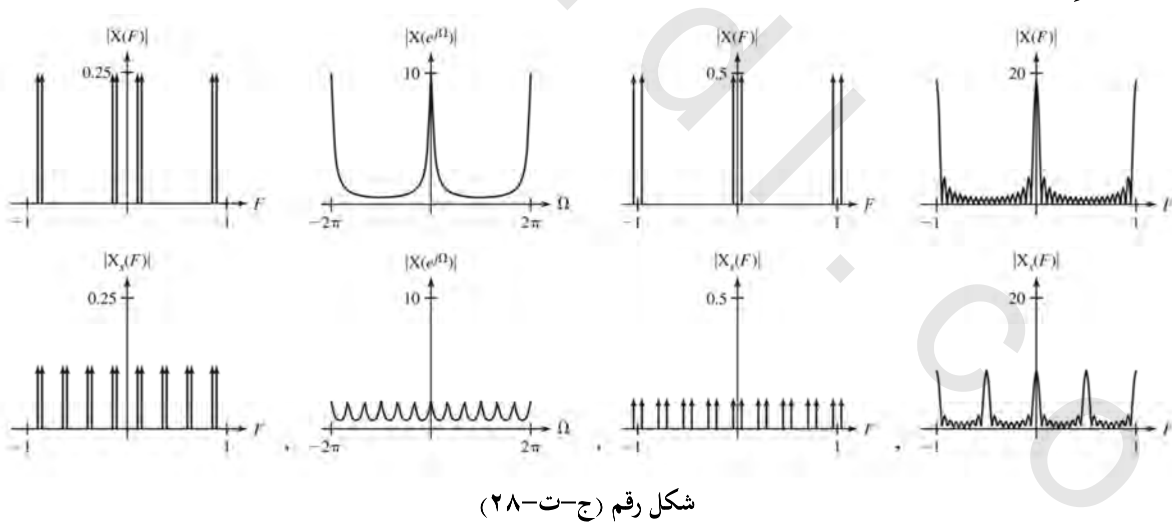
الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٢٧)

٢٨- لكل إشارة في تمرين ٢٧ ، ارسم مقدار DTFT للإشارة الأصلية والإشارة المعيننة:

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٢٨)

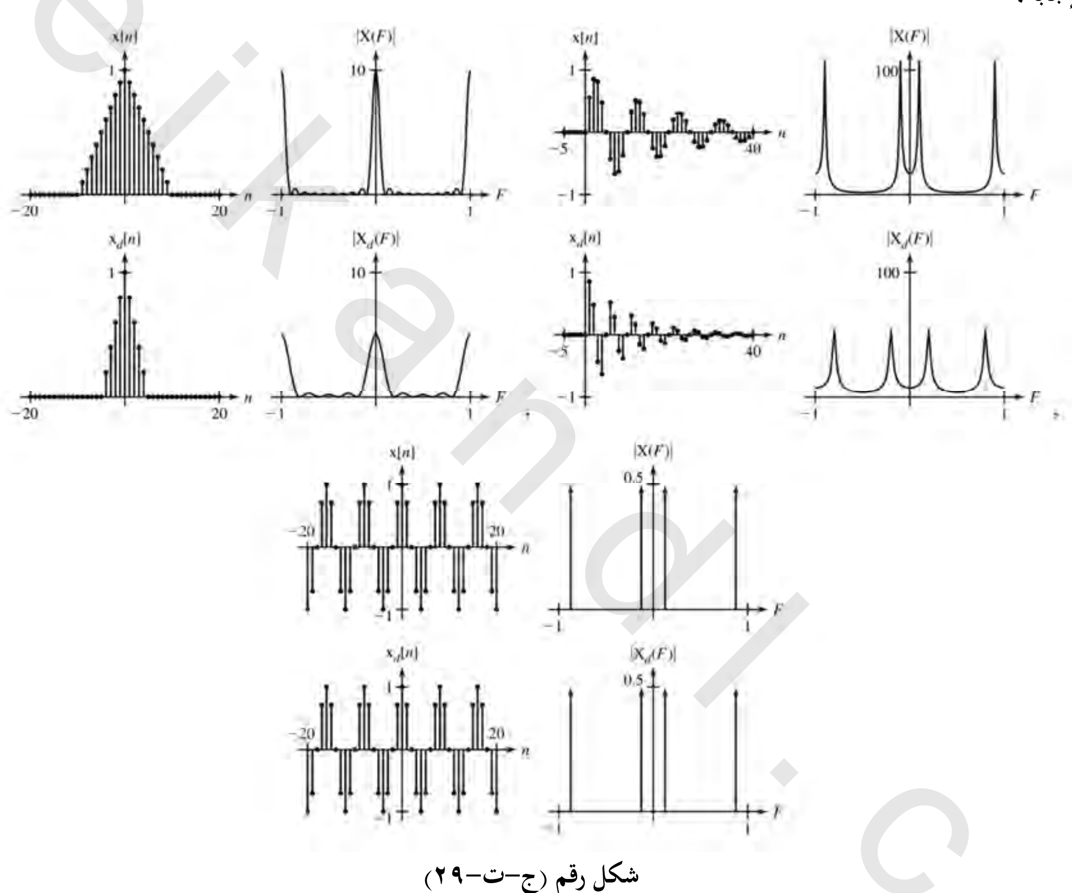
٢٩- لكل إشارة مما يأتي ، إرسم الإشارة الأصلية والإشارة المقسمة لفترة العينة المبينة. ارسم أيضاً مقادير الـ DTFT لكل من الإشارتين

(أ) $X[n] = tri(n/10),\ \ N_s = 2$

(ب) $X[n] = (0.95)^n sin(2\pi n/10)u[n],\ \ N_s = 2$

(ت) $X[n] = cos(2\pi n/8),\ \ N_s = 7$





شكل رقم (ج-ت-٢٩)

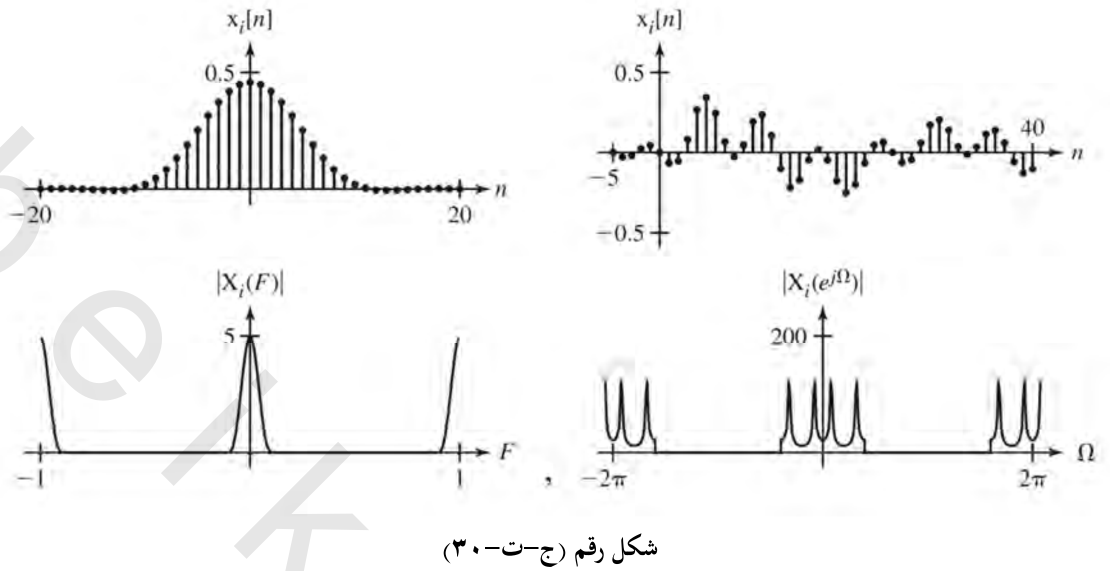
٣٠- لكل إشارة في تمرين ٢٩ ، أدخل رقم الأصفار المبين بين العينات ، رشح الإشارات بمرشح متقطع زمنياً منفذ للترددات المنخفضة بتردد القطع المبين وارسم الإشارات الناتجة ومقدار DTFT لها.

(أ) أدخل صفراً واحداً بين العينات ، وتردد القطع هو Fc=0.1.

(ب) أدخل 4 أصفار بين العينات ، وتردد القطع هو Fc=0.2.

(ج) أدخل ٤4 أصفار بين العينات ، وتردد القطع هو Fc=0.02.

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٣٠)

تمارين بدون إجابات

أخذ العينات (العيننة)

٣١- باستخدام ماتلاب (أو أي أداة حاسب مكافئة) ارسم الإشارة:

$$X(t) = 3cos(20\pi t) - 2\,sin(30\pi t)$$

على المدى الزمني $0<t<400ms$. ارسم أيضا الإشارة المتكونة من عيننة هذه الدالة في فترات العيننة التالية: (أ) $Ts=1/120$ s (ب) $Ts=1/60$ s (ت) $Ts=1/30$ s (ث) $Ts=1/15$ s. اعتماداً على ما تلاحظة، ماذا يمكنك أن تقول عن مقدار السرعة التي يجب عيننة هذه الإشارة بها بحيث يمكن استرجاعها من هذه العينات ؟

٣٢- الإشارة $x(t)=20cos(1000\pi t)$ تم عيننتها صدمياً بالمعدل 2kHz. ارسم دورتين أساسيتين من الإشارة المعيننة صدمياً $x_\delta(t)$. (افترض أن الإشارة الأولى تكون عند $t=0$). بعد ذلك ارسم أربع دورات أساسية، متمركزة عند التردد 0Hz، ل $X_\delta(f)$ التي تمثل CTFT للإشارة المعيننة صدمياً $x_\delta(t)$. غير معدل العيننة إلى 500Hz وكرر.

٣٣- الإشارة $x(t)=10rect(t/4)$ تم عيننتها صدميا بالمعدل 2kHz. ارسم الإشارة المعيننة صدمياً $x_\delta(t)$ في الفترة $-4<t<4$. بعد ذلك ارسم ثلاث دورات أساسية، متمركزة عند التردد $f=0Hz$، لـ $X_\delta(f)$ التي تمثل الـ CTFT للإشارة المعيننة صدمياً $x_\delta(t)$. غير معدل العيننة إلى 1/2Hz وكرر.

٣٤- الإشارة x(t)=4sinc(10t) تم عينتها صدمياً بالمعدل 20kHz. ارسم الإشارة المعينة صدمياً $x_\delta(t)$ في الفترة -0.5<t<0.5. بعد ذلك ارسم ثلاث دورات أساسية، متمركزة عند التردد f=0Hz، ل $X_\delta(f)$ التي تمثل CTFT للإشارة المعينة صدمياً $x_\delta(t)$. غير معدل العينة إلى 4Hz وكرر.

٣٥- إشارة x[n] تم تكوينها عن طريق عينة الإشارة x(t)=20cos(8πt) بمعدل العينة 20Hz. ارسم x[n] على مدى 10 دورات أساسية مع الزمن المتقطع. بعد ذلك اعمل الشيء نفسه لترددات العينة 8Hz و 6Hz.

٣٦- إشارة x[n] تم تكوينها عن طريق عينة الإشارة x(t)=-4sin(200πt) بمعدل العينة 400Hz. ارسم x[n] على مدى 10 دورات أساسية مع الزمن المتقطع. بعد ذلك اعمل الشيء نفسه لترددات العينة 200Hz و 60Hz.

٣٧- الإشارة x(t) تمت عينتها فوق معدل نيكويست لتكوين الإشارة x[n] وتم أيضا عينتها صدمياً بنفس المعدل لتكوين الإشارة $x_\delta(t)$. DTFT للإشارة x[n] هو:

$$X(F) = 10\,rect(5F) * \delta_1(F) \; or \; X(e^{j\Omega}) = 10 rect(5\Omega/2\pi) * \delta_{2\pi}(\Omega)$$

(أ) إذا كان معدل العينة هو 100Hz، فما هو أعلى تردد يكون عنده CTFT للإشارة x(t) لا يساوي الصفر ؟

(ب) ما هو أقل تردد موجب أكبر من أعلى تردد في الإشارة x(t) الذي يكون عنده CTFT للإشارة $x_\delta(t)$ لا يساوي الصفر ؟

(ج) إذا كان المطلوب هو استرجاع الإشارة x(t) من الإشارة المعينة صدمياً $x_\delta(t)$ عن طريق استخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة واستجابة الصدمة له هي h(t)=Asinc(wt)، فما أكبر قيمة ممكنة لـ w ؟

أخذ العينات (العيننة) الصدمية

٣٨- لكل إشارة x(t)، خذ عيناتها صدمياً بالمعدل المبين عن طريق ضربها في صدمات دورية كالتالي: $\delta_{T_s}(t)\left(T_s = \frac{1}{f_s}\right)$. ارسم الإشارة المعينة صدمياً $x_\delta(t)$ على المدى الزمني المحدد ومقدار وزاوية الـ $X_\delta(f)$ التي تمثل CTFT على المدى الترددي المبين:

(أ) $X(t) = 5(1 + cos(200\pi t))rect(100t),\ f_s = 1600$

(ب) $X(t) = e^{-t^2/2},\ f_s = 5$

(ت) $X(t) = 10e^{-t/20}\, u(t),\ f_s = 1$

٣٩- افترض الإشارة $x(t)=rect(20t)*\delta_{0.1}(t)$ والمرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة الذي تكون استجابته الترددية هي $T_s rect(f/f_s)$، لمعالجة الإشارة x(t) بطريقتين مختلفتين.

العملية 1: رشح الإشارة واضربها في f_s.

العملية 2 : خذ عينات الإشارة صدمياً بالمعدل المحدد، بعد ذلك رشح الإشارة المعيننة صدمياً.

لكل معدل عينة، ارسم الإشارة الأصلية x(t) والإشارة المعالجة y(t) على المدى الزمني التالي: -0.5<t<0.5. في كل حالة، وعن طريق فحص CTFT للإشارات، لماذا تكون الإشارتان أو لا تكونان متشابهتين.

(أ) $f_s=1000$ (ب) $f_s=200$ (ت) $f_s=50$ (ث) $f_s=20$ (ج) $f_s=10$

(ه) $f_s=4$ (ح) $f_s=2$

٤٠- خذ عينات الإشارة التالية:

$$X(t)=\begin{cases}4sin(20\pi t), & -0.2<t<0.2\\ 0, & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases} = 4sin(20\pi t)rect(t/0.4)$$

على المدى الزمني -0.5<t<0.5 وعند معدلات العينة المبينة ثم استرجع الإشارة تقريبياً باستخدام طريقة الدالة سنك:

$$X(t)=2(f_c/f_s)\sum_{n=-\infty}^{N}X(nT_s)\,sinc\big(2f_c(t-nT_s)\big)$$

فيما عدا مع مجموعة العينات المحددة وباستخدام تردد القطع الموضح للمرشح. بمعنى استخدم:

$$X(t)=2(f_c/f_s)\sum_{n=-N}^{N}X(nT_s)\,sinc\big(2f_c(t-nT_s)\big)$$

حيث N=0.5/Ts. ارسم الإشارة المسترجعة في كل حالة:

(أ) $f_s=20, f_c=10$ (ب) $f_s=40, f_c=10$

(ت) $f_s=40, f_c=20$ (ث) $f_s=100, f_c=10$

(ج) $f_s=100, f_c=20$ (ح) $f_s=100, f_c=50$

معدلات نيكويست

٤١- أوجد معدلات نيكويست للإشارات التالية:

(أ) $X(t)=15rect(300t)cos(10^4\pi t)$

(ب) $X(t)=15sinc(40t)cos(150\pi t)$

(ت) $X(t)=15\left[rect(500t)*\delta_{1/100}(t)\right]cos(10^4\pi t)$

(ث) $X(t)=4\left[sinc(500t)*\delta_{1/200}(t)\right]$

(ج) $X(t) = 2\left[sinc(500t) * \delta_{1/200}(t)\right]cos(10^4\pi t)$

(ح) $X(t) = \begin{cases} |t|, |t|, < 10 \\ 0, |t| \geq 10 \end{cases}$

(خ) $X(t) = -8sinc(101t) + 4cos(200\pi t)$

(د) $X(t) = -32sinc(101t)cos(200\pi t)$

(ذ) $X(t) = 7sinc(99t) * \delta_1(t)$

النسخ المستعارة (التزوير)

٤٢- على مخطط واحد، ارسم الإشارة المتقطعة زمنياً المتكونة عن طريق عينة الدوال الثلاث التالية بمعدل عينة 30Hz :

(أ) $X_1(t) = 4sin(20\pi t)$

(ب) $X_2(t) = 4sin(80\pi t)$

(ج) $X_2(t) = -4sin(40\pi t)$

٤٣- ارسم الدالة $x[n]$ المتكونة عن طريق أخذ عينات الدالة $x(t)=10sin(8\pi t)$ عند ضعف معدل نيكويست. بعد ذلك على المحور نفسه ارسم دالتين آخرتين مستمرتين زمنياً على الأقل التي يمكن أن تعطي العينات نفسها تماما إذا تمت عينتها عند الأزمنة نفسها.

٤٤- دالة جيب تمام $x(t)$ ودالة جيب $y(t)$ بالتردد نفسه تم إضافتها لتكون إشارة مركبة $z(t)$. بعد ذلك تم عينة الإشارة $z(t)$ عند معدل نيكويست لها مع الافتراض المعتاد أن هناك عينة تحدث عند $t=0$. أي واحدة من الإشارات $x(t)$ أم $y(t)$ إذا تمت عينتها بنفسها ستنتج نفس مجموعة العينات.

٤٥- كل واحدة من الإشارات x التالية تمت عينتها لتعطي الإشارة x_s عن طريق ضربها في دالة صدمية دورية على الصورة $\delta_{T_s}(t)$ و $f_s=1/T_s$:

(أ) $x(t)=4cos(20\pi t), f_s=40$ ، ما هو أول تردد موجب فوق 10Hz تكون عنده $X_s(f)$ لا تساوي الصفر ؟

(ب) $x(t)=10tri(t), f_s=4$ ، إذا تم استيفاء الإشارة المعينة ببساطة عن طريق مسك قيمة آخر عينة، ما هي القيمة الممكنة للإشارة المستوفاة عند الزمن $t=0.9$ ؟

أخذ العينات (العيننة) العملية

٤٦- ارسم مقدار الـ CTFT للإشارة $x(t)=25sinc^2(t/6)$. ما هو أقل معدل عيننة مطلوب لاسترجاع الإشارة x(t) تماما من عيناتها ؟ قد يبدو أن عدد لا نهائي من العينات قد يكون مطلوبا لاسترجاع x(t) من عيناتها. إذا كان أحدهم يريد أن يطبق موائمة تكون فيها العيننة على أقل زمن ممكن تحتوي 99% من الطاقة في هذا الشكل الموجي، فما هو عدد العينات المطلوبة ؟

٤٧- ارسم مقدار CTFT للإشارة $x(t)=8rect(3t)$. هذه الإشارة ليست محدودة المجال وبالتالي فإنها لا يمكن عيننتها بصورة تامة بحيث يمكن استرجاع الإشارة الأصلية من هذه العينات. كموائمة عملية على ذلك، افترض أن عرض مجال يحتوي ٩٩٪ من طاقة الإشارة x(t) يكون كبيراً بما فيه الكفاية لاسترجاع x(t) من عيناتها. ما هو أقل معدل عيننة مطلوب في هذه الحالة ؟

الإشارات الدورية المحدودة المجال

٤٨- كم عدد قيم العينات المطلوبة لتعطي معلومات كافية لوصف الإشارات التالية المحدودة المجال وصفا تاماً :

(أ) $X(t) = 8 + 3cos(8\pi t) + 9sin(4\pi t)$

(ب) $X(t) = 8 + 3cos(7\pi t) + 9sin(4\pi t)$

٤٩- مطلوب أخذ عينات الإشارة $x(t)=15[sinc(5t)*\delta_2(t)]sin(32\pi t)$ لتكون الإشارة x[n]. خذ العينات عند معدل نيكويست ثم عند المعدل الأعلى الذي يكون عنده عدد العينات لكل دورة رقم صحيح. ارسم الإشارات ومقدار CTFT للإشارة المستمرة زمنياً و DTFT للإشارة المتقطعة زمنياً.

٥٠- إشارة x(t) دورية ودورة أساسية واحدة من هذه الإشارة يمكن وصفها كما يلي :

$$X(t) = \begin{cases} 3t, & 0 < t < 5.5 \\ 0, & 5.5 < t < 8 \end{cases}$$

أوجد عينات هذه الإشارة على مدار دورة أساسية واحدة المعيننة بالمعدل 1Hz (تبدأ عند الزمن t=0). بعد ذلك ارسم بالمقياس نفسه دورتين اساسيتين من الإشارة الأصلية ودورتين أساسيتين من الإشارة الدورية، والتي تكون محدودة المجال عند 0.5Hz أو أقل والتي من الممكن أن يكون لها هذه العينات نفسها.

DFT

٥١- إشارة x(t) تم عيننتها ٤ مرات وهذه العينات هي {x[0], x[1], x[2],x[3]}. الـ DFT لهذه العينات هو {X[0], X[1], X[2], X[3]}. X[3] يمكن كتابتها كما يلي : X[3]=ax[0]+bx[1]+cx[2]+dx[3] ، فما هي قيمة كل من a و b و c و d ؟

٥٢- خذ عينات الإشارة المحدودة المجال x(t)=15cos(300πt)+40sin(200πt) عند معدل نيكويست الخاص بها تماماً على مدار دورة أساسية واحدة تماماً من x(t). أوجد DFT لهذه العينات. من DFT أوجد الدالة التوافقية للـ CTFS. إرسم CTFS الناتج وقارنه مع الإشارة x(t). اشرح أي فروق. أعد مع معدل العينة الذي يساوي ضعف معدل نيكويست.

٥٣- خذ عينات الإشارة المحدودة المجال x(t)=8cos(50πt)-12sin(80πt) عند معدل نيكويست الخاص بها تماماً على مدار دورة أساسية واحدة تماماً من x(t). أوجد DFT لهذه العينات. من DFT أوجد الدالة التوافقية للـ CTFS. ارسم CTFS الناتج وقارنه مع الإشارة x(t). اشرح أي فروق. أعد مع معدل العينة الذي يساوي ضعف معدل نيكويست.

٥٤- إشارة x(t) دورية ومحدودة المجال أعلى تردد فيها هو 25Hz تمت عينتها عند المعدل 100Hz على مدى دورة أساسية واحدة تماما لتكوين الإشارة x[n]. هذه العينات هي :

$$\{X[0], X[1], X[2], X[3]\} = \{a, b, c, d\}$$

افترض أن دورة واحدة من الـ DFT لهذه العينات ستكون {X[0], X[1], X[2], X[3]} :

(أ) ما هي قيمة X[1] بدلالة a و b و c و d ؟

(ب) ماهي القيمة المتوسطة لـ x(t) دلالة a و b و c و d ؟

(ج) واحد من الأرقام {X[0], X[1], X[2], X[3]} يجب أن يكون صفراً. فما هو ولماذا؟

(د) اثنان من الأرقام {X[0], X[1], X[2], X[3]} يجب أن يكونا حقيقيين. فما هما ولماذا؟

(ه) إذا كان X[1]=2+j3 ، فما هي القيمة العددية لـ X[3] ولماذا ؟

٥٥- باستخدام ماتلاب :

(أ) أوجد تتابعاً شبه عشوائي من 256 نقطة بيانات في صورة متجه x باستخدام الدالة rand ، وهي دالة ضمنية في ماتلاب.

(ب) أوجد DFT لهذا التتابع وضعه في المتجه X.

(ج) افترض متجهاً آخر X1pf يساوي المتجه X.

(د) غير كل القيم في المتجه X1pf إلى الصفر فيما عدا أول 8 نقاط وآخر 8 نقاط.

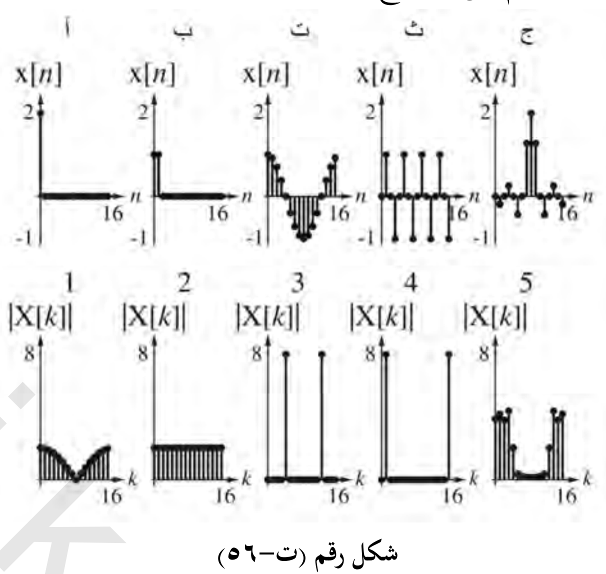
(ه) أوجد الجزء الحقيقي في معكوس الـ DFT للمتجه X1pf وضعه في متجه آخر x1pf.

(و) أوجد مجموعة من 256 عينة زمنية تبدأ عند t=0 ومنفصلة بمقدار واحد بانتظام.

(ز) ارسم x و x1pf مع الزمن t على التدريج نفسه وقارنهما.

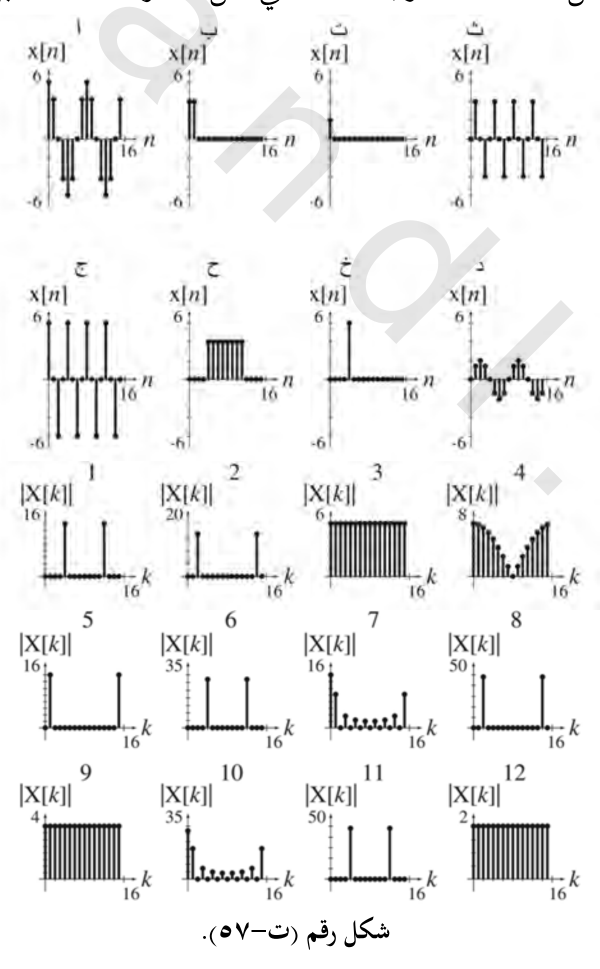
ما هو نوع تأثير هذه العملية على مجموعة البيانات ؟ لماذا يسمى متجه البيانات الناتج x1pf؟

٥٦- في شكل (ت- ٥٦) وائم كل دالة مع مقادير DFT المقابلة :



شكل رقم (ت-٥٦)

٥٧- لكل x[n] في شكل (ت- ٥٧) أوجد X[k] التي تمثل مقدار الـ DFT المقابل :



شكل رقم (ت-٥٧).



الفصل الحادي عشر

تحليل الاستجابة الترددية

(١١,١) المقدمة والأهداف

حتى هذه النقطة كانت المادة العلمية المقدمة في هذا الكتاب رياضية بدرجة عالية وملخصة، أو نظرية أو تجريدية. لقد رأينا بعض الأمثلة بشكل عرضي أو متقطع على استخدام هذه الطرق لتحليل الإشارات والأنظمة ولكننا لم نستعرض هذا الاستخدام بعمق في الحقيقة. وصلنا نحن الآن إلى النقطة التي أصبح لدينا عندها ما يكفي من الأدوات النظرية للتعامل مع بعض أنواع الإشارات المهمة والأنظمة، ولكي نثبت لماذا تكون طرق النطاق الترددي مشهورة وفعالة بهذا الشكل في تحليل العديد من الأنظمة. بمجرد أن نبني أدوات حقيقية ونتعود على طرق النطاق الترددي سنفهم لماذا يقضي العديد من المهندسين المحترفين كل وقتهم في "النطاق الترددي" لتوليد، وتصميم، وتحليل الأنظمة باستخدام هذه الطرق التحويلية.

كل نظام LTI له استجابة صدمية ومن خلال تحويل فورير لها، نحصل على الاستجابة الترددية، ومن خلال تحويل لا بلاس لهذه الاستجابة الصدمية أيضاً نحصل على دالة العبور. سنقوم بتحليل أنظمة تسمى مرشحات يتم تصميمها لكي يكون لها استجابة ترددية معينة. سنعرف تعبير المرشح المثالي، وسنرى طرقاً لتقريب هذا المرشح المثالي. حيث إن الاستجابة الترددية تكون على هذه الدرجة من الأهمية في تحليل الأنظمة، فإننا سنقدم طرقا فعالة لإيجاد الاستجابة الترددية للأنظمة المعقدة.

أهداف الفصل

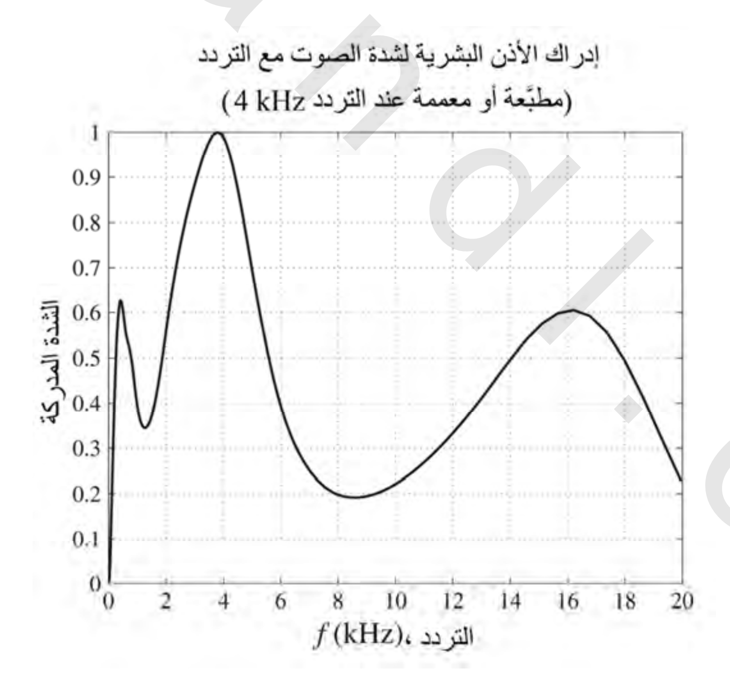
١- لنعرض استخدام الطرق التحويلية في تحليل بعض الأنظمة مع التطبيقات الهندسية العملية.

٢- لنبني تقدير أو اعتراف بتحليل إشارات القدرة والأنظمة التي يتم إجراؤها مباشرة في النطاق الترددي.

(١١,٢) الاستجابة الترددية

ربما يكون من أكثر الأمثلة شيوعا على الاستجابة الترددية في الاستخدامات الحياتية اليومية هو استجابة الأذن البشرية للأصوات. الشكل رقم (١١,١) التغيرات الاستقبالية لأذن بشرية عادية لشخص صحيح لشدة تردد جيبي منفرد مع تغير التردد من 20Hz حتى 20kHz. هذا المدى من التردد يسمى المدى أو المجال السماعي.

هذه الاستجابة الترددية تكون نتيجة هيكل أو تركيب الآذن. أحد الأنظمة المصممة مع أخذ استجابة الأذن في الاعتبار هو نظام الترفيه الصوتي المنزلي. هذا النظام يعتبر مثالا على الأنظمة المصممة بدون المعرفة الدقيقة لأي الإشارات التي سيقوم هذا النظام بمعالجتها أو كيف ستتم المعالجة التامة لها، ولكن من المعروف أن هذه الإشارات تقع في المدى الترددي المسموع. حيث البشر على اختلاف أنواعهم يكون لهم أذواق مختلفة للموسيقي وكيف يجب أن تسمع هذه الموسيقي، فإن مثل هذه الأنظمة يجب أن يكون بها بعض المرونة. أي نظام صوتي يكون به مكبر قادر على ضبط الشدة النسبية لأي تردد مع الترددات الأخرى من خلال الضوابط النغمية مثل ضابط جهارة الصوت، وضابط الثلاثية، وتعويض الشدة أو مخطط التعادل. كل هذه الضوابط تسمح لأي مستخدم للنظام بضبط الاستجابة الترددية للحصول على أحسن استماع لأي نوع من أنواع الموسيقي.



الشكل رقم (١١,١) متوسط إدراك الأذن البشرية لشدة نغمة صوتية ذات مقدار ثابت كدالة في التردد

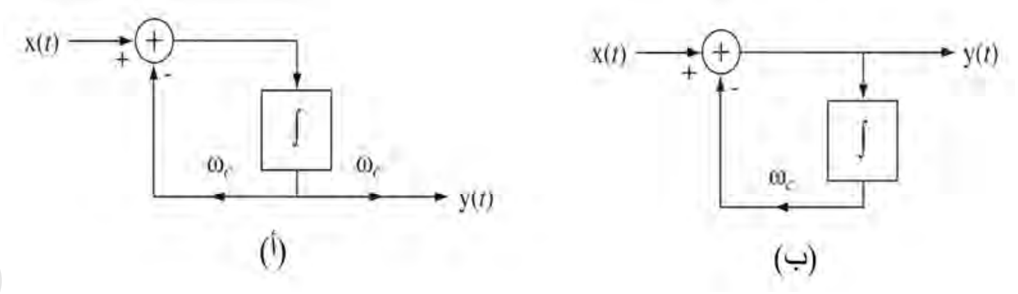
ضوابط المكبرات الصوتية تعتبر أمثلة جيدة على الأنظمة المصممة في النطاق الترددي. الغرض من هذه الضوابط هو تشكيل الاستجابة الترددية لهذه المكبرات. يتم استخدام تعبير المرشح أو الترشيح في الأنظمة التي يكون الغرض الأساسي منها هو تشكيل الاستجابة الترددية. لقد رأينا مسبقاً القليل من الأمثلة على المرشحات الموصوفة بأنها مرشحات منفذة للترددات المنخفضة، أو منفذة للترددات العالية، أو منفذة لمجال من الترددات، أو عائقة أو محبطة لمجال من الترددات. ماذا تعني كلمة مرشح على العموم ؟ المرشح هو جهاز لفصل شيء مرغوب من شيء آخر غير مرغوب فيه. مرشح القهوة يفصل القهوة المطلوبة من حبيبات القهوة غير المطلوبة. مرشح الزيت يتخلص من الجزيئات غير المرغوب فيها في الزيت. في العادة يعرف المرشح في تحليل الإشارات والأنظمة على أنه جهاز يؤكد أو يقوي طاقة الإشارة في مدى ترددي معين بينما يحبط أو يوهن من طاقة الإشارة في مدى ترددي آخر.

(١١,٣) المرشحات المستمرة زمنياً

أمثلة على المرشحات

المرشحات يكون لها مجال للمرور ومجال آخر للإيقاف. مجال المرور هو المدى الترددي الذي يسمح فيه المرشح لطاقة الإشارة بالمرور دون أن تتأثر نسبياً. مجال الوقف أو الإعاقة هو المدى الترددي الذي فيه يحبط المرشح أو يوهن من طاقة الإشارة، ويسمح بالقليل جداً من هذه الطاقة بالمرور. الأربعة أنواع الأساسية من المرشحات هي: المنفذة للترددات المنخفضة، والمنفذة للترددات العالية، والمنفذة لمجال من الترددات والمحبطة لمجال من الترددات. في المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة يكون مجال المرور أو السماح هو منطقة من الترددات المنخفضة ومجال الإيقاف أو الإحباط هو منطقة من الترددات المرتفعة. في المرشحات المنفذة للترددات المرتفعة تنعكس هاتان المنطقتان، حيث يتم توهين أو إعاقة الترددات المنخفضة ويتم السماح للترددات العالية. المرشح المنفذ لمجال من الترددات يكون له مجال مرور متوسط من الترددات ويوقف كل من الترددات المنخفضة والعالية. المرشح المحبط لمجال من الترددات يعكس كل من مجال المرور ومجال الوقف في المرشح المنفذ لمجال من الترددات.

الضبط المبسط لكل من حجم أو مستوى الجهورية والثلاثية (الترددات المنخفضة والعالية) في المكبر الصوتي يمكن أن يتم عن طريق استخدام مرشحات منفذة للترددات المنخفضة وأخرى منفذة للترددات المرتفعة بترددات ركنية مختلفة. لقد رأينا دوائر لبناء المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة. يمكننا أيضاً عمل مرشح منفذ للترددات المنخفضة عن طريق استخدام بلوكات أو وحدات بنائية قياسية من الأنظمة المستمرة زمنياً و المكاملات، والمكبرات ونقاط التجميع كما في الشكل رقم (١١,٢أ).



الشكل رقم (١١,٢) مرشحات بسيطة، (أ) مرشح منفذ للترددات المنخفضة، (ب) مرشح منفذ للترددات العالية.

النظام الموجود في الشكل رقم (١١,٢أ) هو مرشح منفذ للترددات المنخفضة بتردد ركني هو ω_c (بالراديان على الثانية) ومقدار الاستجابة الترددية الذي يقترب من الواحد عن الترددات المنخفضة. إن ذلك يعتبر نظاماً بسيطاً بالطريقة المباشرة II. دالة العبور لهذا النظام هي :

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

ولذلك ، فإن الاستجابة الترددية ستكون :

$$H(j\omega) = H(s)_{s\to j\omega} = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c} \quad \text{أو} \quad H(f) = H(s)_{s\to j2\pi f} = \frac{2\pi f_c}{j2\pi f + 2\pi f_c} = \frac{f_c}{jf + f_c}$$

حيث $\omega_c = 2\pi f_c$. النظام الموضح في الشكل رقم (١١,٢ب) هو مرشح منفذ للترددات العالية بتردد ركني ω_c. دالة العبور لهذا المرشح والاستجابة الترددية له ستكونان كما يلي :

$$H(s) = \frac{s}{s+\omega_c}, \qquad H(j\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}, \qquad H(f) == \frac{f_c}{jf + f_c}$$

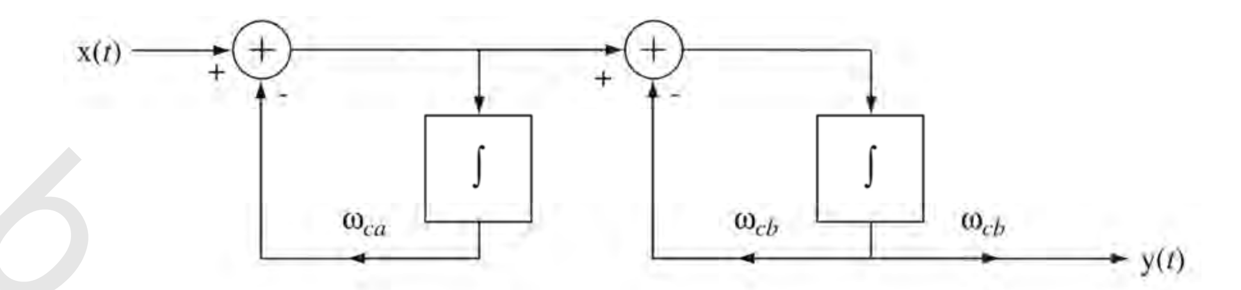
في أي واحد من المرشحين، إذا تم تغيير ω_c، فإن الطاقة النسبية للإشارة عند الترددات المنخفضة والمرتفعة يمكن ضبطها. هذان النظامان يمكن وضعهما على التوالي لتكوين مرشح منفذ لمجال من الترددات كما في الشكل (١١,٣). دالة العبور والاستجابة الترددية للمرشح المنفذ لمجال من الترددات ستكونان كما يلي :

$$H(s) = \frac{s}{s+\omega_{ca}} \times \frac{\omega_{cb}}{s+\omega_{cb}} = \frac{\omega_{cb}s}{s^2 + (\omega_{ca}+\omega_{cb})s + \omega_{ca}\omega_{cb}}$$

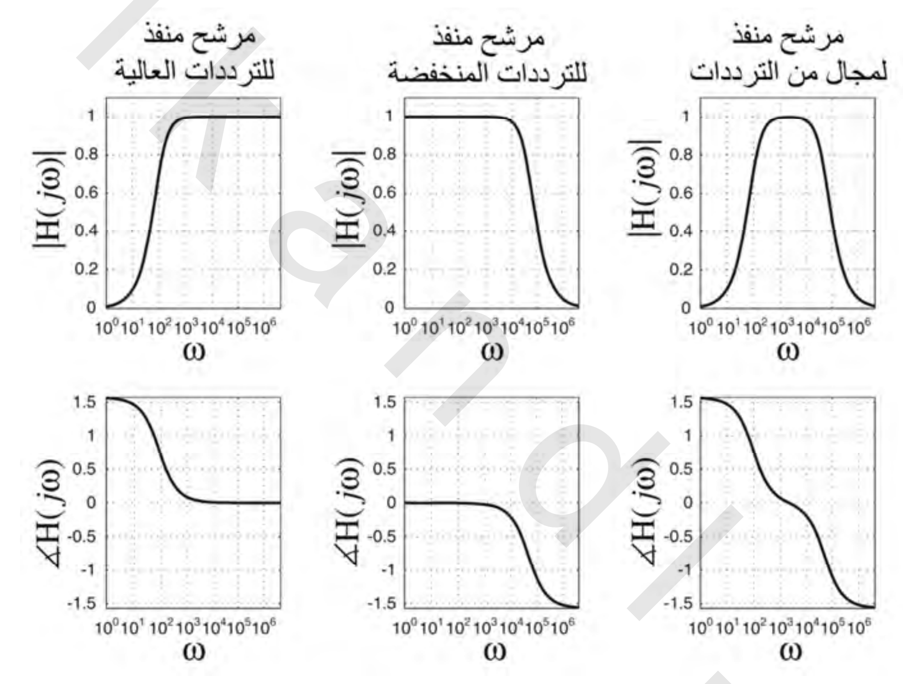
$$H(j\omega) = \frac{j\omega\omega_{cb}}{(j\omega)^2 + j\omega(\omega_{ca}+\omega_{cb}) + \omega_{ca}\omega_{cb}}$$

$$H(f) == \frac{jff_{cb}}{(jf)^2 + jf(f_{ca}+f_{cb}) + f_{ca}f_{cb}}$$

$$f_{ca} = \omega_{ca}/2\pi\ ,\ f_{cb} = \omega_{cb}/2\pi$$



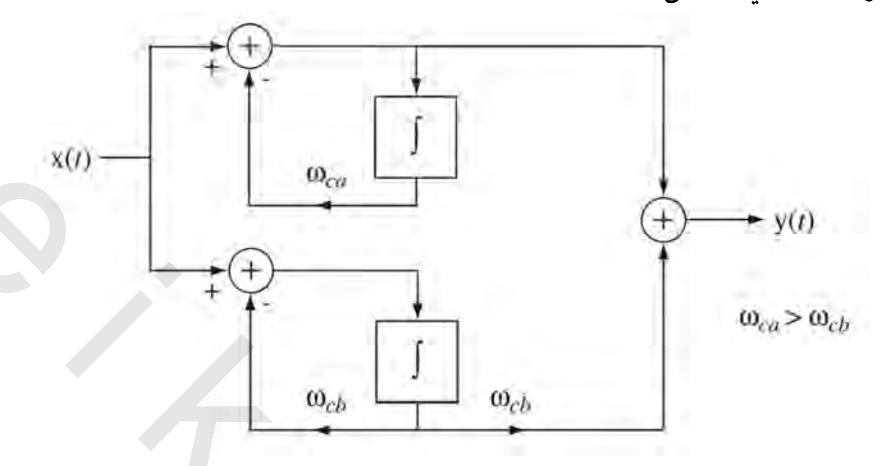
الشكل رقم (١١,٣) مرشح منفذ لمجال من الترددات عن طريق تتابع مرشح منفذ للترددات العالية وآخر منفذ للترددات المنخفضة



الشكل رقم (١١,٤) الاستجابات الترددية لمرشح منفذ للترددات العالية، وآخر منفذ للترددات المنخفضة، وآخر منفذ لمجال من الترددات

كمثال على ذلك سنفترض أن ω_{ca}=100 وأن ω_{cb}=50000. وبالتالي فإن الاستجابات الترددية لكل من المرشح المنفذ للترددات المنخفضة، والمنفذ للترددات المرتفعة، والمنفذ لمجال من الترددات ستكون كما هو موضح في الشكل (١١,٤).

يمكن بناء المرشح المعوق لمجال من الترددات عن طريق التوصيل على التوازي لمرشح منفذ للترددات المنخفضة وآخر منفذ للترددات المرتفعة إذا كان التردد الركني للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة أقل من التردد الركني للمرشح المنفذ للترددات المرتفعة كما في الشكل (١١،٥).



الشكل (١١،٥) مرشح معوق لمجال من الترددات تم تكوينه عن طريق توصيل مرشح منفذ للترددات المنخفضة وآخر منفذ للترددات المرتفعة

دالة العبور والاستجابة الترددية للمرشح المعوق لمجال من الترددات ستكونان كما يلي :

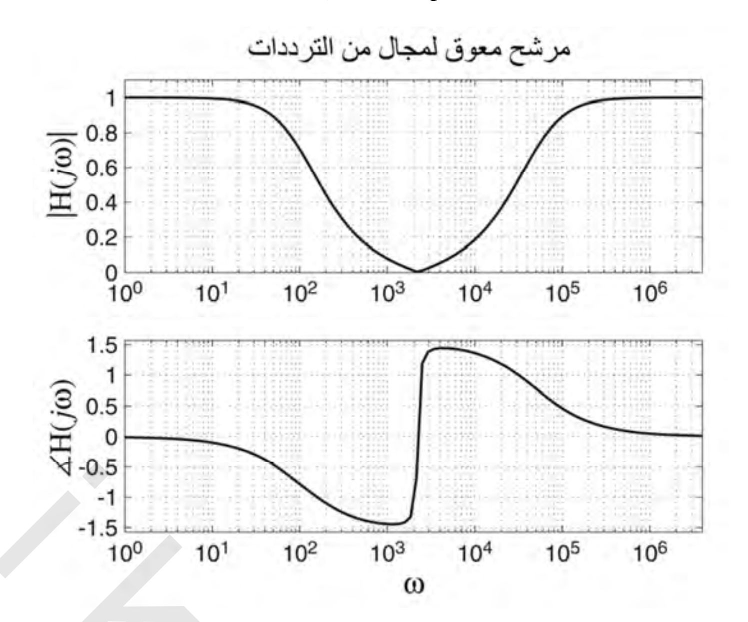
$$H(s) = \frac{s^2+2\omega_{cb}s+\omega_{ca}\omega_{cb}}{s^2+(\omega_{ca}+\omega_{cb})s+\omega_{ca}\omega_{cb}}$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2+j2\omega\omega_{cb}+\omega_{ca}\omega_{cb}}{(j\omega)^2+j\omega(\omega_{ca}+\omega_{cb})+\omega_{ca}\omega_{cb}}$$

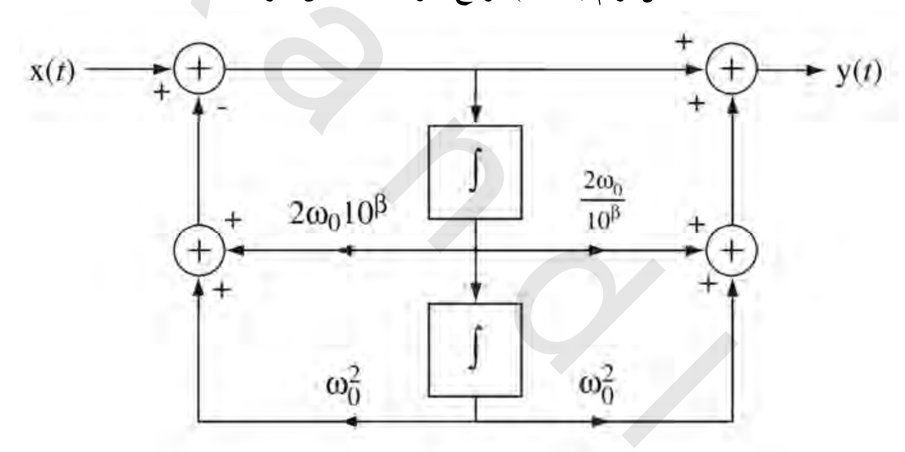
$$H(f) = \frac{(jf)^2+j2ff_{cb}+f_{ca}f_{cb}}{(jf)^2+jf(f_{ca}+f_{cb})+f_{ca}f_{cb}}$$

$$f_{ca} = \omega_{ca}/2\pi\ ,\ f_{cb} = \omega_{cb}/2\pi$$

إذا افتراضنا كمثال على ذلك أن $\omega_{ca}=50000$ وأن $\omega_{cb}=100$ فإن الاستجابة الترددية للمرشح المعوق المجال من الترددات ستكون كما في الشكل (١١،٦).



الشكل رقم (١١,٦) مرشح معوق لمجال من الترددات



الشكل رقم (١١,٧) نظام مزدوج التربيع

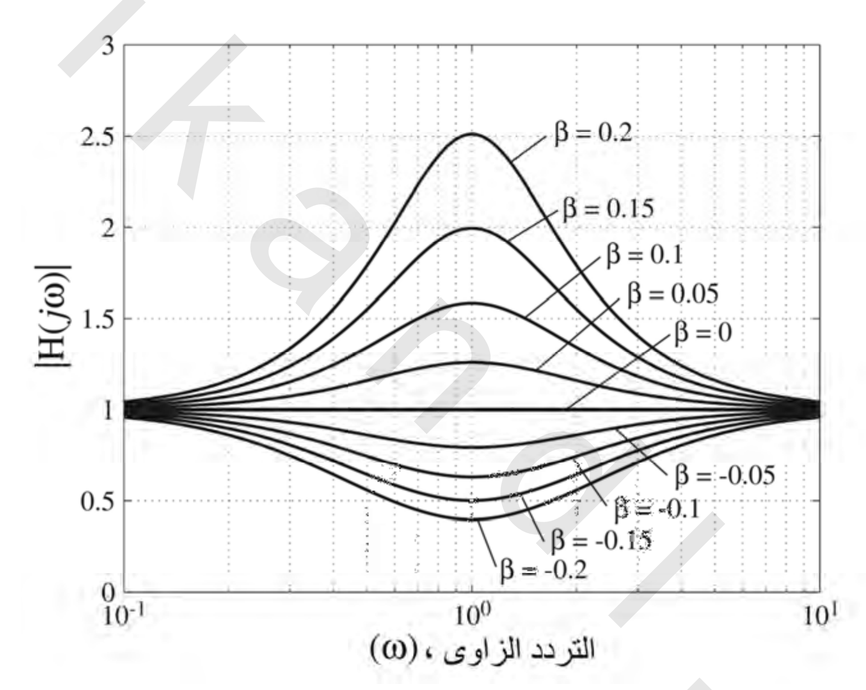
المعادل التخطيطي graphic equalizer يكون أكثر تعقيداً من المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة، والمنفذة للترددات المرتفعة، والمنفذة لمجال من الترددات البسيطة. إنها يكون لديها العديد من المرشحات المتتالية، كل منها يمكنه أن يزيد أو ينقص من الاستجابة الترددية للمكبر في مجال ضيق من الترددات. افتراض النظام الموضح في الشكل (١١,٧). دالة العبور والاستجابة الترددية له ستكون كما يلي:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2\omega_0 s/10^\beta + \omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0 s \times 10^\beta + \omega_0^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + j2\omega_0\omega/10^\beta + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + j2\omega_0\omega \times 10^\beta + \omega_0^2}$$

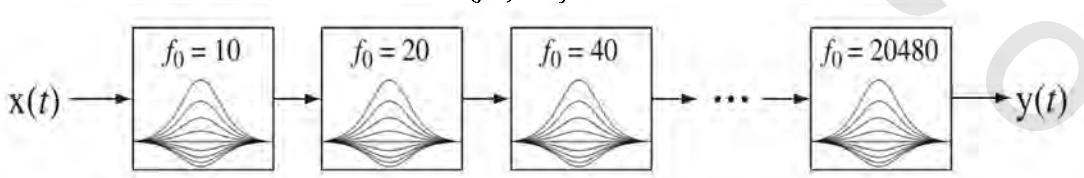
هذه الدالة تكون مزدوجة التربيع في المتغير s، بمعنى أنها نسبة بين كثيرتي حدود تربيعيتين. إذا رسمنا مقدار الاستجابة الترددية مع $\omega_0=1$ لقيم متعددة للمعامل β، فإنه يمكننا أن نرى كيف يمكن استخدام هذا النظام كأحد المرشحات في المعادل التخطيطي كما في الشكل رقم (١١,٨).

من الواضح أنه بالاختيار المناسب للمعامل β، فإن هذه المرشح يمكنه أن يقوي أو يدعم الإشارات بالقرب من تردده المركزي w_0 وله استجابة ترددية تقترب من الواحد عند الترددات البعيدة من تردده المركزي. يمكن استخدام مجموعة من المرشحات المتوالية من هذا النوع، وكل منها يكون له تردد مركزي مختلف، لتقوية أو تضعيف العديد من المجالات الترددية وبالتالي تقريب الاستجابة الترددية من أي شكل يريده المستخدم كما في الشكل رقم (١١,٩).



الشكل رقم (١١,٨) مقدار الاستجابة الترددية التالية:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + j2\omega/10^{\beta} + 1}{(j\omega)^2 + j2\omega \times 10^{\beta} + 1}$$

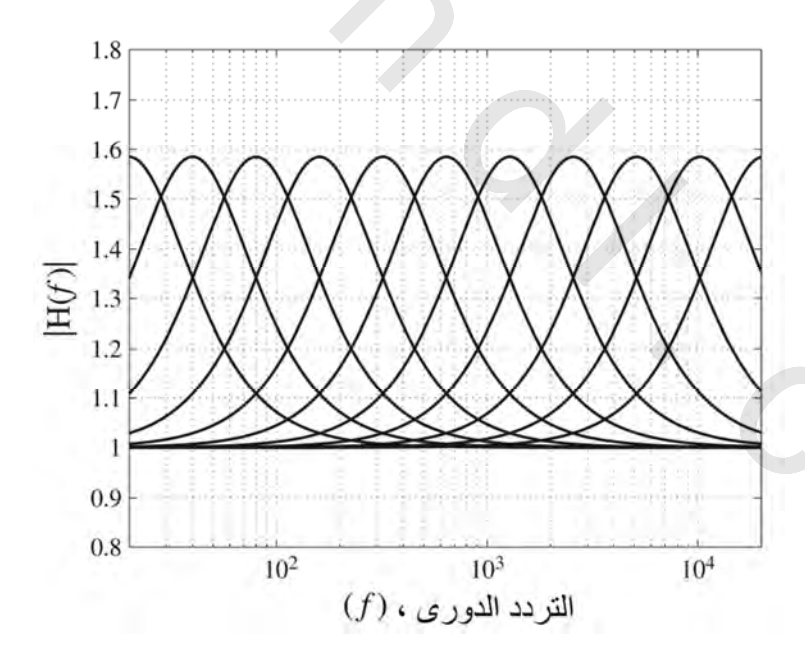


الشكل رقم (١١,٩) رسم صندوقي لمهوم المعادل التخطيطي

بوضع كل المرشحات بحيث يقوم كل منها بتقوية مجاله الترددي، فإن مقدار الاستجابة الترددية لهذه الأنظمة الجانبية من الممكن أن تكون كما في الشكل رقم (١١,١٠). الترددات المركزية لهذه المرشحات هي 20Hz، و 40Hz، و 80Hz، و....، و 20480 Hz. هناك مسافة بين كل مرشح والتالي تقدر بمسافة ضعفية ترددية octave أو الأوكتاف. الأوكتاف هو تغير بمقدار الضعف في التردد. إن ذلك يجعل التردد المركزي لهذه المرشحات متباعدة بانتظام على المقياس اللوغاريتمي، وعروض المجال لهذه المرشحات تكون أيضاً منتظمة على هذا التدريج اللوغاريتمي.

مثال آخر على نظام مصمم للتعامل مع إشارات غير معروفة من الممكن أن يكون بناء نظام جهاز قياس الضغط، والحرارة، والتدفق، وهكذا في أي عملية صناعية. إننا لا نعلم كيف تتغير معاملات هذه العمليات تماماً. ولكنها عموماً تقع خلال مدى معروف ولا يمكنها أن تتغير بأسرع من معدل معين نتيجة بعض الحدود الطبيعية للعملية. للمرة الثانية، فهذه المعرفة تسمح لنا بتصميم نظام للمعالجة المناسبة لهذا النوع من الإشارات.

على الرغم من أن خواص الإشارة الصحيحة قد لا تكون معروفة، إلا أننا في العادة نعرف شيئا عنها. إننا في العادة نعرف طيف القدرة التقريبي لها. بمعنى، أننا نعرف وصفاً تقريبياً لطاقة الإشارة في النطاق الترددي. إذا كنا لا نستطيع حساب طيف القدرة رياضيا، فإننا نستطيع تقديره اعتماداً على معرفة طبيعة النظام الذي تسبب في توليده أو أننا نستطيع قياسه. أحد الطرق لقياس هذا الطيف قد تكون من خلال استخدام المرشحات.



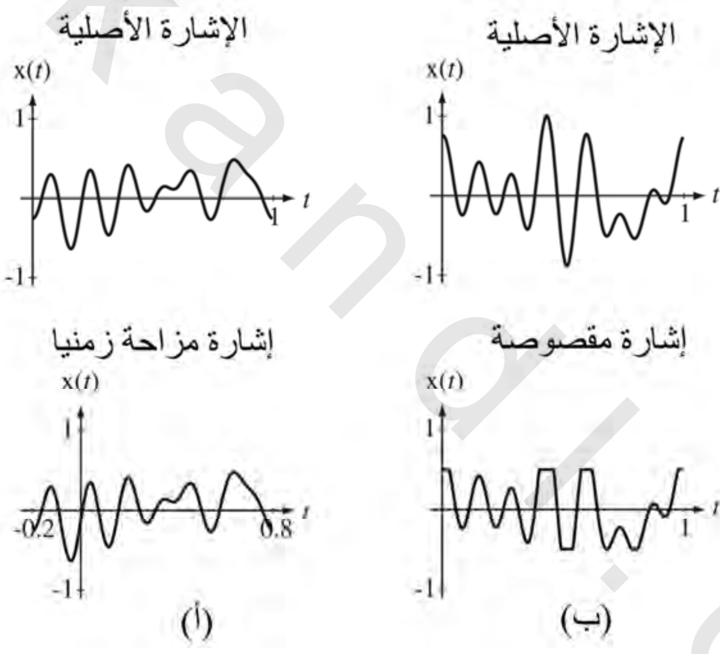
الشكل رقم (١١,١٠) مقدار الاستجابة الترددية لأحد عشر مرشحا موزعة على المدى السماعي.

المرشحات المثالية

التشويه

المرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة من الممكن أن يمرر كل طاقة الإشارة عند الترددات التي تحت قيمة عظمى معينة، بدون أي تشويه للإشارة في هذا المدى الترددي، ويوقف أو يعوق أو يحجز كل طاقة الإشارة عند الترددات الأعلى من هذه القيمة العظمى. من المهم هنا أن نحدد أو نعرف بدقة ماذا نعني بالتشويه. في العادة يتم تفسير التشويه في تحليل الإشارات والأنظمة أنه يعني أي تغيير في شكل الإشارة. ضرب الإشارة في قيمة ثابتة، أو الإزاحة الزمنية للإشارة، تعتبر تغييرات في الإشارة ولكنها لا تعتبر تشويهاً.

افترض الإشارة x(t) التي لها الشكل الموضح في أعلى الشكل رقم (١١,١١أ). بالتالي فإن الإشارة التي في أسفل الشكل رقم (١١,١١أ) تعتبر نسخة غير مشوهة من هذه الإشارة. الشكل رقم (١١,١١ب) يوضح أحد أنواع التشويه.

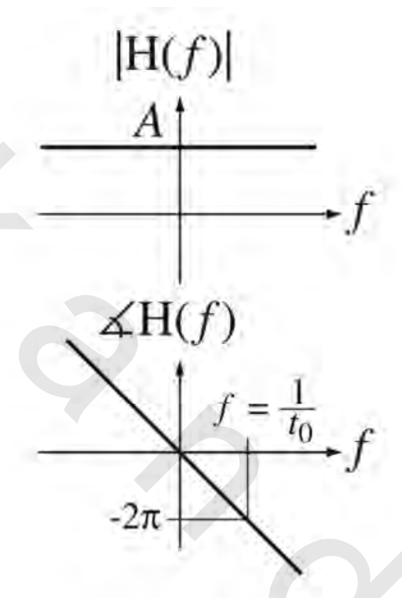


الشكل رقم (١١,١١) (أ) إشارة أصلية ونسخة منها متغيرة ولكنها غير مشوهة (ب) إشارة أصلية ونسخة مشوهة منها

إن استجابة أي نظام LTI تساوي التفاف الإثارة أو الدخل لهذا النظام مع استجابة الصدمة له. أي إشارة يتم التفافها مع وحدة الصدمة الموجودة عند نقطة الأصل لا يغير من هذه الإشارة، بمعنى $x(t)*\delta(t)=x(t)$. إذا كانت الصدمة لها شدة مختلفة عن الواحد، فإن الإشارة سيتم ضربها في هذه الشدة ولكن شكلها لن يتغير، بمعنى $x(t)*A\delta(t)=Ax(t)$. إذا تمت إزاحة وحدة الصدمة، فإن نتيجة الالتفاف سيتم إزاحتها أيضاً ولكن بدون تغيير

شكلها، بمعنى $x(t)*A\delta(t-t_0)=Ax(t-t_0)$. لذلك، فإن الاستجابة الترددية لأي مرشح والتي لا تتغير ستكون هي الصدمة، وهذه الصدمة من الممكن أن يكون لها شدة مختلفة عن الواحد ومن الممكن أيضاً أن تكون مزاحة زمنياً. الاستجابة الترددية المقابلة من الممكن أن تكون CTFT لاستجابة الصدمة

$H(f) = Ae^{-j2\pi f t_0}$. يمكن تمييز الاستجابة الترددية عن طريق مقدارها وزاويتها، $|H(f)|=A$ و $\measuredangle H(f) = -2\pi f t_0$. لذلك فإن أي نظام خالٍ من التشويه يكون له مقدار استجابة ترددية ثابت مع تغير التردد وزاوية تتغير خطيا مع التردد كما في الشكل رقم (١١،٢).



الشكل رقم (١١،١٢) المقدار والزاوية لنظام خالي من التشويه

يجب أن نلاحظ هنا أن استجابة الصدمة الخالية من التشويه أو الاستجابة الترددية هي في الحقيقة مفهوم لا يمكن تحقيقه في أي نظام عملي. لا يوجد نظام حقيقي تكون له استجابة ترددية تكون ثابتة على طول المدى الترددي حتى ما لانهاية. لذلك فإن الاستجابات الترددية لكل الأنظمة الطبيعية الحقيقية يجب أن تقترب من الصفر مع اقتراب التردد من الما لانهاية.

تصنيفات المرشحات

حيث إن الهدف من المرشح يكون هو إزاحة الجزء غير المرغوب فيه من الإشارة ويترك الباقي، فإنه لا يوجد مرشح، ولا حتى المرشح المثالي، يكون خالياً من التشويه لأن مقدار استجابته الترددية لا تكون ثابتة مع

التردد. ولكن المرشح المثالي يكون خالياً من التشويه في خلال مجال التمرير له فقط. مقدار استجابته الترددية يكون ثابتاً خلال مجال التمرير وزاوية الاستجابة الترددية تكون خطية خلال مجال التمرير أيضاً.

يمكننا الآن أن نعرف الأربعة أنواع الأساسية للمرشحات المثالية. في الوصف التالي تكون f_m، و f_L، و f_H كلها قيم موجبة ومحددة.

المرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة يسمح بمرور طاقة الإشارة للترددات في المدى $0<|f|<f_m$ بدون تشويه ويمنع طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى.

المرشح المثالي المنفذ للترددات المرتفعة يمنع مرور طاقة الإشارة للترددات في المدى $0<|f|<f_m$ ويسمح بمرور طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى بدون تشويه.

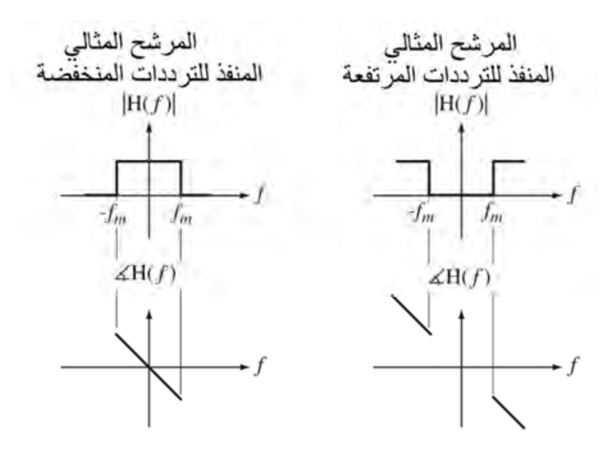
المرشح المثالي المنفذ لمجال ترددي يسمح بمرور طاقة الإشارة للترددات في المدى $f_L<|f|<f_H$ بدون تشويه ويمنع طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى.

المرشح المثالي المانع أو المعوق لمجال ترددي يمنع مرور طاقة الإشارة للترددات في المدى $f_L<|f|<f_H$ ويسمح بمرو طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى بدون تشويه.

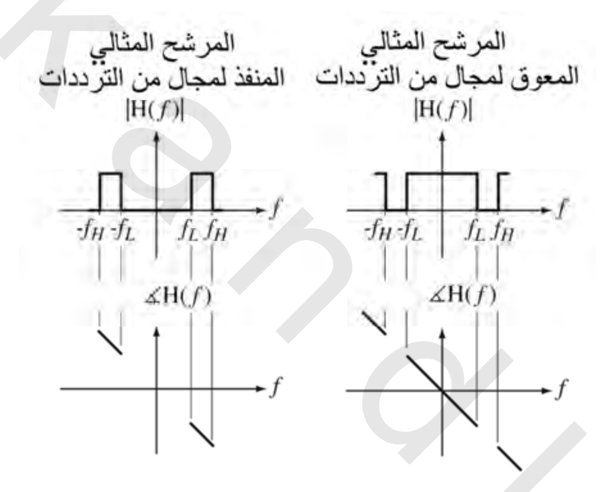
الاستجابة الترددية للمرشحات المثالية

الشكل رقم (١١،١٣) والشكل رقم (١١،١٤) يوضحان مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للأصناف الأربعة من المرشحات المثالية.

من المناسب هنا أن نعرف كلمة شائعة الاستخدام في تحليل الإشارات والأنظمة، وهي عرض المجال bandwidth. إن تعبير عرض المجال يتم تطبيقه على كل من الإشارات والأنظمة. إنها تعني عموماً "مدى من الترددات". إن هذا من الممكن أن يكون مدى من الترددات الموجودة في أي إشارة، أو مدى من الترددات يقوم النظام بتمريره، أو منعه. لأسباب تاريخية فإنه يفسر عادة على أنه مجال الترددات في الفراغ الترددي الموجب. فمثلاً، المرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة والذي له ترددات ركنية $\pm f_m$ كما هو موضح في الشكل رقم (١١،١٣) نقول أن له عرض مجال يساوي f_m، على الرغم من أن عرض المجال الذي مقداره لا يساوي صفراً يكون من الواضح أنه $2f_m$. المرشح المثالي المنفذ لمجال من الترددات يكون عرض مجاله يساوي f_H-f_L، والتي هي عرض مجال المرور في الفراغ الترددي الموجب.

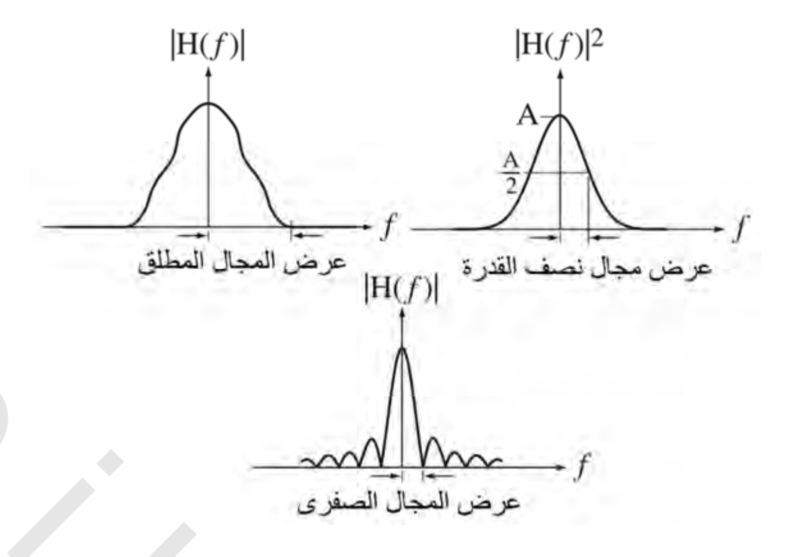


الشكل رقم (١١,١٣) مقدار وزاوية الاستجابات الترددية للمرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة، والمرشح المثالي المنفذ للترددات



الشكل رقم (١١,١٤) مقدار وزاوية الاستجابات الترددية للمرشح المثالي المنفذ لمجال من الترددات، والمرشح المثالي المعطل لمجال من الترددات

هناك العديد من الأنواع المختلفة لتعريفات عرض المجال منها، عرض المجال المطلق، وعرض مجال نصف القدرة، وعرض المجال الصفري وهكذا كما في الشكل رقم (١١,١٥). كل منها يعد مجالاً من الترددات ولكنه معرف بطريقة مختلفة. فمثلاً، إذا كانت الإشارة ليس لها طاقة على الإطلاق تحت تردد أصغر موجب وفوق تردد أعظم موجب، فإن عرض المجال المطلق يكون هو الفرق بين هذين الترددين. إذا كانت إشارة لها عرض مجال مطلق محدد، فإنها يطلق عليها بأنها ذات عرض مجال شديد التحديد، أو عادة يطلق عليها بأنها محددة المجال. معظم الإشارات الحقيقية لا يعرف بأنها محددة المجال ولذلك كانت هناك حاجة لتعريفات أخرى لعرض المجال.

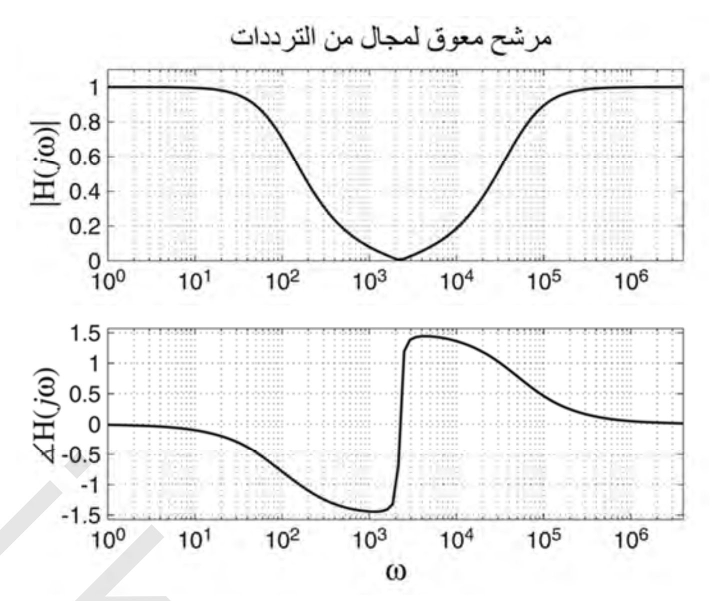


الشكل رقم (١١,١٥) أمثلة على تعريفات عرض المجال

الاستجابة الصدمية والسببية

الاستجابات الصدمية للمرشحات المثالية هي التحويلات العكسية لاستجاباتهم الترددية، الاستجابات الصدمية والترددية للأنواع الأساسية الأربعة للمرشحات المثالية تم تلخيصها في الشكل رقم (١١,١٦).

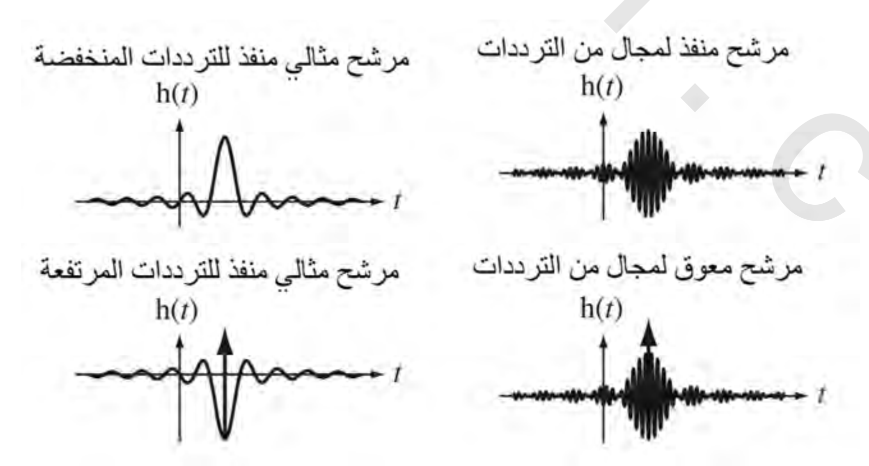
نوع المرشح المثالي	الإستجابة الترددية
منفذ للترددات المنخفضة	$H(f) = A\,rect(f/2f_m)e^{-j2\pi f t_0}$
منفذ للترددات المرتفعة	$H(f) = A\,[1 - rect(f/2f_m)]e^{-j2\pi f t_0}$
منفذ لمجال من الترددات	$H(f) = A\,[rect((f-f_0)/\Delta f) + rect((f+f_0)/\Delta f)]e^{-j2\pi f t_0}$
معوق لمجال من الترددات	$H(f) = A\,[1 - rect((f-f_0)/\Delta f) - rect((f+f_0)/\Delta f)]e^{-j2\pi f t_0}$
نوع المرشح المثالي	الاستجابة الصدمية
منفذ للترددات المنخفضة	$h(f) = 2A\,f_m sinc(2f_m(t-t_0))$
منفذ للترددات المرتفعة	$h(f) = A\delta(t-t_0) - 2A\,f_m sinc(2f_m(t-t_0))$
منفذ لمجال من الترددات	$h(f) = 2A\Delta f sinc(\Delta f(t-t_0))cos(2\pi f_0(t-t_0))$
معوق لمجال من الترددات	$h(f) = A\delta(t-t_0) - 2A\Delta f sinc(\Delta f(t-t_0))cos(2\pi f_0(t-t_0))$
	$\Delta f = f_H - f_L$, $f_0 = (f_H - f_L)/2$



الشكل رقم (١١,١٦) الاستجابات الترددية والاستجابات الصدمية للأنواع الأربعة الأساسية للمرشحات المثالية

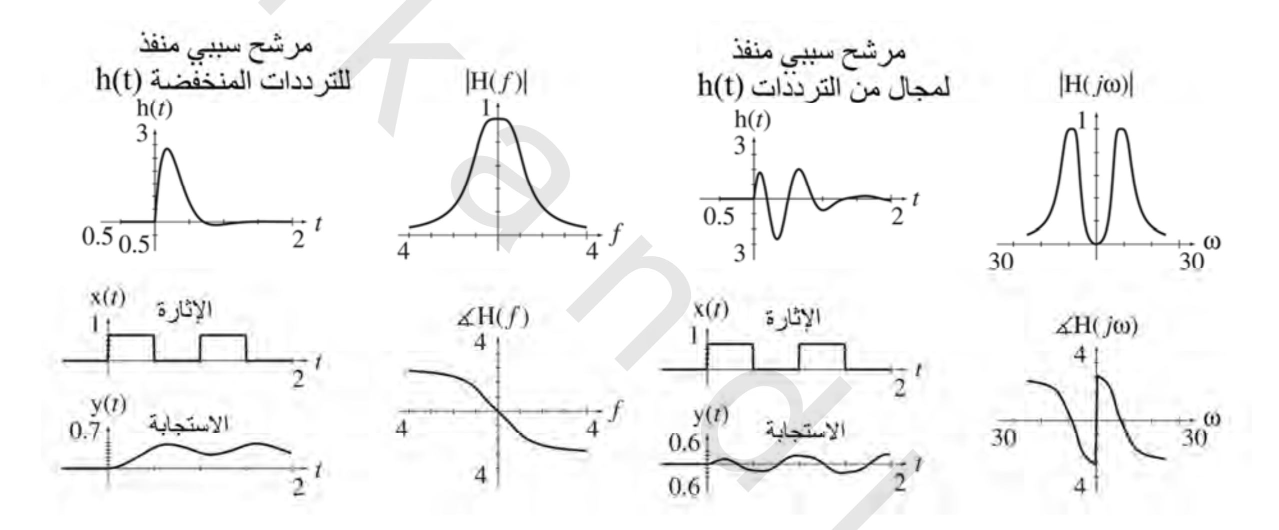
هذه المواصفات تعتبر مواصفات عامة، بمعنى أنها تشتمل على معامل تكبير اختياري ثابت A وزمن تأخير اختياري t_0. لاحظ أن المرشح المثالي المنفذ للترددات المرتفعة والمرشح المثالي المعوق لمجال من الترددات لها استجابات ترددية تمتد حتى المانهاية. وهذا غير ممكن في أي نظام حقيقي طبيعي. لذلك فإن التقريب العملي للمرشح المنفذ للترددات المرتفعة والمرشح المعوق لمجال من الترددات يسمحان للإشارات عالية التردد بالمرور ولكن حتى تردد عالٍ محدد. كلمة "عالي" كلمة نسبية وعملياً يقصد بها في العادة ترددات عالية بعد أي تردد في الإشارة حقيقي نتوقع وجوده في الإشارة.

الشكل (١١,١٧) يوضح أشكالا نموذجية للاستجابات الترددية للأنواع المختلفة للمرشحات المثالية.



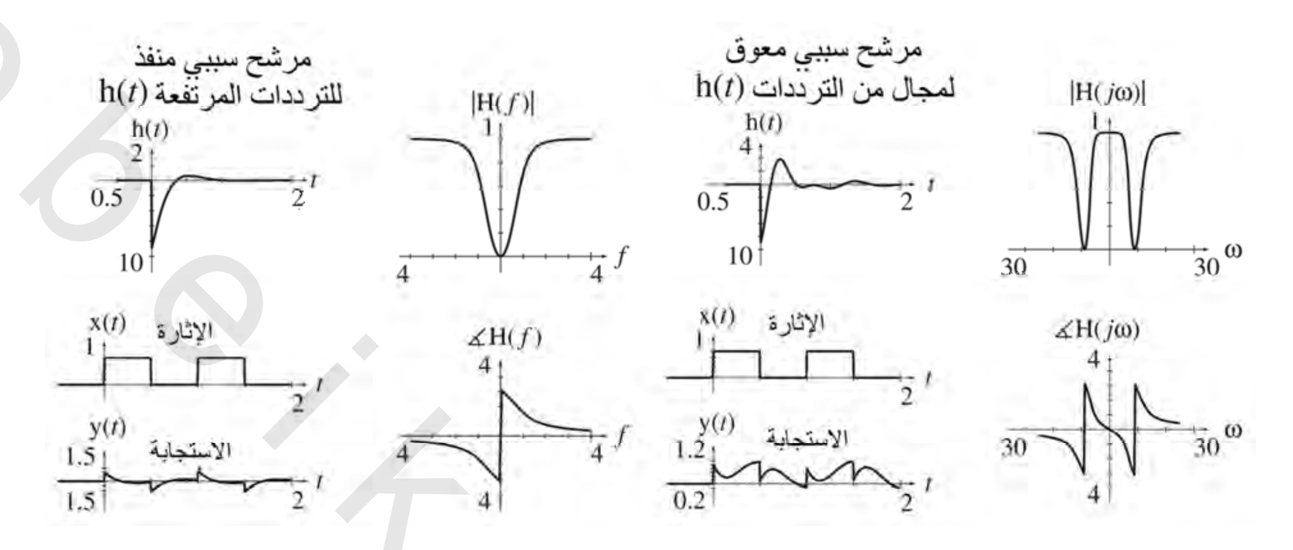
الشكل رقم (١١,١٧) الاستجابات الصدمية النموذجية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة، ومرشح منفذ للترددات العالية، ومرشح منفذ لمجال من الترددات، ومرشح معوق لمجال من الترددات

كما ذكرنا مسبقاً، فإن أحد الأسباب في تسمية المرشحات المثالية بمسمى المثالية، هو أنها لا يمكن أن تكون موجودة عملياً. السبب في ذلك ليس ببساطة هو أن مكونات الأنظمة المثالية التي لها مواصفات مثالية لا توجد عمليا (على الرغم من عدم كفاية ذلك)، ولكنه أكثر بدائية من ذلك. افترض الاستجابات الصدمية النموذجية الموضحة في الشكل رقم (١١,١٧). إنها استجابات المرشحات لوحدات صدمة مطبقة عند الزمن t=0. لاحظ أن كل الاستجابات الصدمية لهذه المرشحات المثالية لها قيم غير صفرية قبل تطبيق النبضة عند الزمن t=0. في الحقيقة فإن كل هذه الاستجابات الصدمية تبدأ عند زمن لا نهائي أو غير محدد قبل الزمن t=0. يجب أن يكون من الواضح بديهياً أن الأنظمة الحقيقية لا يمكنها أن تنظر في المستقبل وتتوقع تطبيق الإثارة وتبدأ في الاستجابة لها قبل أن تحدث. إن كل المرشحات المثالية ليست سببية.



شكل رقم (١١,١٨) الاستجابات الصدمية، والاستجابات الترددية، والاستجابات لموجات مربعة لمرشحات سببية منفذة للترددات المنخفضة وأخرى منفذة لمجال من الترددات

على الرغم من عدم إمكانية بناء المرشحات المثالية، فإنه يمكن بناء تقريبات مفيدة لهذه المرشحات. في الشكل رقم (١١,١٨) والشكل رقم (١١,١٩) يوجد بعض الأمثلة على الاستجابات الصدمية، والاستجابات الترددية، والاستجابات لموجات مربعة لبعض المرشحات غير المثالية والسببية التي تقارب الأربعة أنواع الشائعة من المرشحات المثالية.



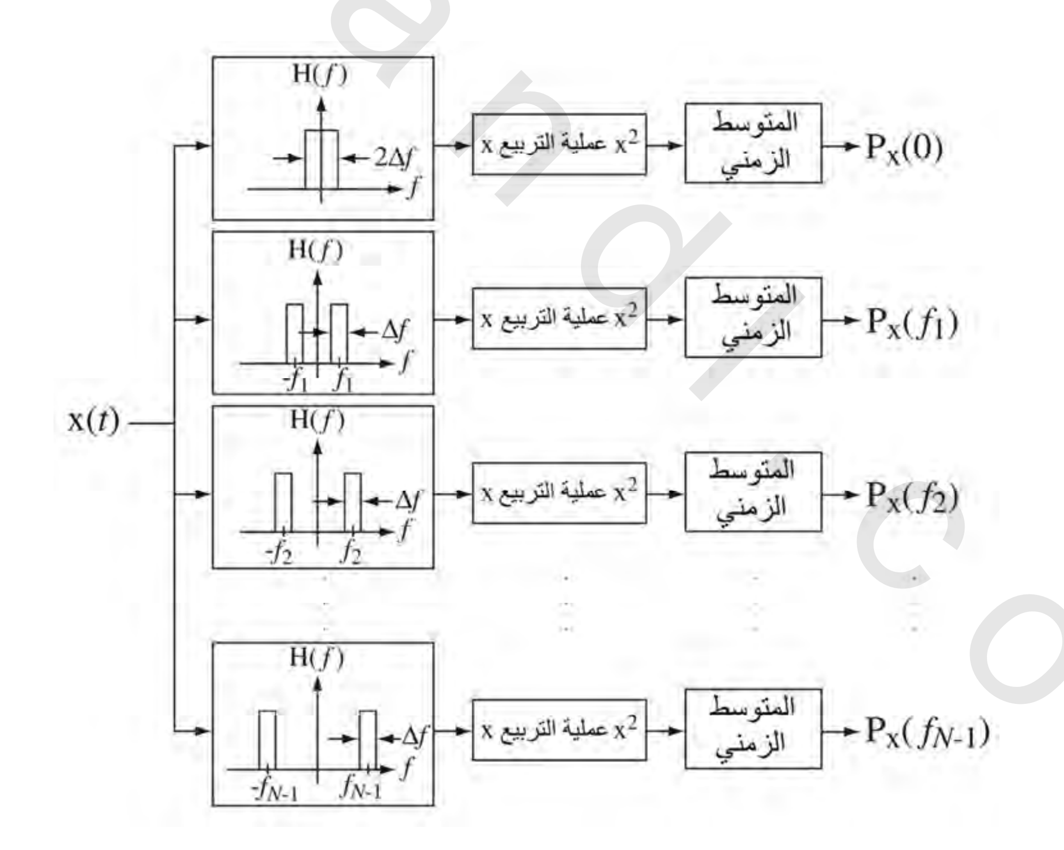
شكل رقم (١١,١٩) الاستجابات الصدمية، والاستجابات الترددية، والاستجابات لموجات مربعة لمرشحات سببية منفذة للترددات المرتفعة وأخرى معوقة لمجال من الترددات

إن المرشح المنفذ للترددات المنخفضة يعمل على تنعيم الموجة المربعة عن طريق التخلص من طاقة الإشارة العالية التردد منها ويترك طاقة الإشارة المنخفضة التردد (بما في ذلك التردد صفر)، مما يجعل القيمة المتوسطة لإشارتي الدخل والخرج تكون هي نفسها؛ (لأن الاستجابة الترددية عند التردد صفر تكون واحداً). المرشح المنفذ لمجال من الترددات يتخلص من طاقة الإشارة العالية التردد، وينعم الإشارة، وتخلص من طاقة الإشارة المنخفضة التردد (بما في ذلك التردد صفر)، مما يجعل القيمة المتوسطة للاستجابة تساوي الصفر.

المرشح المنفذ للترددات المرتفعة يتخلص من طاقة الإشارة المنخفضة التردد من الموجة المربعة، مما يجعل القيمة المتوسطة للاستجابة تساوي صفراً. ولكنه في الوقت نفسه يحتفظ بطاقة الإشارة العالية التردد التي تحدد عدم الاتصال الحاد في الموجة المربعة. المرشح المعوق لمجال من الترددات يتخلص من طاقة الإشارة في مجال صغير من الترددات ويترك طاقات الإشارة المنخفضة التردد والعالية التردد. لذلك فإنه يتم الاحتفاظ بعدم الاتصال في الموجة المربعة وبقيمتها المتوسطة ولكن بعضاً من طاقة الإشارة المتوسطة التردد يتم التخلص منها.

طيف القدرة

واحد من أهداف دخولنا في تحليل المرشحات كان لكي نشرح أحد الطرق في تحديد طيف القدرة لأي إشارة عن طريق قياسها. إن ذلك من الممكن أن يتم عن طريق النظام الموضح في الشكل رقم (١١.٢٠). يتم توجيه الإشارة إلى المرشحات المتعددة المنفذة لمجال من الترددات وكل منها له عرض المجال نفسه ولكن كتردد مركزي مختلف ووحيد. استجابة كل مرشح من هذه المرشحات تمثل جزءاً من الإشارة يقع في المجال الترددي لهذا المرشح. بعد ذلك، فإن الإشارة الخارجة من كل مرشح تدخل على نظام تربيع، وخرج هذا النظام يكون دخلاً لنظام متوسط زمني. نظام التربيع يقوم بتربيع الإشارة، وهذه ليست عملية خطية، وبالتالي فإن هذا النظاماً يكون نظام غير خطي. خرج نظام التربيع يمثل هذا الجزء من طاقة الإشارة اللحظية من الإشارة الأصلية x(t) التي تقع في مجال المرور للمرشح المنفذ لمجال من الترددات. بعد ذلك يقوم النظام التالي بإجراء المتوسط الزمني على هذه الإشارة. كل استجابة خرج $P_x(f_n)$ تمثل مقياس خرج لطاقة الإشارة الأصلية في مجال ضيق من الترددات المتمركزة عند f_n. بأخذ كل هذه المخارج مع بعضها، فإن كل الـ P's تمثل تغير طاقة الإشارة مع التردد، أو ما يسمى بطيف القدرة.

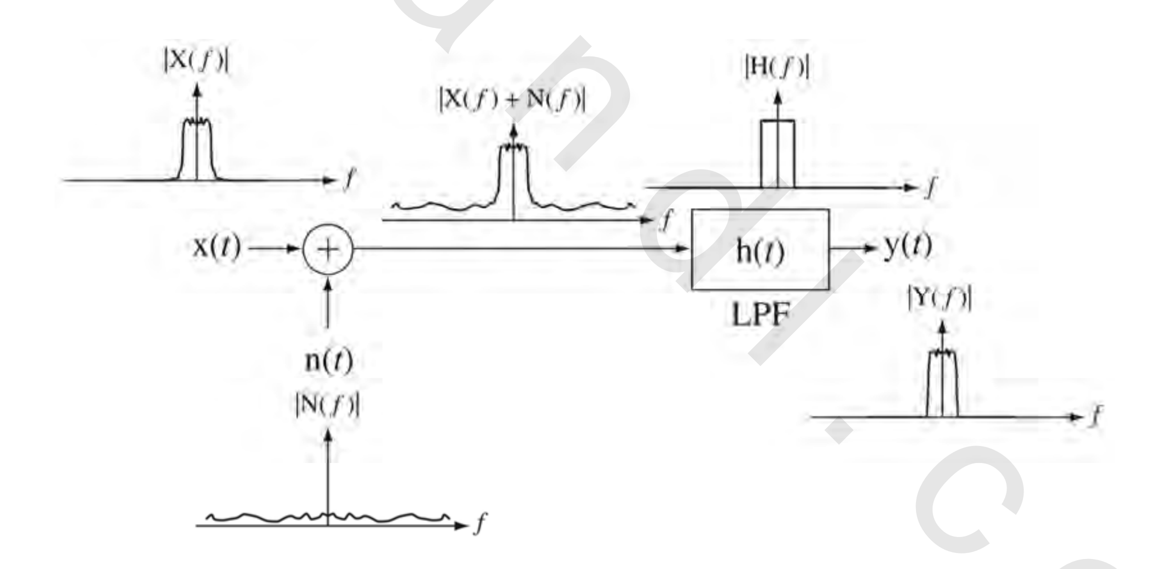


شكل رقم (١١,٢٠) نظام لقياس طيف القدرة لإشارة معينة

إنه من غير المحتمل أن يقوم المهندسون هذه الأيام بالبناء الحقيقي لمثل هذا النظام لقياس طيف القدرة لأي إشارة. الطريقة الأفضل لذلك هي استخدام جهاز يسمى المحلل الطيفي spectrum analyzer. ولكن هذا التوضيح كان مفيداً لأنه يؤكد على مفهوم المرشحات وماذا نعني من لفظ طيف القدرة.

التخلص من الضوضاء

كل إشارة مفيدة يصحبها عادة إشارة أخرى غير مرغوبة تسمى الضوضاء تكون مضافة عليها. أحد أهم الاستخدامات المفيدة للمرشحات هي التخلص من هذه الضوضاء. مصادر الضوضاء عديدة ومتغيرة. يمكن التقليل من هذه الضوضاء بدرجة كبيرة عن طريق التصميم بعناية لهذه المرشحات ولكن لا يمكن التخلص التام منها. كمثال على هذا الترشيح ، افترض أن طاقة الإشارة محددة في مدى ضيق من الترددات المنخفضة وأن طاقة الضوضاء تكون منتشرة على مدى أوسع من الترددات (وهذا يعتبر موقفاً شائعاً). يمكن ترشيح الإشارة زائد الضوضاء باستخدام مرشح منفذ للترددات المنخفضة لتقليل طاقة الضوضاء بدون أي تأثير كبير على طاقة الإشارة كما في الشكل رقم (١١,٢١).



شكل رقم (١١,٢١) التخلص الجزئي من الضوضاء باستخدام مرشح منفذ للترددات المنخفضة

نسبة طاقة الإشارة المرغوب فيها إلى طاقة إشارة الضوضاء تسمى نسبة الإشارة إلى الضوضاء signal to noise ratio وتختصر دائما إلى SNR. ربما يكون الافتراض الأساسي الأكثر أهمية في أنظمة الاتصالات هو تعظيم نسبة الإشارة للضوضاء SNR ، وتعتبر المرشحات من أهم التقنيات في تعظيم الـ SNR.

مخطط بود

الديسبلDecibil

عند رسم مخطط الاستجابة الترددية، فإن مقدار الاستجابة الترددية يتم تحويله في العادة إلى تدريج لوغاريتمي باستخدام وحدة تسمى الديسبل dB. إذا كان مقدار الاستجابة الترددية يُعطى بالعلاقة التالية :

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right|$$

فإن هذا المقدار معبرا عنه بالديسبل سيكون كما يلي :

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right| = |Y(j\omega)|_{dB} - |X(j\omega)|_{dB}$$ المعادلة رقم (١١.١)

إن الاسم ديسبل يأتي من الوحدة الأصلية المعرفة عن طريق مهندسي تليفونات بل Bell Telephone، وهي وحدة البل bel (B)، المسماة على شرف أكسندر جراهام بل مكتشف التليفون. لقد تم تحديد البل بأنه اللوغاريت العادي (القاعدة عشرة) لنسبة القدرة. فمثلاً، إذا كانت إشارة الاستجابة لنظام معين تساوي 100 وكانت إشارة الدخل (معرفة ب الوحدات نفسها) تسوي 20، فإن تكبير قدرة هذا النظام معبراً عنها بالبل ستكون كما يلي :

$$\log_{10}(P_Y/P_X) = \log_{10}(100/20) \cong 0.699\ B$$

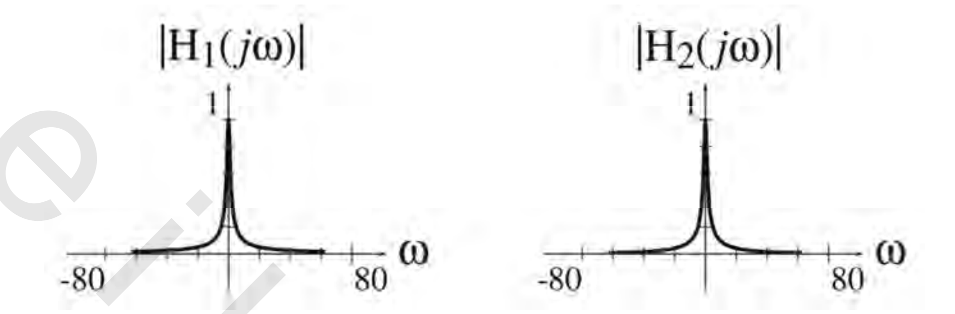
وحيث إن مقدمة الكلمة التي هي ديسي deci هي الوحدة العالمية القياسية للعشر (1/10)، فإن الديسبل يساوي عشر البل، وبالتالي فإن نسبة القدرة نفسها معبراً عنها بالديسبل dB ستكون 6.99dB. وبالتالي فإن تكبير القدرة معبراً عنه بالديسبل dB سيكون $10\log_{10}(P_Y/P_X)$. حيث إن طاقة الإشارة تتناسب مع مربع الإشارة نفسها، فإن نسبة الطاقة، معبراً عنها مباشرة بدلالة مقدار الإشارة ستكون :

$$10\log_{10}(P_Y/P_X) = 10\log_{10}(Y^2/X^2) = 10\log_{10}[(Y/X)^2] = 20\log_{10}(Y/X)$$

في أي نظام يكون فيه العديد من الأنظمة الجانبية موصلة على التوالي، تكون الاستجابة الترددية الكلية تساوي حاصل ضرب الاستجابات الترددية المنفردة، ولكن الاستجابة الترددية الكلية بالديسبل تساوي مجموع الاستجابات الترددية المنفردة معبراً عن كل منها بالديسبل نتيجة التعريف اللوغاريتمي لـ dB. أيضاً، فإن استخدام الديسبل من الممكن أن يوضح سلوك الاستجابة الترددية الذي يكون من الصعب رؤيته من خلال الشكل الخطي.
قبل أن نفترض الاستجابات الترددية لمرشحات معينة، فإنه من المفيد أن نتعود على طريقة مفيدة جداً وشائعة لعرض الاستجابة الترددية. في العادة تكون مخططات الاستجابة الترددية الخطية، على الرغم من دقتها، لا توضح

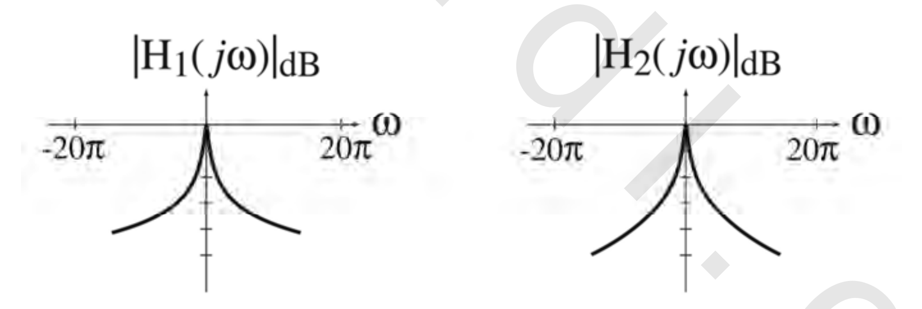
سلوكاً مهماً للنظام. كمثال على ذلك، افترض المخططين لاثنين من الاستجابات الترددية المختلفة الشكل كما يلي، وكما هو موضح في الشكل رقم (١١،٢٢):

$$H_2(j\omega) = \frac{30}{30 - \omega^2 + j31\omega} \text{ و } H_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$



شكل رقم (١١،٢٢) مقارنة بين مقداري اثنين من الاستجابات الترددية المختلفين ظاهرياً.

بالرسم بهذه الطريقة، فإن مقدار الاستجابة الترددية للدالتين يظهران متماثلين تماماً، على الرغم من معرفتنا باختلاف الاستجابتين. أحد الطرق لإظهار الفروق بين مثل هذه الاستجابات الترددية هو رسمها بالديسبل. الديسبل تم تحديده لوغاريتمياً كما رأينا. الرسم اللوغاريتمي يقلل من القيم الكبيرة ويؤكد أو يكبر القيم الصغيرة، وبالتالي فإن الفروق الصغيرة بين الاستجابات الترددية يمكن رؤيتها بسهولة أكثر كما في الشكل رقم (١١.٢٣).



شكل رقم (١١،٢٣) الاستجابتان الترددتيان السابقتان مرسومتان باستخدام مخطط لوغاريتمي للمقدار

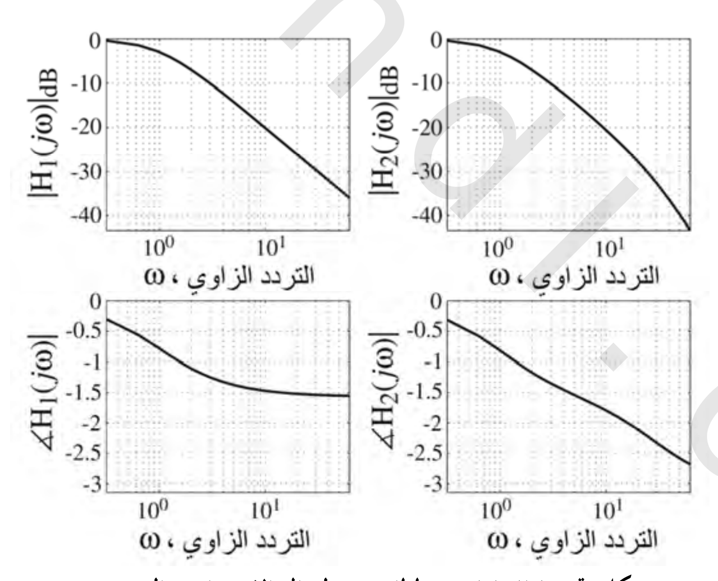
في المخطط الخطي، ظهر سلوك مقدار الاستجابتين الترددتين متماثلاً تماماً لأنه عند القيم الصغيرة يظهر المقداران متماثلين. في مخطط الديسبل، فإن الفرق بين مقدار الاستجابتين الترددتين عند القيم الصغيرة جداً يمكن ملاحظته.

على الرغم من استخدام هذا النوع من المخططات أحياناً، إلا أن الطريقة الأكثر شيوعاً في عرض الاستجابة الترددية هي **مخطط** بود Bode plot[1] ، أو رسم بود. مثل **مخطط** المقدار اللوغاريتمي ، فإن **مخطط** بود يظهر الفروق الصغيرة بين الاستجابات الترددية ولكنه يعتبر طريقة نظامية في العرض السريع أو تقدير الاستجابة الكلية لنظام قد يحتوي علي العديد من الاستجابات الترددية المتتالية. مخطط المقدار اللوغاريتمي يكون لوغاريتمياً في بعد واحد. مخطط بود يكون لوغاريتمياً في البعدين. مخطط بود لمقدار الاستجابة الترددية عبارة عن مخطط لمقدار الاستجابة الترددية بالديسبل مع التدريج الترددي اللوغاريتمي. حيث إن تدريج التردد أصبح الآن لوغاريتمياً هو الآخر، فإن الترددات الموجبة فقط هي التي يمكن استخدامها. إن هذا لا يعتبر فقد في المعلومات حيث إنه في الاستجابة الترددية للأنظمة الحقيقية تكون قيم الاستجابة الترددية عند أي تردد سالب تساوي المرافق المركب للقيمة المقابلة عند التردد الموجب.

بالعودة إلى الاستجابتين الترددتين المختلفتين للنظامين السابقين واللذين سنعيد كتابتهما كما يلي :

$$H_2(j\omega) = \frac{30}{30 - \omega^2 + j31\omega} \quad \text{و} \quad H_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

إذا قمنا برسم مخطط بود لكل منهما، فإن الفروق بينهما ستصبح أكثر ظهوراً كما في الشكل رقم (١١,٢٤). إن استخدام تدريج الـ dB يجعل سلوك مقداري الاستجابتين الترددتين عند الترددات العالية أكثر تفريقاً.



شكل رقم (١١,٢٤) مخططات بود لمثال الاستجابتين الترددتين.

---

(١) حصل هندريك بوده على شهادة البكالوريوس في عام ١٩٢٤ والماجستير عام ١٩٢٦ من جامعة ولاية أوهايو. في عام ١٩٢٦ بدأ العمل في مختبرات يل تيلكوم وعمل أيضاً في المرشحات الإلكترونية. وفي اثناء عملة في المختبرات ، ذهب بيل إلى كلية الدراسات العليا في جامعة كولومبيا وحصل على الدكتوراه في ١٩٣٥. في عام ١٩٣٨ استخدم بوده منحنيات القيمة والطور للاستجابة الترددية للدوال المركبة. وفحص استقرار الحلقات المغلقة باستخدام مفاهيم حدود الطور والمكسب. وتستخدم هذه المنحنيات على نطاق واسع مع العديد الأنظمة الإلكترونية. وقام بنشر كتاب نشر هو تحليل الشبكات وتصميم مكبر التغذية العكسية الذي يعتبر من الكتب الهامة هذا المجال. تقاعد بودة في أكتوبر ١٩٦٧ ، وتم اختياره وانتخابه أستاذاً للنظم الهندسية في جامعة هارفارد.

على الرغم من حقيقة أن الفروق بين المستويات المنخفضة لمقدار الاستجابات الترددية يمكن رؤيتها بطريقة أفضل باستخدام مخطط بود تعتبر سبباً جيداً، فإنه ليست تحت أي ظرف تعتبر السبب الوحيد، ولا هي حتى السبب الرئيسي. إن حقيقة أن معاملات التكبير للنظام بالديسبل يتم جمعها بدلا من ضربها في الأنظمة المتتالية يجعل التخطيط التقديري السريع لسلوك التكبير الكلي للنظام أسهل جداً باستخدام مخططات بود عن المخططات الخطية.

معظم الأنظمة الـ LTI يمكن وصفها بمعادلات تفاضلية خطية بمعاملات ثابتة. الصورة الأكثر شيوعاً لهذه المعادلة هي:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} X(t)$$ المعادلة رقم (١١,٢)

حيث x(t) تمثل الإثارة أو الدخل و y(t) هي الاستجابة أو الخرج. في الفصل ٥ عرفنا أن دالة العبور تكون على الصورة التالية:

$$H(s) = \frac{b_{M}s^{M} + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_{N}s^{N} + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1 s + b_0}$$

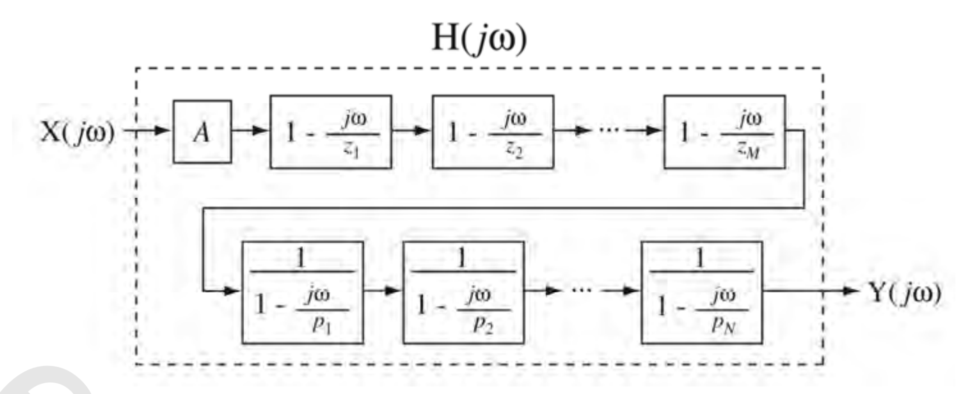
يمكن تحليل كثيرات الحدود في كل من البسط والمقام والتعبير عن دالة العبور كما يلي:

$$H(s) = A\frac{(1 - s/z_1)(1 - s/z_2)\ \dots\ (1 - s/z_m)}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2)\ \dots\ (1 - s/p_m)}$$

حيث كل من الـ z's وال p's تمثل الأصفار والأقطاب.

بالنسبة للأنظمة الحقيقية فإن المعاملات a و b في المعادلة (١١.٢) تكون كلها حقيقية وكل الـ p's والـ z's في صورة المفكوك تكون كلها حقيقية أو تحدث في أزواج مركبة مترافقة، بحيث إنه عند ضرب كل من البسط والمقام في صورة المفكوك للحصول على صورة النسبة بين كثيرتي الحدود فإن معاملات قوى المتغير s تكون كلها حقيقية.

من صورة المفكوك يمكننا افتراض أن دالة عبور النظام يمكن اعتبارها كما لو كانت تتابعاً من التكبير A غير المعتمد على التردد والعديد من الأنظمة الجانبية، التي يكون لكل منها دالة عبور من قطب محدد واحد، أو صفر محدد واحد. إذا حولنا الآن دالة العبور إلى استجابة ترددية من خلال s→jω، فإننا يمكننا أن نفكر في الاستجابة الترددية الكلية على أنها نتيجة من تتابع هذه المكونات المتعددة، كل منها له استجابة ترددية بسيطة كما في الشكل رقم (١١.٢٥).



شكل رقم (١١,٢٥) نظام ممثل في صورة أنظمة أبسط موصلة على التوالي

كل نظام من النظم المكونة ، أو الجانبية سيكون له مخطط بود ، وحيث إن مقدار مخططات بود تكون مرسومة بالديسبل ، فإن مخطط بود الكلي سيساوي مجموع مقادير مخططات بود لكل نظام منفرد. سيتم رسم الزاوية بطريقة خطية كما سبق (في تدريج لوغاريتمي للتردد) ومخطط بود للزاوية سيكون مجموع كل الزوايا المكونة للنظام الكلي.

نظام القطب الحقيقي الوحيد

افتراض الاستجابة الترددية لنظام جانبي من قطب واحد عند $s=p_k$ ولا يوجد أي صفر محدد كما يلي :

$$H(s) = \frac{1}{1-s/p_k} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1-j\omega/p_k}$$ المعادلة رقم (١١.٣)

قبل الاستمرار ، سنفترض أولا التحويل CTFT العكسي للـ $H(j\omega)$. يمكننا استخدام زوج CTFT التالي :

$$e^{-at}u(t) \overset{f}{\leftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega}, \qquad \mathrm{Re}(a) > 0$$

سنعيد كتابة (١١.٣) كما يلي :

$$H(j\omega) = -\frac{p_k}{j\omega - p_k}$$

وبالتالي سنحصل على ما يلي :

$$-p_k e^{p_k t}u(t) \overset{f}{\leftrightarrow} -\frac{p_k}{j\omega-p_k}, \; pk < 0$$ المعادلة رقم (١١,٤)

إن ذلك يوضح أن القطب يجب أن يكون له قيمة سالبة حقيقية حتى يكون للاستجابة الترددية معنى. إذا كانت القيمة موجبة ، فإننا لن نستطيع أن ننفذ CTFT العكسي لإيجاد الدالة الزمنية المطلوبة. إذا كانت p_k سالبة ، فإن الأس في المعادلة (١١,٤) سيتناقص إلى الصفر في المجال الزمني الموجب. إذا كانت موجبة ، فإنها ستتزايد أسياً في المجال الزمني الموجب وبالتالي سيكون النظام غير مستقر. تحويل فورير للأس المتزايد غير موجود. أيضاً ، فإن الاستجابة الترددية لن يكون لها معنى عملي للأنظمة غير المستقرة ؛ لأنها لن يمكن اختبارها أو التعامل معها أبداً.

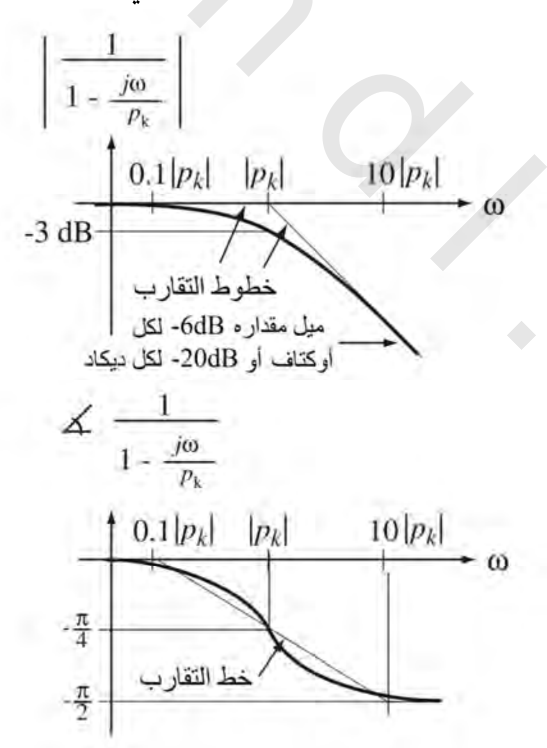
يوضح الشكل رقم (١١,٢٦) مقدار وزاوية الاستجابة $H(j\omega)=1/(1-j\omega/p_k)$ مع التردد. بالنسبة للترددات $\omega<<|p_k|$ فإن الاستجابة الترددية تقترب من $H(j\omega)=1$، وهذا يعني أن مقدار الاستجابة بالديسبل سيكون صفر dB تقريبا وزاوية الاستجابة ستكةن صفراً تقريباً أيضاً. بالنسبة للترددات $\omega>>|p_k|$ فإن الاستجابة الترددية ستكون تقريباً $H(j\omega)=-p_k/j\omega$، وبالتالي فإن مقدار الاستجابة الترددية سيقترب من ميل خطي مقداره 6dB- لكل أوكتاف أو 20dB- لكل ديكاد وستقترب زاوية الاستجابة من قيمة ثابتة مقدارها $-\pi/2$ راديان. (الأوكتاف هو معامل مقداره 2- تغير في التردد والديكاد هو معامل مقداره 10- تغير في التردد). هذه السلوكيات للترددات المتطرفة تعرف أو تحدد خطوط التقاربللمقدار والزاوية. تقاطع خطي ويعني أن مقدار خطوط التقارب تحدث عند $\omega=|p_k|$، وهي تسمى التردد الركني. عند التردد الركني $w=|p_k|$ ستكون الاستجابة الترددية كما يلي:

$$H(j\omega)=\frac{p_k}{1-\mathrm{j}|p_k|/p_k}=\frac{1}{1+\mathrm{j}},\qquad pk<0$$

وسيكون مقدارها يساوي $1/\sqrt{2}\cong 0.707$. يمكننا كتابة ذلك بالديسبل كما يلي:

$$(0.707)_{dB}=20log_{10}(0.707)=-3\ dB$$

عند هذه النقطة سيكون مخطط بود يساوي 3dB تحت التردد الركني المكون من تقاطع خطوط التقارب. هذه النقطة ستكون النقطة ذات أكبر بعد لمقدار مخطط بود من خطوط التقارب. زاوية مخطط بود تتغير خلال $-\pi/4$ راديان عند التردد الركني وتقترب من الصفر تحتها و $-\pi/2$ راديان فوق التردد الركني.



شكل رقم (١١,٢٦) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لنظام جانبي لقطب واحد حقيقي سالب

مثال ١١,١

مخطط بود للاستجابة الترددية لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة

ارسم مقدار وزاوية مخطط بود للاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة الذي له ثابت زمني مقداره 50μs.

معادلة الاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة يمكن كتابتها كما يلي :

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega \text{RC} + 1}$$

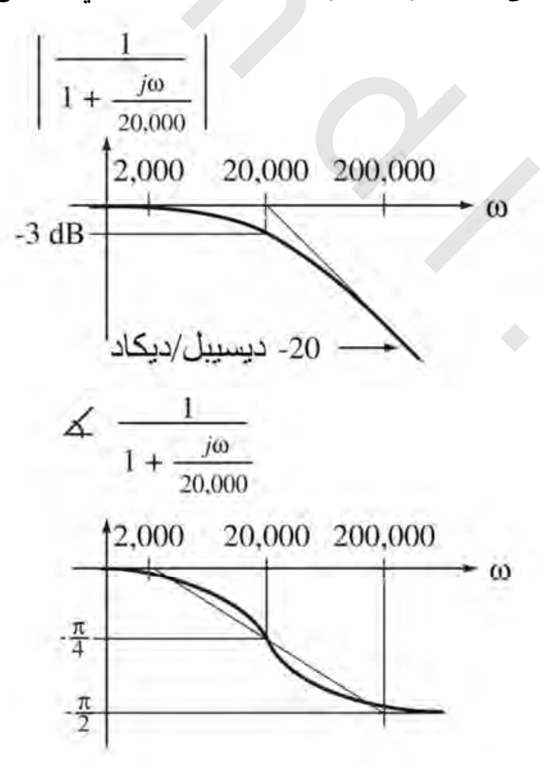
الثابت الزمني هو RC ، ولذلك يمكن كتابة الآتي :

$$\text{H}(\text{j}\omega) = \frac{1}{\text{j}50 \times 10^{-6}\omega + 1}$$

بوضع المقام يساوي صفراً والحل لإيجاد موضع القطب سنحصل علي موضع القطب عند $j\omega$=-20000. وبالتالي يمكننا كتابة الاستجابة الترددية في صورتها القياسية التي هي قطب واحد حقيقي سالب علي الصورة التالية :

$$\text{H}(\text{j}\omega) = \frac{1}{1 - \text{j}\omega/(-20{,}000)}$$

التردد الركني المقابل على مخطط بود سيكون عند ω=20000 كما في الشكل رقم (١١.٢٧).



شكل رقم (١١,٢٧) مقدار وزاوية مخطط بود للاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة

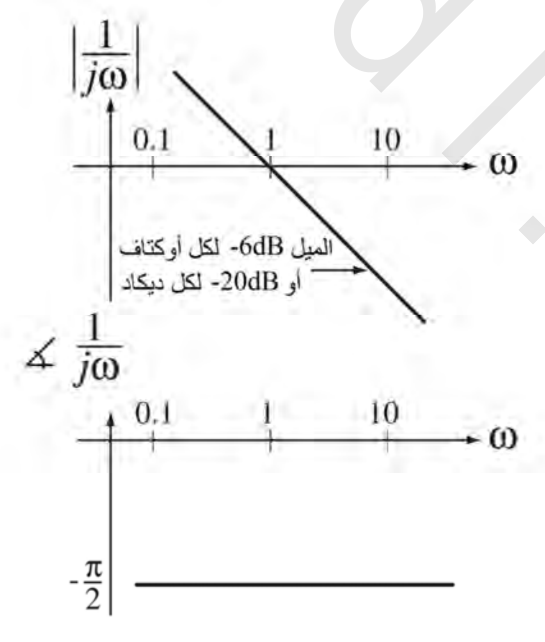
نظام الصفر الحقيقي الوحيد

بعمل تحليل مشابه لما تم عمله مع نظام القطب الوحيد الحقيقي، فإن مقدار وزاوية مخطط بود لنظام جانبي له صفر حقيقي واحد سالب وبدون أي قطب محدد، سيكون كما يلي وكما في الشكل رقم (١١,٢٨):

$$H(s) = 1 - S/z_k \Rightarrow H(j\omega) = 1 - j\omega/z_k, \qquad z_k < 0$$

$\left|1 - \frac{j\omega}{z_k}\right|$
الميل 6dB لكل أوكتاف
أو 20dB لكل ديكاد
خطوط التقارب
3 dB
0.1
$|z_k|$
$10|z_k|$
ω
$\measuredangle\, 1 - \frac{j\omega}{z_k}$
$\frac{\pi}{2}$
خط التقارب
$\frac{\pi}{4}$
0.1
$|z_k|$
$10|z_k|$
ω

شكل رقم (١١,٢٨) مقدار وزاوية مخطط بود للاستجابة الترددية لنظام جانبي من صفر حقيقي واحد سالب.



شكل رقم (١١,٢٩) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لقطب واحد s=0

المخططات مشابهة تماماً لهذه الخاصة بالقطب الحقيقي الواحد السالب عدا أن خطوط تقارب المقدار فوق التردد الركني لها ميل يساوي 6dB+ لكل أوكتاف أو 20dB+ لكل ديكاد والزاوية تقترب من $\pi/2$+ بدلاً من $-\pi/2$ راديان. إنه في الحقيقة مخطط بود للقطب الوحد الحقيقي السالب ولكنه معكوس من فوق لتحت.

بالنسبة للنظام الجانبي الذي له صفر حقيقي وحيد وسالب وبدون أي قطب محدد وعلى الصورة التالية :

$$H(j\omega) = 1 - j\omega/\mathrm{z_k}\,, \qquad \mathrm{z_k} > 0$$

فإن مخطط المقدار يكون هو نفسه كما في الشكل رقم (١١.٢٨) ولكن الزاوية تقترب من $-\pi/2$ بدلاً من $\pi/2$+ عند التردد فوق التردد الركني.

المكاملات والمفاضلات

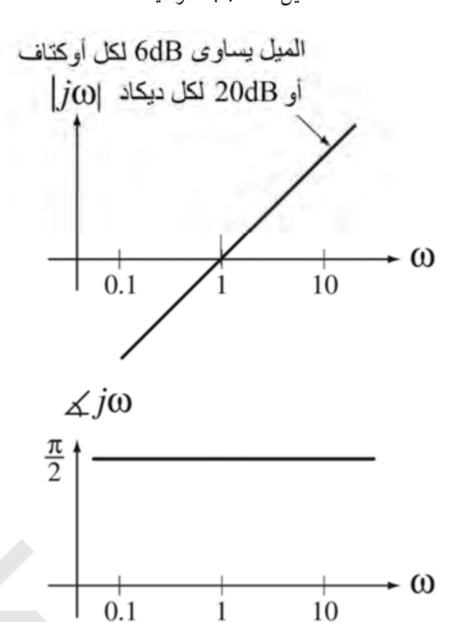
يجب أن نفترض أيضاً القطب أو الصفر عند التردد صفر كما في الشكل رقم (١١.٢٩) والشكل رقم (١١.٣٠). أي نظام له قطب واحد عند s=0 يسمى مكاملاً لأن دالة العبور له تكون على الصورة H(s)=1/s مع العلم أن القسمة على s تقابل التكامل في النطاق الزمني.

أي نظام له صفر وحيد عند s=0 يسمى مفاضلاً لأن دالة العبور له تكون على الصورة H(s)=s مع العلم أن الضرب في s يقابل التفاضل في النطاق الزمني.

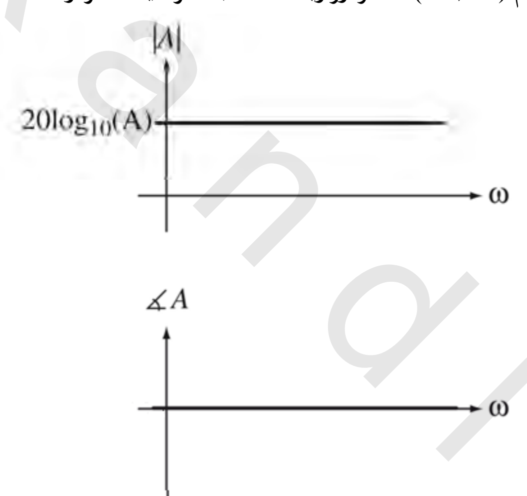
التكبير غير المعتمد على التردد

المكون الوحيد المتبقي من الأنظمة البسيطة هو معامل التكبير غير المعتمد على التردد الموضح في الشكل رقم (١١,٣١). في هذا الشكل افتراضنا أن معامل التكبير A ثابت وموجب، وهذا يوضح لماذا تكون الزاوية تساوي صفر. إذا كان A سالباً فإن الزاوية ستكون $\pm\pi$ راديان.

خطوط التقارب تعتبر وسيلة مساعدة في رسم مخطط بود الحقيقي وهي تساعد بعناية في رسم مخطط بود الكلي للأنظمة الأكثر تعقيداً. يمكن رسم خطوط التقارب بسرعة من معرفة بعض القوانين البسيطة وجمعها مع بعضها بغضا. بعد ذلك يمكن الرسم التقريبي لمخطط بود عن طريق رسم منحنى مستمر أكثر نعومة يقترب من خطوط التقارب ويتباعد عنها عند التردد الركني بمقدار 3dB±.



شكل رقم (١١,٣٠) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لصفر واحد عند s=0

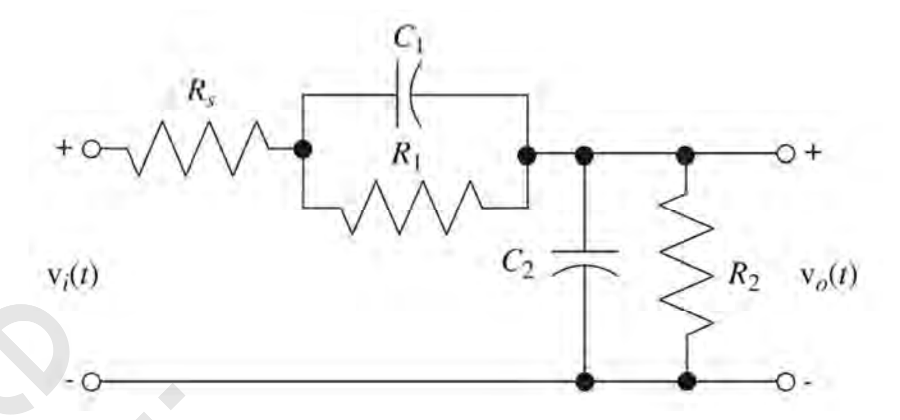


شكل رقم (١١,٣١) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لمعامل تكبير A غير معتمد على التردد

مثال ١١,٢

مخطط بود للاستجابة الترددية لدائرة RC

ارسم مخطط بود للاستجابة الترددية لجهد الدائرة الموضحة في الشكل رقم (١١,٣٢) حيث C_1=1F، و C_2=2F، و R_s=4Ω، و R_1=2Ω، و R_2=3Ω.



شكل رقم (١١,٣٢) دائرة RC

دالة العبور لهذه الدائرة ستكون كالتالي :

$$H(s) = \frac{1}{R_sC_2} \frac{s + 1/R_1C_1}{s^2 + \left(\frac{C_1+C_2}{R_sC_1C_2} + \frac{R_1C_1+R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2}\right)s + \frac{R_1+R_2+R_s}{R_1R_2R_sC_1C_2}}$$

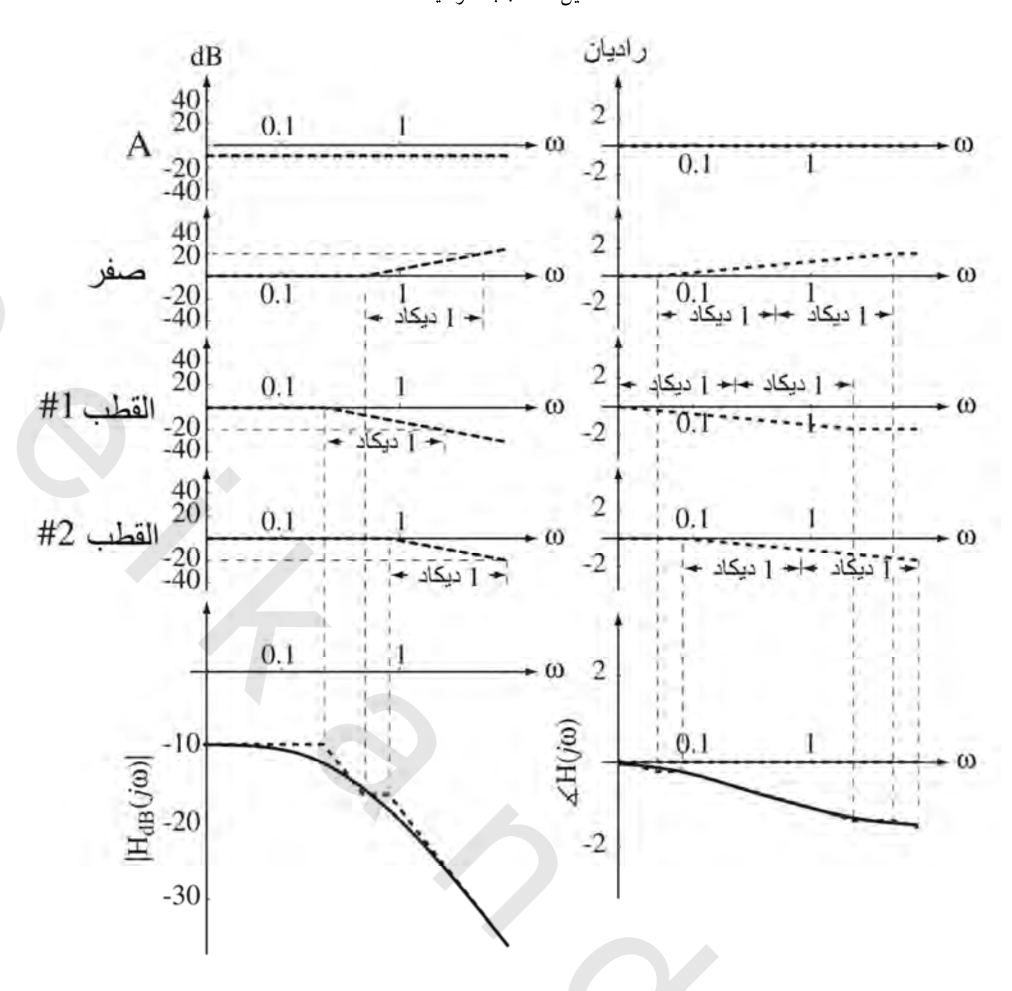
بالتعويض عن $s \to j\omega$ واستخدام قيما عددية للمكونات ، فإن الاستجابة الترددية ستكون كما يلي :

$$H(j\omega) = 3\frac{j2\omega + 1}{48(j\omega)^2 + j50\omega + 9} = 0.125\frac{j\omega + 0.5}{(j\omega + 0.2316)(j\omega + 0.8104)}$$

$$H(j\omega) = 0.333\frac{1 - \frac{j\omega}{(-0.5)}}{\left[1 - \frac{j\omega}{(-0.2316)}\right]\left[1 - \frac{j\omega}{(-0.8104)}\right]} = \mathrm{A}\frac{1 - j\omega/z_1}{(1 - j\omega/p_1)(1 - j\omega/p_1)}$$

حيث $A=0.333$ ، $z_1=-0.5$ ، $p_1=-0.2316$ ، $p_2=-0.8104$.

وعلى ذلك فالاستجابة الترددية لها قطبان محددان ، وصفر محدد واحد ، ومعامل تكبير غير معتمد على التردد. يمكننا سريعا تشكيل خطوط تقارب مخطط بود عن طريق إضافة مخططات بود التقاربية للمكونات المنفردة للاستجابة الترددية الكلية كما في الشكل رقم (١١,٣٣).



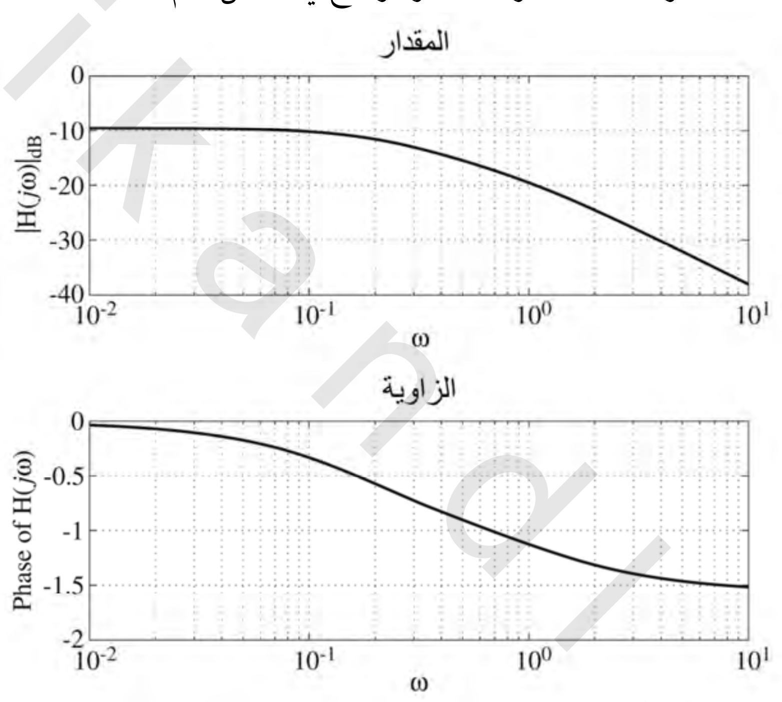
شكل رقم (١١,٣٣) الخطوط التقاربية المنفردة والخطوط التقاربية الكلية ومخطط بود النهائي ومخططات الزوايا للاستجابة الترددية لدائرة الجهد

برنامج ماتلاب التالي يوضح بعض الطرق لرسم مخططات بود:

```
% وضع متجه لوغاريتمي للترددات الزاوية
%0.01- 10 rad/sec لرسم مخطط بود للمدى الترددي
w = logspace(-2,1,200) ;
% وضع معامل التكبير وقيم الصفر والقطب
A = 0.3333 ; z1 = -0.5 ; p1 = -0.2316 ; p2 = -0.8104
% حساب الاستجابات الترددية المركبة
H = A*(1-j*w/z1)./((1-j*w/p1).*(1-j*w/p2)) ;
% رسم مقدار مخطط بود
subplot(2,1,1) ; p = semilogx(w,20*log10(abs(H)),'k') ;
set(p,'LineWidth',2) ; grid on ;
```

```
xlabel('\omega','FontSize',18,'FontName','Times') ;
ylabel('|H({\itj}\omega)|_d_B','FontSize',18,'FontName','Times') ;
title('Magnitude','FontSize',24,'FontName','Times') ;
set(gca,'FontSize',14,'FontName','Times') ;
% رسم زوايا مخطط بود
subplot(2,1,2) ; p = semilogx(w,angle(H),'k') ;
set(p,'LineWidth',2) ; grid on ;
xlabel('\omega','FontSize',18,'FontName','Times') ;
ylabel('Phase of H({\itj}\omega)','FontSize',18,'FontName','Times') ;
title('Phase','FontSize',24,'FontName','Times') ;
set(gca,'FontSize',14,'FontName','Times') ;
```

مقدار وزاوية مخطط بود الناتجة ستكون كما هو موضح في الشكل رقم (١١,٣٤).



شكل رقم (١١,٣٤) مقدار وزاوية مخطط بود للاستجابة الترددية للمرشح

أزواج من الأقطاب والأصفار المركبة

نفترض الآن الحالة الأكثر تعقيداً من الأقطاب والأصفار المركبة. بالنسبة للدوال الحقيقية، فإنها تحدث عادة في أزواج مركبة مترافقة. وعلى ذلك فإن أي زوج من الأقطاب المركبة المترافقة بدون أي أصفار من الممكن أن تشكل دالة العبور التالية :

$$H(s) = \frac{1}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2)} = \frac{1}{1 - (1/p_1 + 1/p_1{}^*)s + s^2/p_1 p_2{}^*}$$

والاستجابة الترددية ستكون كما يلي :

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 - j\omega/p_1)(1 - j\omega/p_2)} = \frac{1}{1 - j\omega(1/p_1 + 1/p_1{}^*) + (j\omega)^2/p_1p_2{}^*}$$

والتي يمكن كتابتها كما يلي :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - j\omega\frac{2Re(p_1)}{|p_1|^2} + \frac{(j\omega)^2}{|p_1|^2}}$$

من جدول تحويلات فورير نحصل على :

$$e^{-\omega_n\zeta t} sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)u(t) \overset{f}{\leftrightarrow} \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(j\omega)^2 + j\omega(2\zeta\omega_n) + \omega_n^2}$$

والذي يمكن التعبير عنه على الصورة التالية :

$$\omega_n\frac{e^{-\omega_n\zeta t} sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}}u(t) \overset{f}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 + j\omega\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_n^2} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}}$$

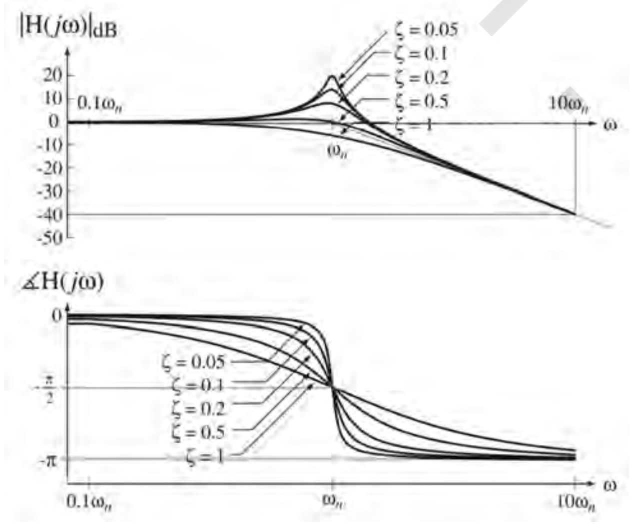
والتي يمكن كتابة الطرف الأيمن منها كنا يلي :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - j\omega\frac{2Re(p_1)}{|p_1|^2} + \frac{(j\omega)^2}{|p_1|^2}}$$

وهذه صورة قياسية لاستجابة نظام من الدرجة الثانية تحت الإخماد حيث التردد الزاوي الطبيعي هو ω_n ونسبة الإخماد هي ζ. ولذلك فإنه لمثل هذا النوع من الأنظمة الجانبية نحصل على :

$$\omega_n^2 = |p_1|^2 p_1p_2 \ \ and \ \zeta = \frac{Re_{(p_1)}}{\omega_n} = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt[2]{p_1p_2}}$$

مخطط بود لهذا النظام موضح في الشكل رقم (١١,٣٥).



شكل رقم (١١,٣٥) مقدار وزاوية مخطط بود لزوج من الأقطاب المركبة من الدرجة الثانية.

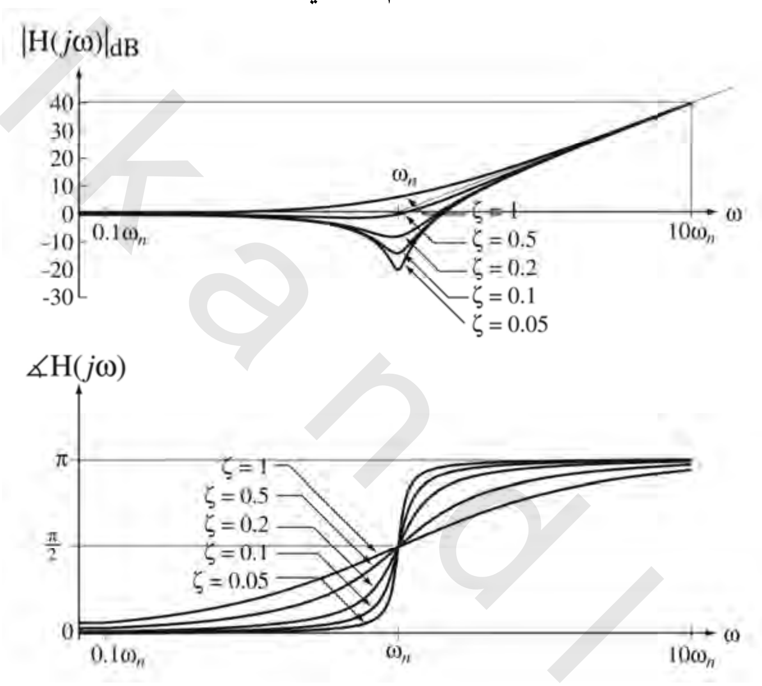
زوج من الأصفار المركبة يمكنها أن تشكل استجابة ترددية لنظام جانبي على الصورة التالية :

$$H(j\omega) = \left(1 - \frac{j\omega}{z_1}\right)\left(1 - \frac{j\omega}{z_2}\right) = 1 - j\omega\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{{z_1}^*}\right) + \frac{(j\omega)^2}{z_1 {z_1}^*} = 1 - j\omega\frac{2Re(z_1)}{|z_1|^2} + \frac{(j\omega)^2}{|z_1|^2}$$

يمكن أن نحدد التردد الزاوي الطبيعي ونسبة الإخماد لهذا النوع من الأنظمة كما يلي :

$$\zeta = \frac{Re_{(z_1)}}{\omega_n} = -\frac{z_1 + z_2}{\sqrt[2]{z_1 z_2}} \quad \text{و} \quad \omega_n^2 = |z_1|^2 = z_1 z_2$$

الشكل رقم (١١,٣٦) يبين مخطط بود لهذا النظام الجانبي



شكل رقم (١١,٣٦) مقدار وزاوية مخطط بود لزوج أصفار مركب من الدرجة الثانية

المرشحات العملية

المرشحات غير الفعالة

المرشح المنفذ للترددات المنخفضة

المرشحات المثالية التقريبية المنفذة للترددات المنخفضة والمنفذة لمجال من الترددات يمكن تنفيذها عن طريق أنواع معينة من الدوائر. أبسط التقريبات للمرشحات المثالية المنفذة للترددات المنخفضة هو المرشح الذي تم تحليله مسبقا أكثر من مرة، والذي يسمى المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة كما في الشكل رقم (١١.٣٧)، ولقد حسبنا استجابته لدالة الخطوة والدالة الجيبية. دعنا الآن نحلله مباشرة في المجال الترددي.

المعادلة التفاضلية التي تصف هذه الدائرة هي :

$$RCv'_{out}(t) + V_{out}(t) = V_{in}(t)$$

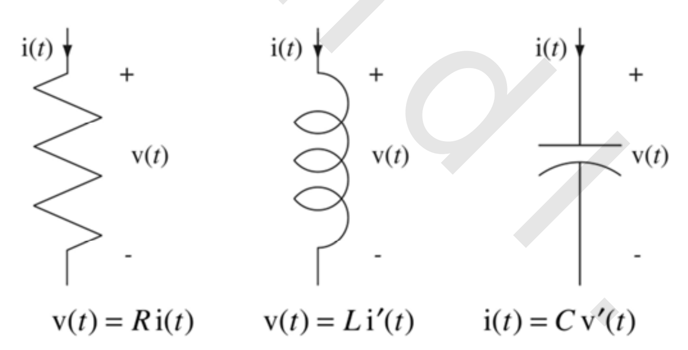
بإجراء تحويل لابلاس على الطرفين (بفرض عدم وجود أي شحنات ابتدائية على المكثفات)، نحصل على :

$$sRCV_{out}(s) + V_{out}(s) = V_{in}(s)$$

يمكننا الآن حل هذه المعادلة لإيجاد دالة العبور كما يلي :

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{sRC + 1}$$

شكل رقم (١١,٣٧) مرشح RC عملي منفذ للترددات المنخفضة



شكل رقم (١١,٣٨) تحديد معادلات لكل من المقاومات والمكثفات والملفات

الطريقة الشائعة الاستخدام في أساسيات تحليل الدوائر للحصول على الاستجابة الترددية تعتمد على مفاهيم المعاوقة والزاوية. المعاوقة هي تعميم لفكرة المقاومة للتطبيق على المكثفات والملفات. تذكر علاقات الجهد والتيار للمقاومات والمكثفات والملفات كما في الشكل رقم (١١,٣٨).

إذا طبقنا تحويل لابلاس على هذه العلاقات نحصل على ما يلي :

$$V(s) = RI(s),\ V(s) = \mathrm{sLI}(s)\ \text{ and }\ \mathrm{I}(s) = \mathrm{sCV}(s)$$

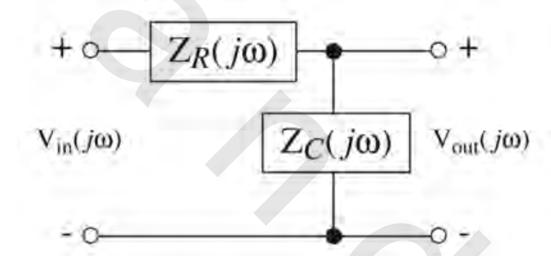
يأتي مفهوم المعاوقة من التشابه في معادلات المكثفات والملفات مع قانون أوم للمقاومات. يمكننا أن نضع نسب الجهد للتيار كما يلي :

$$\frac{V(s)}{I(s)} = R, \text{ و } \frac{V(s)}{I(s)} = sL \text{ و } \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$$

بالنسبة للمقاومات تسمى هذه النسبة معاوقة. في الحالة العامة تسمى هذه النسبة بالمعاوقة. في العادة يتم الرمز للمعاوقة بالرمز Z. باستخدام هذا الرمز يمكننا كتابة ما يلي :

$$Z_R(s) = R, \text{ و } Z_L(s) = sL \quad \text{و} \quad Z_C(s) = 1/sC$$

إن ذلك يسمح لنا بتطبيق العديد من طرق تحليل دوائر المقاومات على الدوائر التي تحتوي الملفات والمكثفات ويتم تحليلها في النطاق الترددي. في حالة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة يمكن النظر إليه على أنه مقسم جهد كما في الشكل رقم (١١,٣٩).



شكل رقم (١١,٣٩) التعبير عن المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة كمقسم جهد على المعاوقة

بالتالي يمكننا مباشرة كتابة دالة العبور في النطاق الترددي كما يلي :

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Z_C(s)}{Z_C(s)+Z_f(s)} = \frac{1/sC}{1/sC+R} = \frac{1}{sRC+1}$$

وستكون الاستجابة الترددية كما يلي :

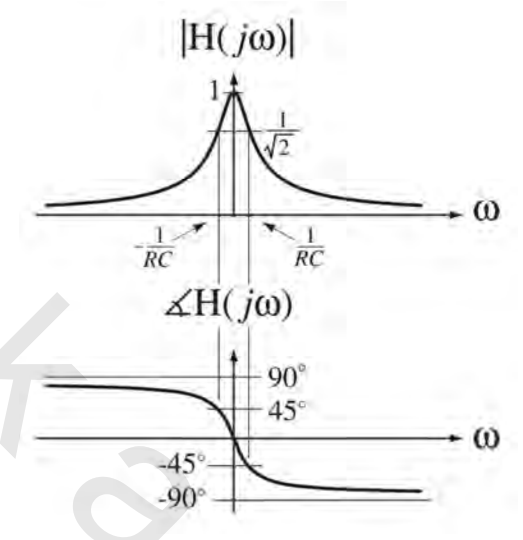
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC+1} \text{ أو } H(f) = \frac{1}{j2\pi fRC+1}$$

وهو ما وصلنا إليه من النتيجة نفسها كما سبق بدون الرجوع المباشر إلى النطاق الزمني. مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة موضحة في الشكل رقم (١١- ٤٠).

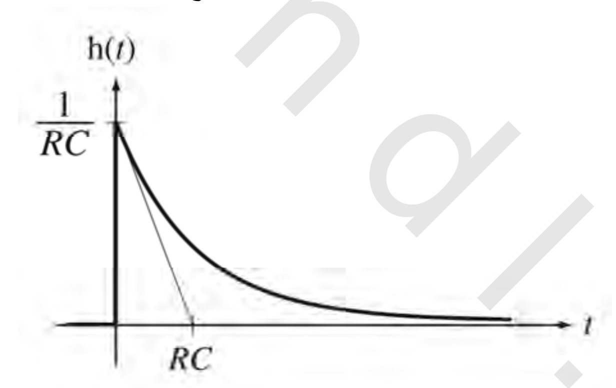
استجابة الصدمة للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة تساوي تحويل CTFT العكسي للاستجابة الترددية لهذا المرشح كما يلي وكما هو موضح في الشكل رقم (١١,٤١) :

$$h(t) = \frac{e^{-t/RC}}{RC} u(t)$$

استجابة الصدمة لهذا المرشح القابل للبناء طبيعياً تساوي صفراً قبل الزمن t=0، وبالتالي فالمرشح سببي.



شكل رقم (١١,٤٠) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة



شكل رقم (١١,٤١) استجابة الصدمة للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة

عند الترددات المنخفضة جداً (التي تقترب من الصفر) يكون مقدار معاوقة المكثف عالياً جدا عن معاوقة المقاومة، وبالتالي تقترب نسبة تقسيم الجهد إلى الواحد وسيكون جهد إشارة الخرج هو نفسه تقريبا جهد إشارة الدخل. عند الترددات العالية جداً تصبح معاوقة المكثف أقل جداً في المقدار عن معاوقة المقاومة وستقترب نسبة تقسيم الجهد إلى الصفر. وعلى ذلك يمكننا القول تقريباً إن الترددات المنخفضة تمر خلال المرشح والترددات العالية ستكبح. هذا التحليل الكمي للدائرة يتوافق مع الصورة الحسابية للاستجابة الترددية:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\mathrm{RC}+1}$$

عند الترددات المنخفضة يمكننا كتابة ما يلي :

$$\lim_{\omega=0} \mathrm{H}(j\omega) = 1$$

وعند الترددات العالية يمكننا كتابة ما يلي :

$$\lim_{\omega=0} \mathrm{H}(j\omega) = 0$$

المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة يمرر فقط الترددات المنخفضة ؛ لأن الإثارة يتم تحديدها كجهد عند الدخل والاستجابة يتم تحديدها كجهد عند الخرج.

إذا تم تحديد الاستجابة على أنها التيار، فإن طبيعة عملية الترشيح من الممكن أن تتغير بالكامل. في هذه الحالة ستصبح الاستجابة الترددية كما يلي :

$$\mathrm{H}(j\omega) = \frac{\mathrm{I}(j\omega)}{\mathrm{V_{in}}(j\omega)} = \frac{1}{\mathrm{Z_R}(j\omega)+\mathrm{Z_C}(j\omega)} = \frac{1}{1/j\omega\mathrm{C}+\mathrm{R}} = \frac{j\omega\mathrm{C}}{j\omega\mathrm{RC}+1}$$

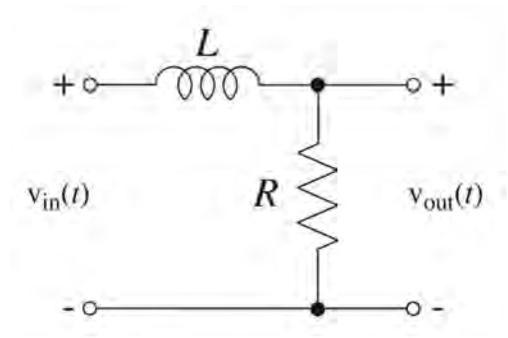
مع هذا التعريف، فإنه عند الترددات المنخفضة تكون معاوقة المكثف مرتفعة جداً بحيث تمنع التيار من المرور وبالتالي فإن الاستجابة تقترب من الصفر. عند الترددات المرتفعة تقترب معاوقة المكثف من الصفر وبالتالي فإنه يسلك مسلك الموصل التام ويتحدد التيار المار بالمقاومة R. حسابياً فإن الاستجابة تقترب من الصفر عند الترددات المنخفضة وتقترب من قيمة ثابتة مقدارها 1/R عند الترددات العالية. إن ذلك يحدد مرشح منفذ للترددات المرتفعة كما يلي :

$$\lim_{\omega=0} \mathrm{H}(j\omega) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\omega=\infty} \mathrm{H}(j\omega) = 1/\mathrm{R}$$

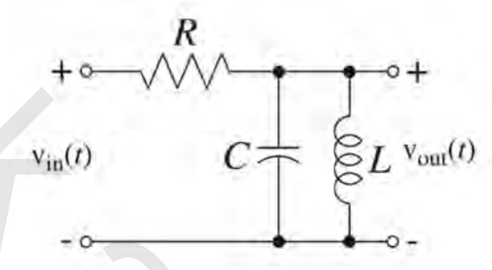
صورة أخرى (غير شائعة) للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة موضحة في الشكل رقم (١١،٤٢).

$$\mathrm{H(S)} = \frac{\mathrm{V_{out}(s)}}{\mathrm{V_{in}(s)}} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{sL+R}} \Rightarrow \mathrm{H}(j\omega) = \frac{\mathrm{R}}{j\omega\mathrm{L+R}}$$

باستخدام أفكار تقسيم الجهد والمعاوقة، هل يمكنك الشرح بالكلمات لماذا تسلك هذه الدائرة مسلك المرشح المنفذ للترددات المنخفضة ؟



شكل رقم (١١,٤٢) صورة بديلة لمرشح عملي منفذ للترددات المنخفضة



شكل رقم (١١,٤٣) مرشح RLC عملي منفذ لمجال من الترددات

المرشح المنفذ لمجال من الترددات

واحد من أبسط الأشكال العملية للمرشح المنفذ لمجال من الترددات موضحة في الشكل رقم (١١,٤٣). دالة العبور والاستجابة الترددية لهذا المرشح ستكون كما يلي :

$$H(S)=\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}=\frac{s/RC}{s^2+s/RC+1/LC}\Rightarrow H(j\omega)=\frac{j\omega/RC}{(j\omega)^2+j\omega/RC+1/LC}$$

عند الترددات المنخفضة جداً يكون المكثف مفتوحاً ويكون الملف هو موصل تام. وبالتالي عند الترددات المنخفضة جداً تكون إشارة جهد الخرج عملياً تساوي صفراً. عند الترددات العالية جداً، يكون الملف مفتوحاً ويكون المكثف موصلاً تاماً، مما يجعل جهد الخرج يساوي صفر أيضاً. معاوقة المكثف المتوازي مع الملف يمكن كتابتها كما يلي :

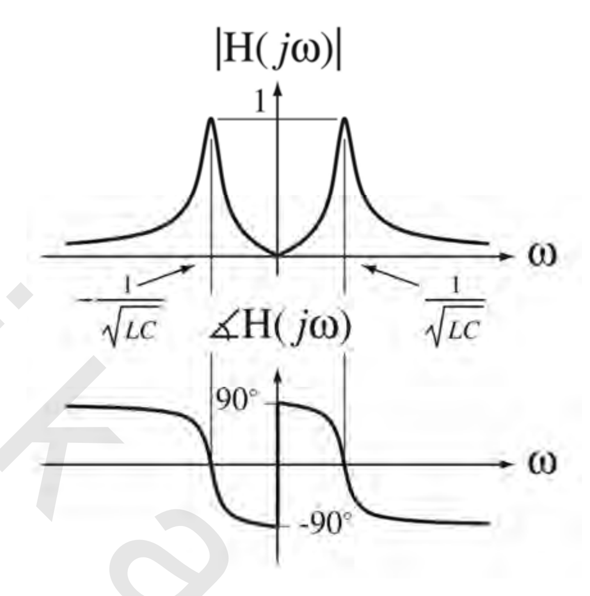
$$Z_{LC}(s)=\frac{sL/sC}{sL+1/sC}=\frac{sL}{s^2LC+1}$$

عندما يكون المقام :

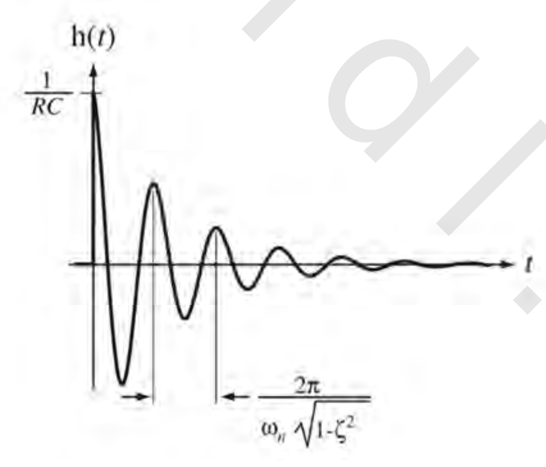
$$s^2LC+1=0\Rightarrow s=\pm j\sqrt{1/LC}\Rightarrow \omega=\pm 1/\sqrt{LC}$$

فإن المعاوقة ستكون ما لا نهاية. هذا التردد يسمى تردد الرنين. وبالتالي فعند التردد الرنيني لدائرة المكثف المتوازي مع الملف، فإن معاوقة هذه التركيبة المتوازية تؤول إلى الما لانهاية وتكون إشارة جهد الخرج تساوي إشارة جهد الدخل. وبالتالي فإن السلوك العام للدائرة يعتبر سماح بمرور الترددات القريبة من هذا التردد الرنيني وحجب

الترددات الأخرى، وبالتالي فإنها تمثل مرشح منفذ لمجال من الترددات. الشكل رقم (١١,٤٤) يبين مقدار وزاوية الاستجابة الترددية التي تبين طبيعة المرشح المنفذ لمجال من الترددات عند الاختيار العملي لقيم المكونات.



شكل رقم (١١,٤٤) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لمرشح RLC عملي منفذ لمجال من الترددات



شكل رقم (١١,٤٥) استجابة الصدمة للمرشح RLC العملي المنفذ لمجال من الترددات

استجابة الصدمة للمرشح RLC المنفذ لمجال من الترددات يمكن كتابتها كما يلي وهي موضحة في الشكل رقم (١١,٤٥):

$$h(t) = 2\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos(\omega_c t) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_c t)\right]u(t)$$

حيث:

$$2\zeta\omega_n = 1/RC, \omega_n^2 = 1/LC \text{ and } \omega_c = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

لاحظ أن الاستجابة الصدمية لهذا المرشح القابل للبناء تكون سببية.

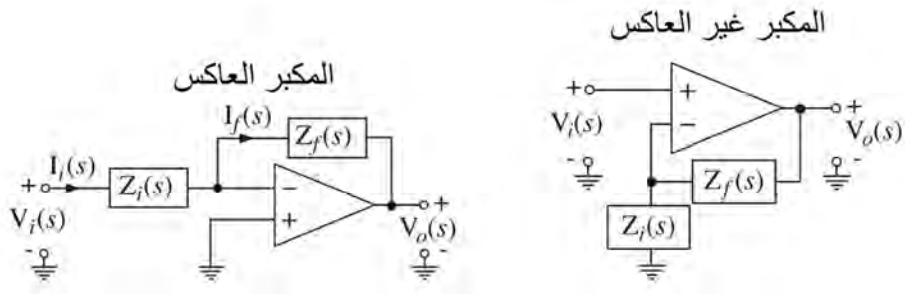
كل الأنظمة الطبيعية تعتبر مرشحات من حيث إن كل منها يكون له استجابة من خواصها التغير مع التردد. وهذا هو ما يعطي لكل جهاز من الأجهزة الموسيقية والصوت البشري المواصفات الخاصة به. لكي نرى أهمية ذلك، حاول اللعب على قطعة الفم لأي جهاز موسيقي هوائي. سيكون الصوت الناتج غير مريح حتى يتم إلحاق باقي الجهاز حيث عندها يصبح الصوت جيداً جداً (وبالذات عند اللعب عليه من خلال متخصص). إن الشمس تعمل على تسخين الأرض دورياً مع دوران الأرض وتعمل الأرض كمرشح منفذ للترددات المنخفضة، تعمل على تنعيم التغيرات اليومية وتستجيب بتغيرات موسمية متأخرة لدرجات الحرارة. في عصور ما قبل التاريخ كان البشر يعيشون في الكهوف؛ لأن الكتلة الحرارية للصخور حولهم تعمل على تنعيم التغيرات الفصلية لدرجة الحرارة بحيث تجعل الكهف أكثر برودة في الصيف وأكثر دفئاً في الشتاء، وهذا يعتبر مثالاً على عملية الترشيح المنفذ للترددات المنخفضة. سماعات الأذن المصنعة من المطاط الرغوي يتم تصميمها بحيث تسمح بمرور الترددات المنخفضة بحيث يستطيع مرتدوها التخاطب ولكنها تحجب الأصوات المكثفة ذات الترددات العالية التي قد تتلف الأذن. إن قائمة أمثلة الأنظمة التي نتعود عليها في حياتنا العملية واستخداماتنا اليومية التي تقوم بعملية الترشيح ليس لها نهاية.

المرشحات الفعالة

كل المرشحات التي تم فحصها حتى الآن كانت مرشحات غير فعالة. إن لفظة غير فعال تعني أن الدائرة لا تحتوي أجهزة قادرة على إنتاج إشارة خرج بطاقة أكبر (ليست طاقة الإشارة) من طاقة إشارة الدخل. العديد من المرشحات الحديثة تكون مرشحات فعالة. إنها تحتوي أجهزة فعالة مثل الترانزستورات و/أو مكبرات العمليات والتي تتطلب مصدر طاقة خارجي لكي تعمل بالطريقة السليمة. مع استخدام الإجهزة الفعالة فإن طاقة إشارة الخرج من الممكن أن تكون أكبر من طاقة إشارة الدخل. إن موضوع المرشحات الفعالة موضوعا كبيرا ونحن هنا سنقدم صور المرشحات الأكثر بساطة.

مكبرات العمليات

هناك صورتان شائعتان من دوائر مكبر العمليات، إنهما صورة مكبر العمليات العاكس وصورة مكبر العمليات غير العاكس كما في الشكل رقم (١١.٤٦). في التحليل هنا سنستخدم أبسط نموذج ممكن لمكبر العمليات وهو نموذج مكبر العمليات المثالي. مكبر العمليات المثالي له معاوقة دخل لا نهائية، ومعاوقة خرج تساوي صفراً، ومعامل تكبير لا نهائي وعرض مجال لانهائي.



شكل رقم (١١,٤٦) الصور الشائعة للمكبرات التي تستخدم مكبر العمليات

لكل نوع من المرشحات هناك معاوقتان وهما ال $Z_i(s)$ والـ $Z_f(s)$ يتحكمان في دالة العبور. دالة العبور للمكبر العاكس يمكن استنتاجها عن طريق ملاحظة أنه حيث إن مقاومة الدخل لمكبر العمليات تكون لا نهائية، فإن التيار الداخل للمكبر من أي واحد من دخليه سيكون صفراً وبالتالي يمكننا كتابة المعادلة التالية:

$$I_f(s)=I_i(s) \quad \text{(١١,٥) المعادلة رقم}$$

أيضاً حيث إن جهد الخرج يكون محدداً ومعامل التكبير لمكبر العمليات يكون لا نهائياً، فإن فرق الجهد بين دخلي المكبر يجب أن يساوي صفراً. ولذلك يمكننا كتابة تيار الدخل كما يلي:

$$I_i(s)=\frac{V_i(s)}{z_i(s)} \quad \text{(١١,٦) المعادلة رقم}$$

وأيضاً:

$$I_f(s)=\frac{V_f(s)}{z_i(s)} \quad \text{(١١.٧) المعادلة رقم}$$

بمساواة المعادلتين (١١,٦) و (١١,٧) تبعا للمعادلة (١١,٥) والحل للحصول على دالة العبور، نحصل على ما يلي:

$$H(s)=\frac{V_O(s)}{V_i(s)}=\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)} \quad \text{(١١,٨) المعادلة رقم}$$

بالطريقة نفسها يمكننا توضيح أن دالة العبور للمكبر غير العاكس ستكون كما يلي:

$$H(s)=\frac{V_O(s)}{V_i(s)}=\frac{Z_f(s)+Z_i(s)}{Z_i(s)}=1+\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)} \quad \text{(١١,٩) المعادلة رقم}$$

المكامل

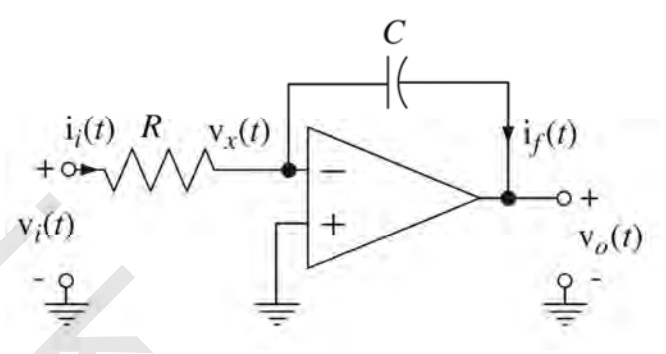
ربما يكون من أبسط المرشحات الفعالة وأكثرها شيوعاً هو المكامل كما في الشكل رقم (١١,٤٧). باستخدام معادلة المكبر العاكس (١١,٨) يمكننا الحصول على دالة العبور التالية:

$$H(s)=-\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}=-\frac{1/sC}{R}=-\frac{1}{sRC}\Rightarrow H(f)=-\frac{1}{j2\pi fRC}$$

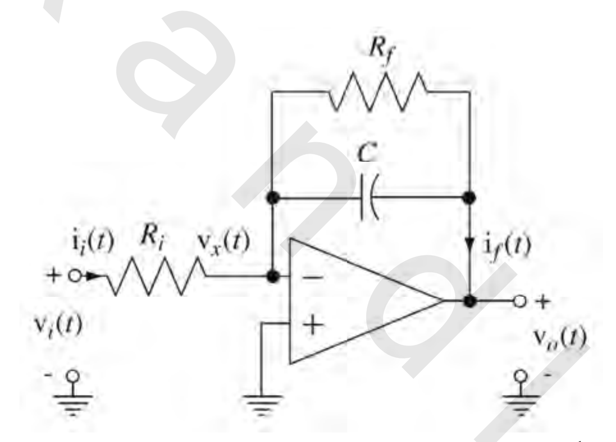
من السهل رؤية تأثير المكامل إذا تمت كتابة الاستجابة الترددية على الصورة التالية:

$$V_o(f)=-\frac{1}{RC}\frac{V_i(f)}{j2\pi f} \quad \text{or} \quad V_o(j\omega)=-\frac{1}{RC}\frac{V_i(j\omega)}{j\omega}$$

إن المكامل يعمل على تكامل الإشارة ولكنه في الوقت نفسه يضربها في 1/RC-. لاحظ أننا لم نقدم هنا مكاملاً عملياً غير فعال. إن المرشح RC الفعال المنفذ للترددات المنخفضة يعمل بدرجة كبيرة عمل المكامل عند الترددات الأعلى كثيراً من تردده الركني ولكن عند الترددات المنخفضة جداً فإن استجابته لا تكون استجابة المكامل. لذلك فقد أعطت الأجهزة الفعالة (مكبر العمليات في هذه الحالة) درجة أخرى من الحرية لمصمم المرشح.



شكل رقم (١١،٤٧) مكامل فعال.



شكل رقم (١١،٤٨) مرشح RC فعال منفذ للترددات المنخفضة.

المرشح المنفذ للترددات المنخفضة

بسهولة يتم تغيير المكامل إلى مرشح منفذ للترددات المنخفضة عن طريق إضافة مقاومة واحدة كما في الشكل رقم (١١،٤٨). بالنسبة لهذه الدائرة يمكن كتابة مايلي :

$$H(S) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_f}{R_s}\frac{1}{sCR_f+1} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = -\frac{R_f}{R_s}\frac{1}{j\omega CR_f+1}$$

هذه الاستجابة الترددية لها الصورة الوظيفية نفسها مثل المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة فيما عدا المعامل $-R_f/R_s$. وبالتالي فإن ذلك يمثل مرشحاً مع التكبير. إنه يرشح ويكبر الإشارة في الوقت نفسه. في هذه الحالة كان معامل التكبير سالباً.

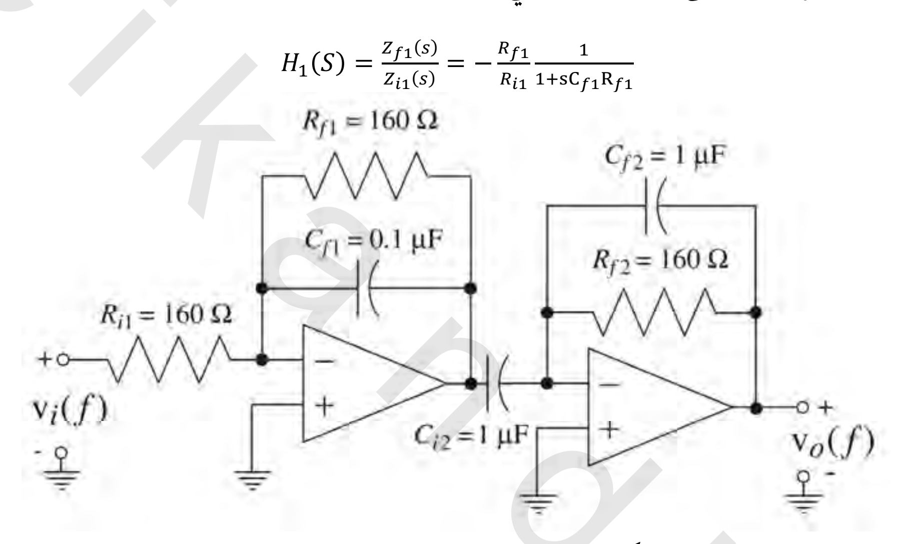
مثال ١١,٣

مخطط بود للاستجابة الترددية لمرشح فعال من مرحلتين

ارسم مقدار وزاوية مخططات بود للمرشح العال ذي المرحلتين الموضح في الشكل رقم (١١,٤٩).

دالة العبور للمرحلة الأولى ستكون كما يلي:

$$H_1(S) = \frac{Z_{f1}(s)}{Z_{i1}(s)} = -\frac{R_{f1}}{R_{i1}}\frac{1}{1+sC_{f1}R_{f1}}$$



شكل رقم (١١,٤٩) مرشح فعال من مرحلتين

دالة العبور للمرحلة الثانية ستكون كما يلي:

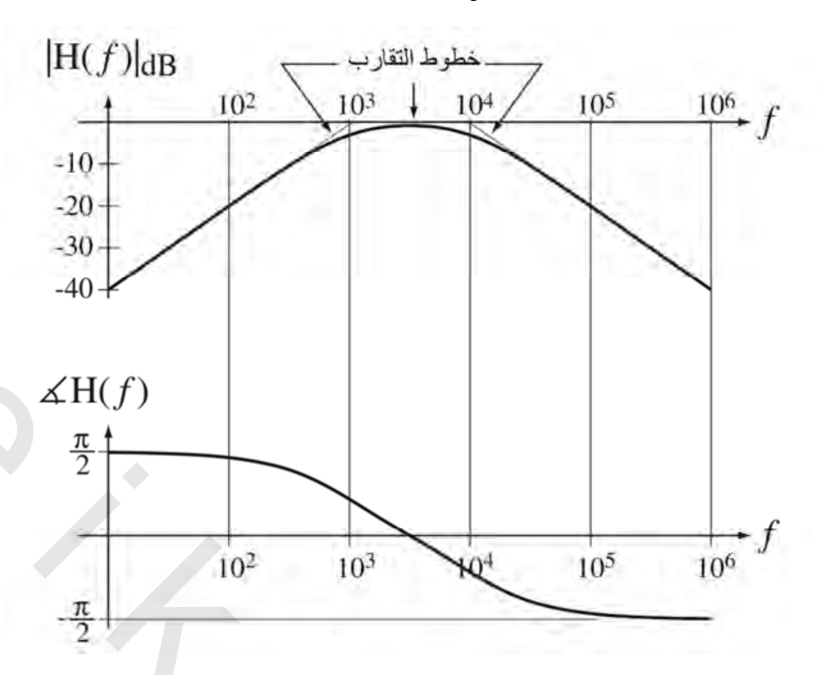
$$H_2(S) = \frac{Z_{f1}(s)}{Z_{i1}(s)} = -\frac{sR_{f1}C_{i2}}{1+sR_{f2}C_{f2}}$$

حيث إن مقاومة الخرج لمكبر العمليات المثالي تكون صفراً، فإن المرحلة الثانية لن تمثل حملاً على المرحلة الأولى ودالة العبور الكلية ستكون ببساطة حاصل ضرب دالتي العبور كما يلي:

$$H(S) = \frac{R_{f1}}{R_{i1}}\frac{sR_{f2}C_{i2}}{(1+sC_{f1}R_{f1})(1+sC_{f2}R_{f2})}$$

بالتعويض بقيم المعاملات ووضع $s \rightarrow j2\pi f$، نحصل على الاستجابة الترددية كما يلي وكما في الشكل رقم (١١,٥٠) وهذا بالطبع يمثل مرشحاً منفذاً لمجال من الترددات:

$$H(f) = \frac{j1000f}{(1000+jf/10)(1000+jf)}$$



شكل رقم (١١,٥٠) مخطط بود للاستجابة الترددية للمرشح ذي المرحلتين

مثال ١١,٤

تصميم مرشح فعال منفذ للترددات العالية

صمم مرشح فعال يحبط الإشارات عند الـ 60Hz وأقل منها بأكثر من 40dB ويكبر الإشارات عند 10kHz وأعلى منها بمعامل تكبير يتغير من الـ 20dB ليس بأكثر من 2dB.

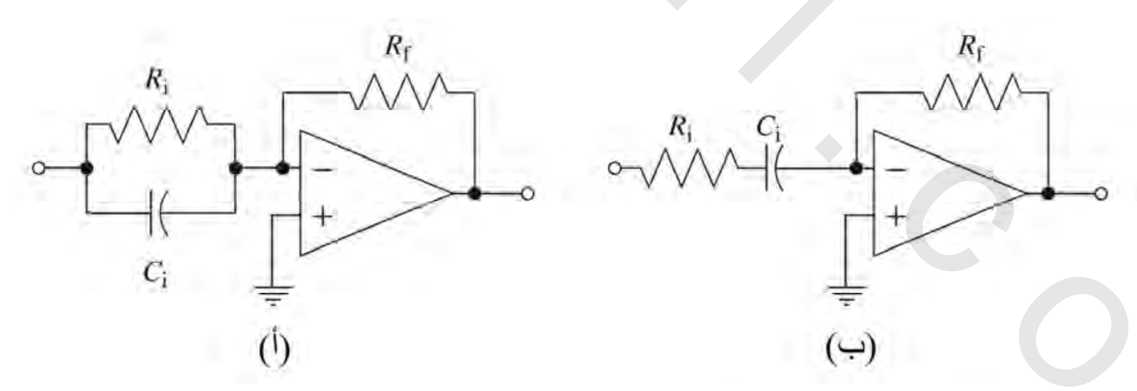
إن ذلك يحدد مرشح منفذ للترددات العالية. معامل التكبير يجب أن يكون موجباً. يمكن الحصول على معامل تكبير موجب وترشيح منفذ للترددات المرتفعة باستخدام مكبر غير عاكس. بالنظر على دالة العبور والاستجابة الترددية للمكبر غير العاكس التالية :

$$H(s) = \frac{V_O(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_f(s)+Z_i(s)}{Z_i(s)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Z_f(j\omega)+Z_i(j\omega)}{Z_i(j\omega)}$$

سنرى أنه إذا كانت المعاوقتان تتكونان من مقاومات ومكثفات فقط ، فإن معامل التكبير لا يمكن أن يكون أقل من الواحد ونحن نريد الإحباط أو التوهين أو التضعيف (معامل تكبير أقل من واحد) عند الترددات المنخفضة. (إذا كنا نريد استخدام كل من الملفات والمكثفات ، فإنه يمكننا جعل مقدار المجموع $Z_f(j\omega)+Z_i(j\omega)$أقل من مقدار الـ $Z_i(j\omega)$ عند بعض الترددات وبذلك نحقق معامل تكبير أقل من الواحد. ولكننا لا نستطيع تحقيق ذلك عند كل الترددات الأقل من 60Hz ، كما أن استخدام الملف يتم تجنبه عادة عملياً إلا إذا كان ذلك مطلق الضرورة. هناك صعوبات عملية أخرى مع هذه الفكرة وهي استخدام مكبرات العمليات الحقيقية بدلاً من المكبرات المثالية).

إذا استخدمنا مكبراً عاكساً واحداً سنحصل على معامل تكبير سالب. ولكننا نستطيع أن نتبعه بمكبر عاكس آخر مما يجعل التكبير الكلي موجباً. (التكبير عكس الإحباط، بحيث إذا كان الإحباط يساوي 60dB، فإن التكبير يكون 60dB-). إذا كان التكبير عند الـ 60Hz يساوي 40dB-، وكانت الاستجابة تمثل مرشحاً ذا قطب واحد منفذ للترددات المرتفعة، فإن خطوط تقارب مخطط بود على مقدار الاستجابة الترددية ستمر خلال الـ 20dB- عند الـ 600Hz، وتكبير مقداره 0dB عند التردد 6kHz وتكبير مقداره 20dB عند التردد 60kHz. ولكننا نريد تكبير 20dB عند التردد 10kHz ولذلك فإن المرشح ذو القطب الواحد يكون غير مناسب لتحقيق هذه المتطلبات. لذلك نحن نريد مرشحاً منفذاً للترددات المرتفعة ذا قطبين. يمكننا أن نحقق ذلك عن طريق تتابع من مرشحين كل منهما ذو قطب واحد، وبذلك يمكننا أن نحقق متطلبات الإحباط والتكبير الموجب في الوقت نفسه.

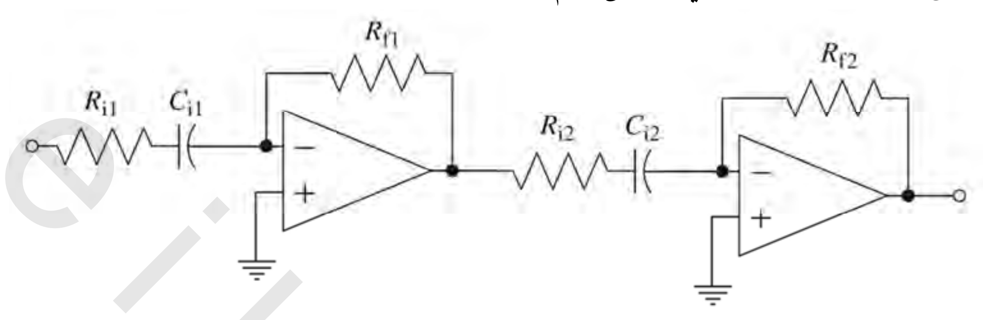
الآن يجب أن نختار كل من $Z_f(j\omega)$ و $Z_i(j\omega)$ لنجعل المكبر العاكس مرشح منفذ للترددات المرتفعة. الشكل رقم (١١.٤٨) يوضح مرشحاً فعالاً منفذاً للترددات المنخفضة. هذا المرشح منفذ للترددات المنخفضة ؛ لأن التكبير يساوي $-Z_f(j\omega)/Z_i(j\omega)$، و $Z_i(j\omega)$ ثابت، و $Z_f(j\omega)$ لها مقدار أكبر عند الترددات المنخفضة من مقدارها عند الترددات المرتفعة. هناك أكثر من طريقة للحصول على المرشح المنفذ للترددات المرتفعة بتشكيل المكبر العاكس نفسه. يمكننا أن نجعل مقدار $Z_f(j\omega)$ أقل عند الترددات المنخفضة وأكبر عند الترددات الأعلى. إن ذلك يتطلب استخدام ملف، ولكن للمرة الثانية ولأسباب عملية، فإنه يجب علينا أن نتجنب استخدام الملفات، إلا إذا كان هناك ضرورة لذلك. يمكننا أن نجعل مقدار $Z_f(j\omega)$ ثابتاً ونجعل $Z_i(j\omega)$ أكبر عند الترددات المنخفضة وأقل عند الترددات المرتفعة. بهذه الطريقة يمكن تحقيق الهدف العام عن طريق مقاومة ومكثف إما على التوالي أو التوازي كما في الشكل رقم (١١,٥١).



شكل رقم (١١,٥١) فكرة استخدام المكثفات والمقاومات فقط للحصول على المرشح المنفذ للترددات العالية

إذا فكرنا في السلوك المحدود لأفكار هذين التصميمين عند الترددات المنخفضة جداً والترددات المرتفعة جدا، سنرى فوراً أن واحداً منهما فقط سيحقق متطلبات هذا التصميم. التصميم (أ) له تكبير محدد عند الترددات

المنخفضة جداً وتكبير يزداد مع التردد عند الترددات العليا، ولن يصل أبداً إلى قيمة ثابتة. التصميم (ب) له تكبير يتناقص مع التردد عند الترددات المنخفضة، ويقترب من الصفر عند التردد صفر ويقترب من تكبير ثابت عند الترددات العالية. التصميم (ب) يمكن استخدامه لتحقيق المتطلبات المرغوبة. وبالتالي فإن التصميم الآن سيكون تتابعاً من مكبرين عاكسين متتالين كما في الشكل رقم (١١.٥٢).



شكل رقم (١١,٥٢) تتابع من مرشحين عاكسين كل منهما مرشح فعال منفذ للترددات المرتفعة

عند هذه النقطة علينا اختيار قيم المقاومات والمكثفات لتحقيق متطلبات التكبير والإحباط المطلوب، وهناك العديد من الطرق لعمل ذلك. مثل هذا التصميم لن يكون فريداً. يمكننا أن نبدأ باختيار المقاومات لتحقيق متطلبات التكبير عند الترددات العالية وهو 20dB. وهذا يعني تكبير كلي عند الترددات العالية يساوي 10، والذي يمكن تقسيمه بأي طريقة نريدها بين المكبرين. دعنا نفترض أن تكبير المرحلتين يكون متساوي تقريباً. وبالتالي فإن نسب المقاومات في كل مرحلة يجب أن تكون تقريباً 3.16. يجب أن نختار المقاومات كبيرة بدرجة كافية بحيث لا تسبب تحميلاً لخرج مكبرات العمليات وأن تكون صغيرة بما فيه الكفاية بحيث لا تسبب المكثفات الطفيلية أي مشاكل. اختيارات المقاومات في المدى من 500Ω حتى 50kΩ يعتبر اختياراً جيداً. ولكن إذا لم نكن على استعداد لدفع الكثير، فإننا لن نستطيع اختيار قيم المقاومات بحرية كاملة حيث إن المقاومات تأتي بقيم قياسية في التتابع التالي تماماً:

$$1,1.2,1.5,1.8,2.2,2.7,3.3,3.9,4.7,5.6,6.8,8.2 \times 10^{n}$$

حيث n تضع ديكاد قيمة المقاومة. بعض النسب القريبة من 3.16هي:

$$\frac{3.9}{1.2} = 3.25, \frac{4.7}{1.5} = 3.13, \frac{5.6}{1.8} = 3.11, \frac{6.8}{2.2} = 3.09, \frac{8.2}{2.7} = 3.03$$

لوضع التكبير الكلي أقرب ما يمكن من 10 سنختار نسبة المرحلة الأولى لتكون 3.9/1.2=3.25 ونسبة المرحلة الثانية لتكون 6.8/2.2=3.09 وذلك سيحقق تكبيراً كلياً يساوي 10.043. وعلى ذلك فإننا سنضع القيم التالية:

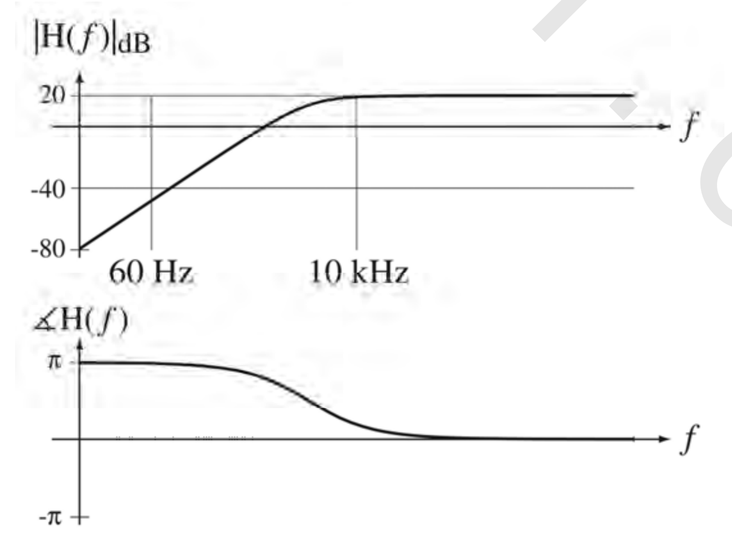
$$R_{f1} = 3.9k\Omega, R_{i1} = 1.2k\Omega, R_{f2} = 6.8k\Omega, R_{i2} = 2.2k\Omega$$

الآن علينا اختيار قيم المكثفات لتحقق الإحباط عند التردد 60Hz وتحته ، وتكبير عند التردد 10kHz وفوقها. لتبسيط التصميم دعنا نضع الترددين الركنيين للمرحلتين ب القيم نفسها. مع تساقط الترددات المنخفضة نتيجة قطبين بمعدل 40dB لكل ديكاد وتكبير الترددات المرتفعة الذي يساوي حوالي 20dB سنحصل على 60dB فرق بين مقدار الاستجابة الترددية عند الـ 60Hz والـ 10kHz. إذا كنا نريد جعل التكبير عند الـ 60Hzيساوي تماماً 40dB- ، بالتالي فإنه سيكون التكبير 0dB عند التردد 600Hz ، وعند الـ 6kHz يجب أن يكون التكبير يساوي 40dB ، ومن الممكن أن تكون أعلى من ذلك عند الـ 10kHz. إن ذلك لن يحقق المتطلبات.

يمكننا أن نبدأ بالترددات العالية ونضع التكبير عند ال 10kHz يساوي تقريبا 10 ، مما يعني أن الركن عند التردد المنخفض سيتناقص حتى تحت الـ 10kHz. إذا وضعنا ذلك عند الـ 1kHz ، فإن التكبير الكلي عند الـ 100Hz معتمدا على تقريبات الخطوط التقاربية سيكون 20dB- وعند الـ 10Hz سيكون 060dB. نحن نحتاج 40dB- عند الـ 60Hz. ولكننا سنحصل على حوالي 29dB- فقط عند الـ 60Hz. لذلك سنحتاج لوضع التردد الركني أعلى قليلا ، مثلا 3kHz. إذا وضعنا التردد الركني عند ال 3kHz ، فإن قيم المكثفات المحسوبة ستكون C_{i1}=46nF و C_{i2}=24nF. للمرة الثانية فإنه لا يمكننا اختيار قيم اختيارية للمكثفات حيث إنها توجد في قيم قياسية مسلسة بالفروق نفس مثل قيم المقاومات القياسية كالتالي :

$$1,1.2,1.5,1.8,2.2,2.7,3.3,3.9,4.7,5.6,6.8,8.2 \times 10^n$$

هناك بعض الفسحة في موضع التردد الركني ولذلك فإننا لا نحتاج إلى تحديد دقيق جدا لقيمة المكثف. يمكننا أن نختار C_{i1}=0.47nF و C_{i2}=22nFبحيث يكون أحدها أعلى قليلاً والأخرى أقل قليلا. إن ذلك سيفصل الأقطاب قليلا ولكنه لا يزال يحقق الـ 40dB لكل ديكاد المطلوبة عند الترددات المنخفضة. إن ذلك يبدو تصميماً جيداً ولكننا نريد أن نتحقق من أدائه عن طريق رسم مخطط بود كما في الشكل رقم (١١.٥٣).



شكل رقم (١١,٥٣) مخطط بود لتصميم مرشح فعال من مرحلتين

من الواضح من هذا المخطط أن الإحباط عند الـ 60Hz مناسب جداً. حسابات التكبير عند التردد 10kHz تعطي حوالي 19.2dB مما يتطابق مع المواصفات المطلوبة.

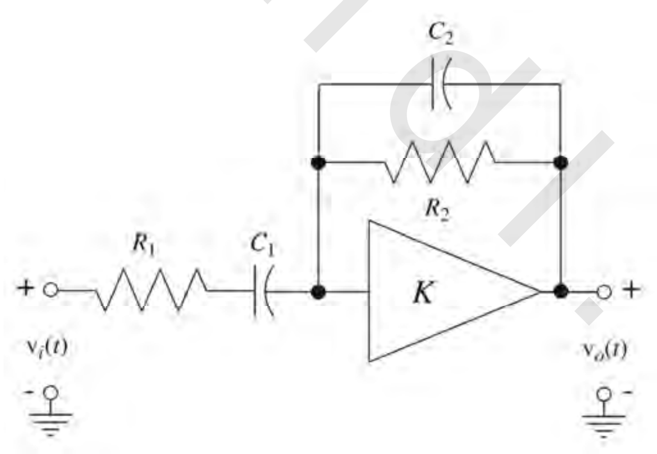
هذه النتائج تعتمد على القيم الدقيقة للمقاومات والمكثفات. في الحقيقة كل المقاومات والمكثفات تم اختيارها بالضبط اعتمادا على القيم الإسمية ولكن قيمها الحقيقية من الممكن أن تختلف عن قيمها الاسمية بنسب قليلة. لذلك فإن أي تصميم جيد يجب أن يكون له به بعض السماحية بحيث يسمح ببعض الحيود في قيم المكونات من قيمها المصممة.

مثال ١١,٥

مرشح مفتاح سالين المنفذ لنطاق من الترددات

من التصميمات المشهورة للمرشحات التي يمكن أن نجدها في العديد من كتب الإلكترونيات أو المرشحات، مرشح مفتاح سالين أو المرشح ذو الـ K الثابتة المكون من قطبين في مرحلة واحدة والمنفذ لمجال من الترددات كما في الشكل رقم (١١,٥٤).

رمز المثلث بداخله ال K يمثل مكبراً مثالياً غير عاكس بمعامل تكبير جهدي محدد K، ومعاوقة دخل لا نهائية، ومقاومة خرج تساوي صفراً وعرض مجال لا نهائي (ليس مكبر عمليات). دالة العبور الكلية والاستجابة الترددية للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة:



شكل رقم (١١,٥٤) مرشح مفتاح سالين أو ال K الثابتة المنفذ للترددات المنخفضة

$$H(s)=\frac{V_O(s)}{V_i(s)}=\frac{s\frac{K}{(1-K)}\frac{1}{R_1C_1}}{s^2+\left[\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_1C_2(1-K)}\right]s+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

وبالتالي:

$$H(j\omega)=\frac{V_O(j\omega)}{V_i(j\omega)}=\frac{j\omega\frac{K}{(1-K)}\frac{1}{R_1C_1}}{(j\omega)^2+j\omega\left[\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_1C_2(1-K)}\right]+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

هذه الاستجابة الترددية هي على الصورة التالية :

$$H(j\omega) = H_o \frac{j2\zeta\omega_0^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_0(j\omega)+\omega_0^2} = \frac{j\omega A}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_0(j\omega)+\omega_0^2}$$

حيث :

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{K}}{(1-\mathrm{K})}\frac{1}{\mathrm{R_1C_2}}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{\mathrm{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\zeta = \frac{\mathrm{R_1C_1+R_2C_2+\frac{R_2C_1}{1-K}}}{2\sqrt{\mathrm{R_1R_2C_1C_2}}}, \quad Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{\sqrt{\mathrm{R_1R_2C_1C_2}}}{\mathrm{R_1C_1+R_2C_2+\frac{R_2C_1}{1-K}}}$$

وأيضاً :

$$\mathrm{H_0} = \frac{\mathrm{K}}{1+(1-\mathrm{K})\left(\frac{\mathrm{C_2}}{\mathrm{C_1}}+\frac{\mathrm{R_1}}{\mathrm{R_2}}\right)}$$

خطوات التصميم المقترحة هي اختيار Q ، والتردد الرنيني $f_0=\omega_0/2\pi$ ، واختيار $C_1=C_2=C$ بقيم مناسبة وبعد ذلك نحسب :

$$\mathrm{R_1} = \mathrm{R_2} = \frac{1}{2\pi \mathrm{f_0C}} \text{ and } \mathrm{K} = \frac{3\mathrm{Q}-1}{2\mathrm{Q}-1} \text{ and } |\mathrm{H_0}| = 3\mathrm{Q}-1$$

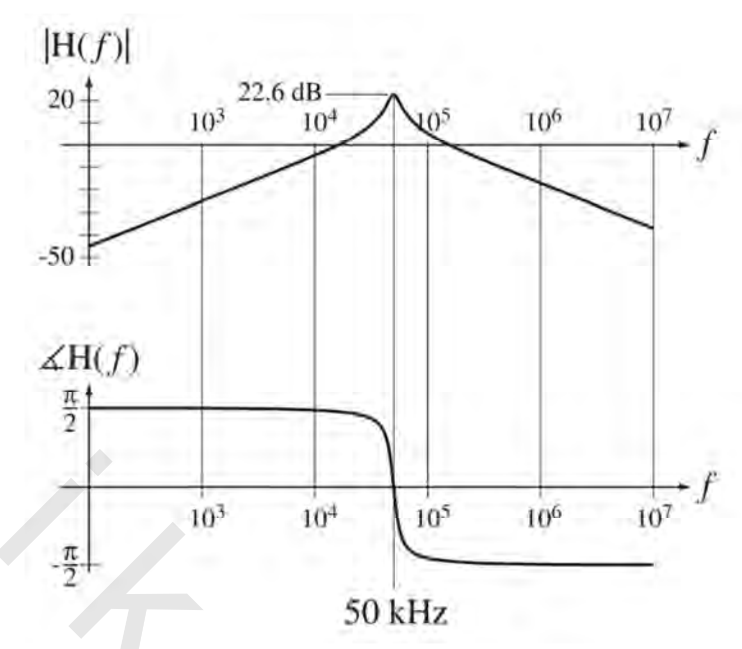
أيضاً ، نوصي بأن Q يجب أن تكون أقل من 10 لهذا التصميم. لذلك أصبحت المهمة تصميم مرشح من هذا النوع له Q=5 وتردد ركني مقداره 50kHz.

يمكننا أن نختار قيمة مناسبة للمكثف ، لذلك دعنا نضع $C_1=C_2=C=10nF$. وبعد ذلك نضع $R_1=R_2=318\Omega$ ، و K=1.556 و $|H_0|=14$. وهذا يجعل الاستجابة الترددية كما يلي :

$$\mathrm{H(j\omega)} = -\frac{\mathrm{j\omega}(8.792\times10^5)}{(\mathrm{j\omega})^2+(6.4\times10^4)\mathrm{j\omega}+9.86\times10^{10}}$$

أو يمكن كتابتها في صورة تردد دوري كما يلي وكما في الشكل رقم (١١,٥٥) :

$$H(f) = -\frac{j2\pi f(8.792\times10^5)}{(j2\pi f)^2+(6.4\times10^4)j2\pi f+9.86\times10^{10}}$$



شكل رقم (١١,٥٥) مخطط بود للاستجابة الترددية لمرشح مفتاح سالين المنفذ لمجال من الترددات.

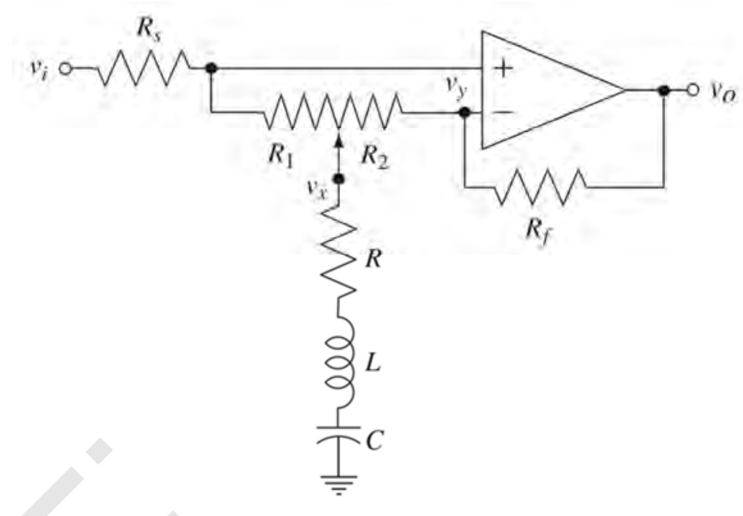
كما هو الحال في المثال السابق، فإننا لا يمكننا أن نختار قيم المكونات لكي تساوي تماماً القيم المحسوبة، ولكننا يمكننا أن نقترب منها. ربما يكون من المفروض أن نستخدم قيمة أسمية للمقاومات مقدارها 330Ω وهذا سيغير من الاستجابة الترددية قليلاً، اعتماداً على قيمها الحقيقية والقيم الحقيقية للمكثفات.

مثال ١١,٦

المرشح RLC المضاعف التربيع

المرشح ثنائي التعبير المقدم في الجزء ١١,٢ يمكن تنفيذه كمرشح فعال كما في الشكل رقم (١١,٥٦). مع فرض مكبر عمليات مثالي، فإن دالة العبور يمكن إيجادها باستخدام طرق تحليل الدوائر القياسية. يمكن كتابة هذه الدالة كما يلي:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + \frac{R(R_1+R_2)+R_1(R_f+R_2)}{L(R_1+R_2)}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R(R_1+R_2)+R_2(R_s+R_1)}{L(R_1+R_2)}s + \frac{1}{LC}}$$



شكل (١١,٥٦) تنفيذ المرشح RLC الفعال الثنائي التربيع

افترض الحالتين التاليتين: $R_1 \neq 0, R_2 = 0$، و $R_1 = 0, R_2 \neq 0$. في الحالة الأولى ستكون الاستجابة الترددية كما يلي:

$$H(j\omega) = -\frac{(j\omega)^2 + j\omega(R+R_f)/L + 1/LC}{(j\omega)^2 + j\omega R/L + 1/LC}$$

التردد الزاوي الطبيعي سيكون $w_n = 1/\sqrt{LC}$، وهناك أقطاب عند:

$$j\omega = -(R/2L) \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$$

وأصفار عند:

$$j\omega = -\frac{(R+R_f)}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R+R_f}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

وعند الترددات العالية والمنخفضة، وعند التردد الرنيني كما يلي:

$$\lim_{\omega \to 0} H(j\omega) = 1, \quad \lim_{\omega \to \infty} H(j\omega) = 1, \quad H(j\omega_n) = \frac{R+R_f}{R} > 1$$

إذا كانت $R < 2\sqrt{L/C}$ و $R + R_f \gg 2\sqrt{L/C}$، فإن الأقطاب تكون مركبة والأصفار حقيقية والتأثير المهيمن قريباً من w_n هو زيادة في مقدار الاستجابة الترددية. لاحظ أنه في هذه الحالة، فإن الاستجابة الترددية لا تعتمد على R_1. هذه الحالة تشابه أن يكون لدينا دائرة رنين RLC في مسار التغذية المرتدة مع التخلص من مقسم الجهد.

في الحالة الثانية إذا كانت $R_1 = 0, R_2 \neq 0$، فإن:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + j\omega\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + j\omega\frac{R+R_s}{L} + \frac{1}{LC}}$$

التردد الرنيني الطبيعي هو $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$. هناك أصفار عند:

$$j\omega = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

وأقطاب عند:

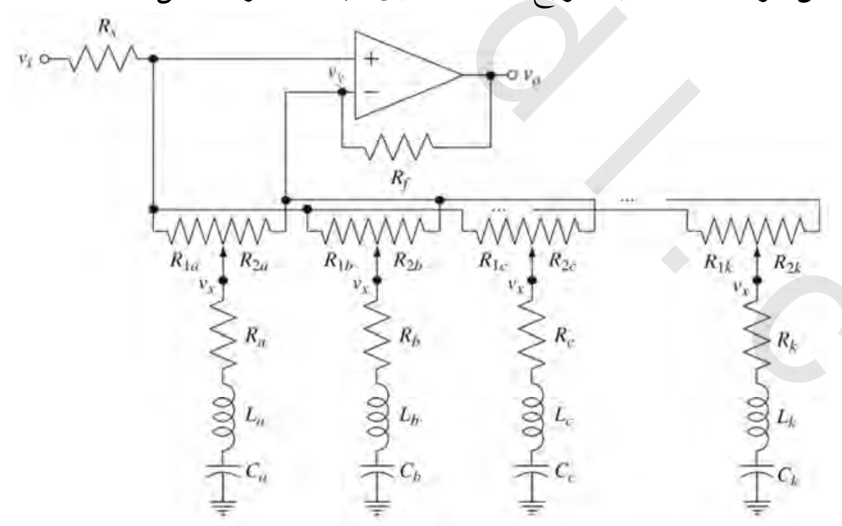
$$j\omega = -\frac{R+R_s}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R+R_s}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

وعند الترددات المنخفضة والعالية وعند التردد الرنيني يمكننا كتابة:

$$\lim_{\omega\to 0} H(j\omega) = 1, \quad \lim_{\omega\to\infty} H(j\omega) = 1, \quad H(j\omega_n) = \frac{R}{R+R_s} < 1$$

إذا كانت $R < 2\sqrt{L/C}$ و $R + R_s \gg 2\sqrt{L/C}$، فإن الأصفار ستكون مركبة وستكون الأقطاب حقيقية والتأثير المهيمن بالقرب من w_n سيكون تناقصاً في مقدار الاستجابة الترددية. لاحظ أنه في هذه الحالة لا تعتمد الاستجابة الترددية على R_2، وهذه الحالة تشبه أن يكون لدينا دائرة RLC رنينية على دخل المكبر مع التخلص من مقسم الجهد. إذا كانت $R_1=R_2$ و $R_f=R_s$ فإن الاستجابة الترددية ستكون $H(j\omega)=1$ وستكون إشارة الخرج هي نفسها إشارة الدخل.

لذلك فإن مقسم جهد واحد من الممكن أن يحدد إذا كان مقدار الاستجابة الترددية سيكون متناقصاً أو متزايداً بالقرب من التردد الرنيني. إن المعادل التخطيطي graphic equalizer المقدم في الجزء ١١.٢ يمكن بناؤه باستخدام تتابع من ٩ حتى ١١ من هذا المرشح الثنائي التربيع بحيث تكون الترددات الرنينية لها منفصلة بأوكتاف بين كل مرشح والتالي. يمكن أيضاً بناء هذا المرشح عن طريق استخدام مكبر عمليات واحد كما هو موضح في الشكل رقم (١١.٥٧). نتيجة التفاعل بين المكونات RLC غير الفعالة في الشبكة، فإن عمل هذه الدائرة لن يكون مساوياً تماماً للتتابع المتعدد من المرشحات الثنائية التربيع، ولكنها تحقق الهدف بمكونات أقل.



شكل رقم (١١,٥٧) دائرة المعدل التخطيطي مبنية باستخدام مكبر عمليات واحد فقط.

(١١,٤) المرشحات المتقطعة زمنياً

الرموز

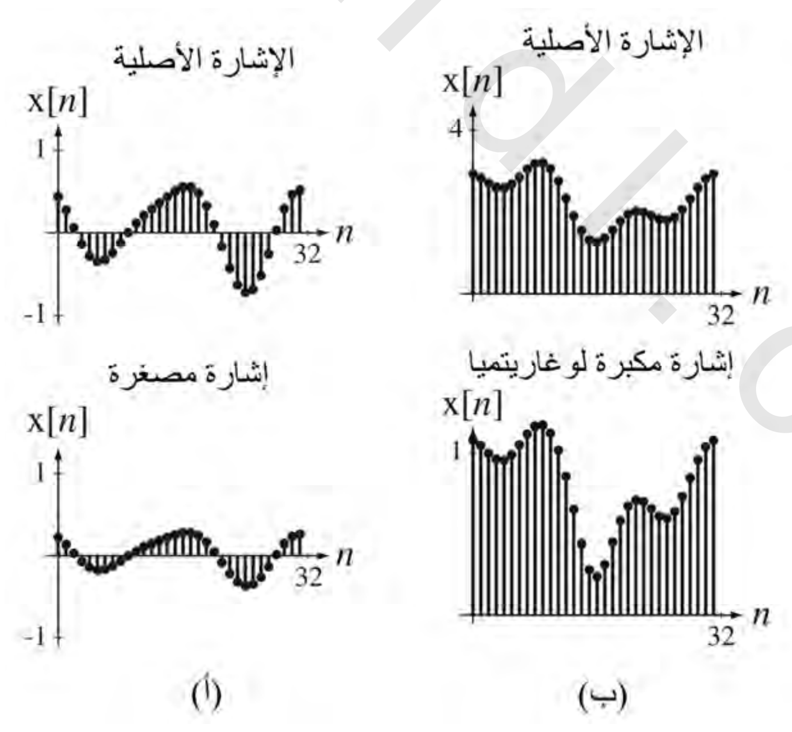
لقد تم استنتاج DTFT من تحويل z عن طريق تبديل المتغيرات التالي $z \to e^{j2\pi F}$أو $z \to e^{j\Omega}$ حيث كل من F و Ω متغيرات حقيقية تمثل التردد الدوري والزاوي. في مطبوعات الأنظمة المتقطعة زمنياً (الرقمية) فإن المتغير الأكثر شيوعاً المستخدم في التردد هو Ω. ولذلك فإننا سنستخدم الرمز Ω باستمرار في الأجزاء التالية عن المرشحات المتقطعة زمنياً.

المرشحات المثالية

إن تحليل وتصميم المرشحات المتقطعة زمنياً لها العديد من المتوازيات مع تحليل وتصميم المرشحات المستمرة زمنياً. في هذا الجزء والتالي له سنستكشف خواص المرشحات المتقطعة زمنياً باستخدام العديد من الطرق والمصطلحات المستخدمة مع المرشحات المستمرة زمنياً.

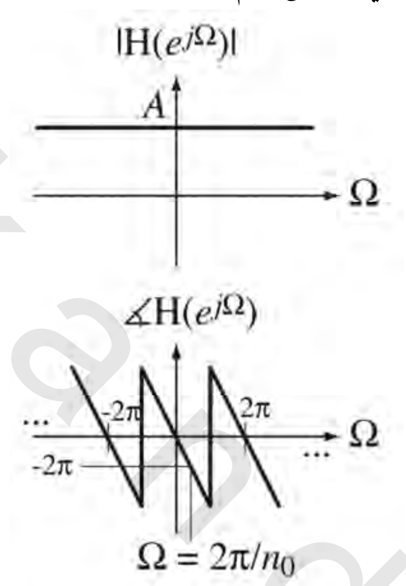
التشويه

إن مصطلح التشويه له المعنى نفسه مع المرشحات المتقطعة زمنياً مثل المرشحات المستمرة زمنياً، مع تغيير شكل الإشارة. افترض الإشارة x[n] التي لها الشكل الموضح في أعلى الشكل رقم (١١,٥٨أ). بالتالي فإن الإشارة الموجودة في أسفل الشكل رقم (١١,٥٨أ) هي صورة غير مشوهة من هذه الإشارة. الشكل رقم (١١,٥٨ب) يوضح أحد أنواع هذا التشويه.



شكل رقم (١١,٥٨) (أ) إشارة أصلية، ونسخة متغيرة ولكنها غير مشوهة منها، (ب) إشارة أصلية ونسخة مشوهة منها

تماماً كما كان الأمر حقيقياً مع المرشحات المستمرة زمنياً، فإن استجابة الصدمة التي لا تسبب تشويهاً تكون عبارة عن صدمة، ومن الممكن لهذه الصدمة أن تكون شدتها مختلفة عن الوحدة ومن الممكن أن تكون مزاحة زمنياً. من أشهر صور استجابات الصدمة لنظام غير مشوّه هي $h[n]=A\delta[n-n_0]$. الاستجابة الترددية المقابلة هي DTFT لاستجابة الصدمة وهي $H(e^{j\Omega}) = Ae^{-j\Omega n_0}$ من الممكن وصف هذه الاستجابة الترددية بمقدارها وزاويتها كما يلي: $|H(e^{j\Omega})| = A$ و $\measuredangle H(e^{j\Omega}) = -\Omega n_0$. لذلك فإن النظام الخالي من التشويه يكون له مقدار استجابة ترددية ثابت مع التردد وزاوية تكون خطية مع التردد كما في الشكل رقم (١١.٥٩).



شكل رقم (١١,٥٩) مقدار وزاوية نظام خالي من التشويه

مقدار الاستجابة الترددية لنظام خالٍ من التشويه يكون ثابتاً وزاوية الاستجابة الترددية تكون خطية على المدى من $-\pi<\Omega<\pi$ وتتكرر دوريا خارج هذا المدى. حيث إن n_0 تكون صحيحة، فإن مقدار وزاوية المرشح الخالي من التشويه من المؤكد أنها ستتكرر كل مرة تتغير Ω بمقدار 2π.

تصنيفات المرشحات

إن اللفظين "مجال التمرير أو السماح passband" و "مجال الوقف أو المنع stopband " لهما المعنى نفسه مع المرشحات المتقطعة زمنياً مثل المرشحات المستمرة زمنياً. إن أوصاف المرشحات المتقطعة زمنياً تتشابه من حيث المفهوم ولكن يجب تعديلها قليلا نتيجة وجود حقيقة أن كل الأنظمة المتقطعة لها استجابات ترددية دورية. إنها تكون دورية لأنه في الإشارة $A\cos(\Omega_0 n)$ إذا كانت Ω_0 ستتغير بإضافة $2\pi m$، حيث m رقم صحيح، فإن الإشارة تصبح $A\cos((\Omega_0+2\pi m)n)$ وبالتالي فإن الإشارة لن تتغير.

$$A\,cos(\Omega_0 n) = A\,cos\big((\Omega_0 + 2\pi m)n\big) = A\,cos(\Omega_0 n + 2\pi mn), \text{m } an\ integer$$

لذلك فإن أي مرشح متقطع زمنياً يتم وصفه عن طريق استجابته الترددية على الدورة الأساسية $-\pi<\Omega<\pi$.

أي مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة يسمح بمرور طاقة الإشارة للترددات $0<|\Omega|<\Omega_m<\pi$ بدون أي تشويه ويوقف طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى في المدى $-\pi<\Omega<\pi$.

أي مرشح مثالي منفذ للترددات المرتفعة يوقف طاقة الإشارة للترددات $0<|\Omega|<\Omega_m<\pi$ ويسمح بمرور طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى في المدى $-\pi<\Omega<\pi$ بدون أي تشويه.

أي مرشح مثالي منفذ لمجال من الترددات يسمح بمرور طاقة الإشارة للترددات $0<\Omega_L<|\Omega|<\Omega_H<\pi$ بدون أي تشويه ويوقف طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى في المدى $-\pi<\Omega<\pi$.

أي مرشح مثالي موقف لمجال من الترددات يوقف مرور طاقة الإشارة للترددات $0<\Omega_L<|\Omega|<\Omega_H<\pi$ ويسمح بمرور طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى في المدى $-\pi<\Omega<\pi$ بدون أي تشويه.

الاستجابات الترددية

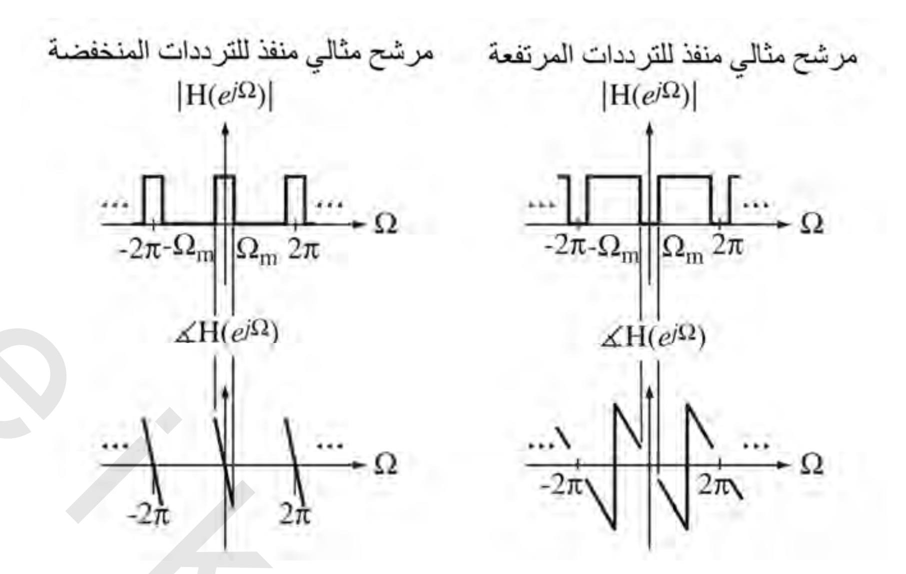
في الشكل رقم (١١.٦٠) والشكل رقم (١١.٦١) نرى استجابتي المقدار والزاوية للأربعة أنواع الأساسية للمرشحات المثالية.

استجابات الصدمة والسببية

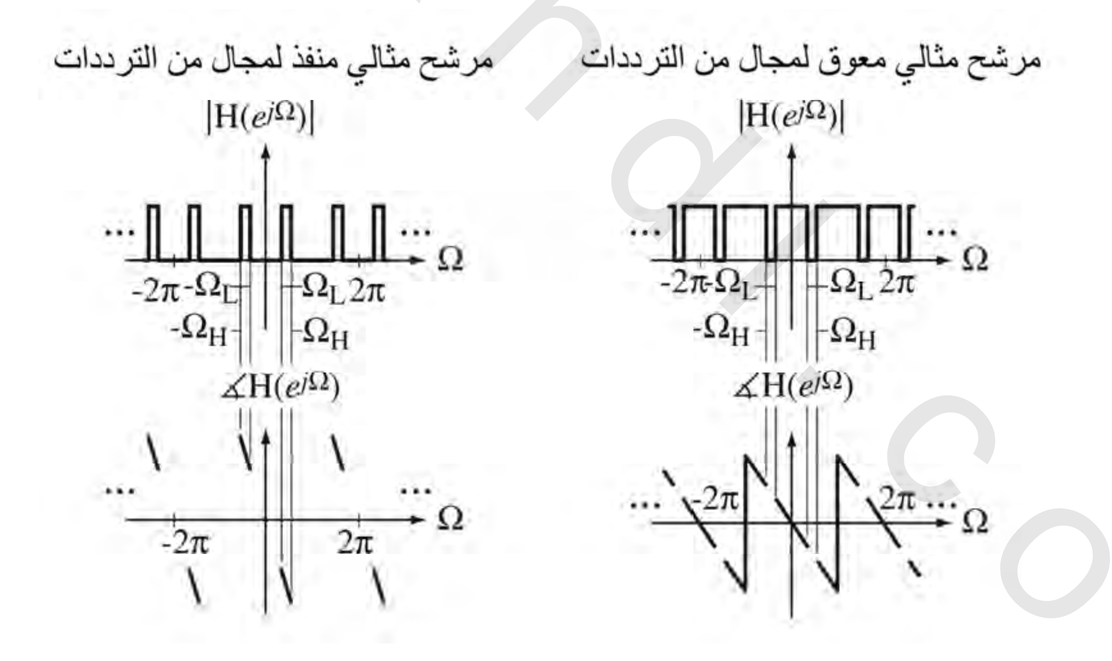
استجابات الصدمة للمرشحات المثالية هي التحويل العكسي لاستجاباتهم الترددية. استجابات الصدمة والاستجابات الترددية للأربعة أنواع الأساسية للمرشحات المثالية تم تلخيصها في الشكل رقم (١١.٦٢). هذه المواصفات تعتبر مواصفات عامة بمهوم أنها تشتمل على معامل تكبير ثابت A اختياري وأيضاً زمن تأخير اختياري n_0.

الشكل رقم (١١.٦٣) يبين بعض الأشكال المثالية لاستجابات الصدمة للأربعة أنواع الأساسية للمرشحات المثالية.

إن افتراض السببية يكون هو نفسه في حالة المرشحات المتقطعة مثل المرشحات المستمرة زمنياً. مثل المرشحات المثالية المستمرة زمنياً ، فإن المرشحات المثالية المتقطعة زمنياً يكون لها استجابات صدمة غير سببية وبذلك تكون غير قابلة للبناء بصورة طبيعية.



شكل رقم (١١,٦٠) الاستجابات الترددية للمقدار والزاوية للمرشحات المنفذة للترددات المنخفضة والترددات المنفذة للترددات العالية.



شكل رقم (١١,٦١) الاستجابات الترددية للمقدار والزاوية للمرشحات المنفذة والمرشحات المعوقة لمجال من الترددات.

نوع المرشح	الاستجابة الترددية
منفذ للترددات المنخفضة	$H(e^{j\Omega}) = A\, rect(\Omega/2\Omega_m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0} * \delta_{2\pi}(\Omega)$
منفذ للترددات المرتفعة	$H(e^{j\Omega}) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}\,[1 - rect(\Omega/2\Omega_m) * \delta_{2\pi}(\Omega)]$
منفذ لمجال من الترددات	$H(e^{j\Omega}) = A\,\left[rect\left(\frac{\Omega-\Omega_0}{\Delta\Omega}\right) + rect\left(\frac{\Omega-\Omega_0}{\Delta\Omega}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0} * \delta_{2\pi}(\Omega)$
معوق لمجال من الترددات	$H(e^{j\Omega}) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}\,\left\{1 - \left[rect\left(\frac{\Omega-\Omega_0}{\Delta\Omega}\right) + rect\left(\frac{\Omega-\Omega_0}{\Delta\Omega}\right)\right] * \delta_{2\pi}(\Omega)\right\}$
نوع المرشح المثالي	الاستجابة الصدمية
منفذ للترددات المنخفضة	$h[n] = (A\Omega_m/\pi)sinc(\Omega_m(\mathrm{n} - n_0))$
منفذ للترددات المرتفعة	$h[n] = A\delta[\mathrm{n} - n_0] - (A\Omega_m/\pi)sinc(\Omega_m\,(\mathrm{n} - n_0)/\pi)$
منفذ لمجال من الترددات	$h[n] = 2A\Delta f sinc(\Delta f(\mathrm{t} - t_0))cos(2\pi f_0(\mathrm{t} - t_0))$
معوق لمجال من الترددات	$h[n] = A\delta[\mathrm{n} - n_0] - (A\Delta\Omega/\pi)sinc(\Delta\Omega\,(\mathrm{n} - n_0)/2\pi)cos(\Omega_0(\mathrm{n} - n_0))$
	$\Delta\Omega = \Omega_H - \Omega_L$, $\Omega_0 = (\Omega_H - \Omega_L)/2$

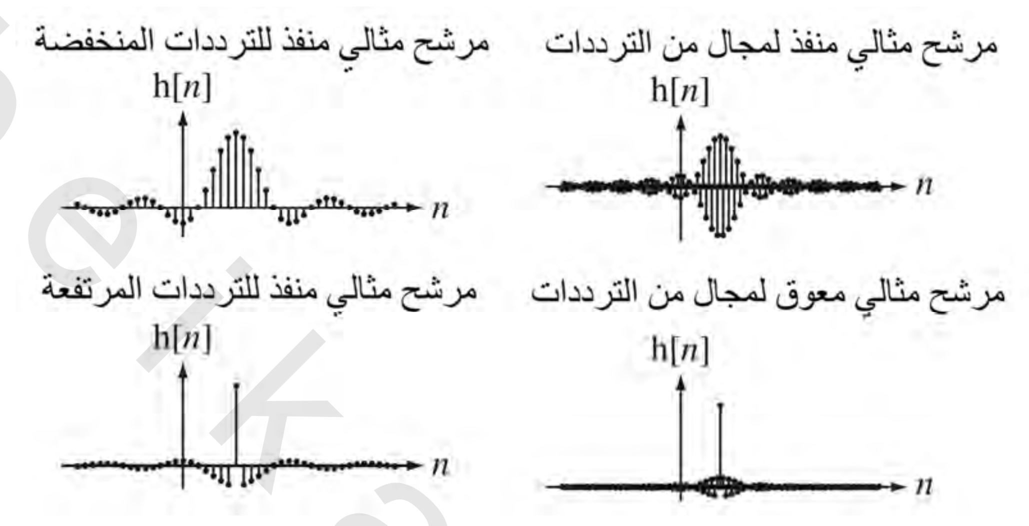
شكل (١١,٦٢) الاستجابة الترددية واستجابة الصدمة للأنواع الأربعة الأساسية من المرشحات

في الشكل رقم (١١.٦٤) والشكل رقم (١١.٦٥) يوجد بعض الأمثلة على استجابات الصدمة، والاستجابات الترددية، والاستجابات للموجة المستطيلة لبعض المرشحات غير المثالية والسببية، التي تمثل الأربعة أنواع الأساسية من المرشحات. في كل حالة تم رسم الاستجابة الترددية في الدورة الأساسية فقط $-\pi<\Omega<\pi$.
تأثير هذه الأنواع العملية من المرشحات على الموجة المستطيلة يشابه تماماً الاستجابات المقابلة للمرشحات المستمرة زمنياً.

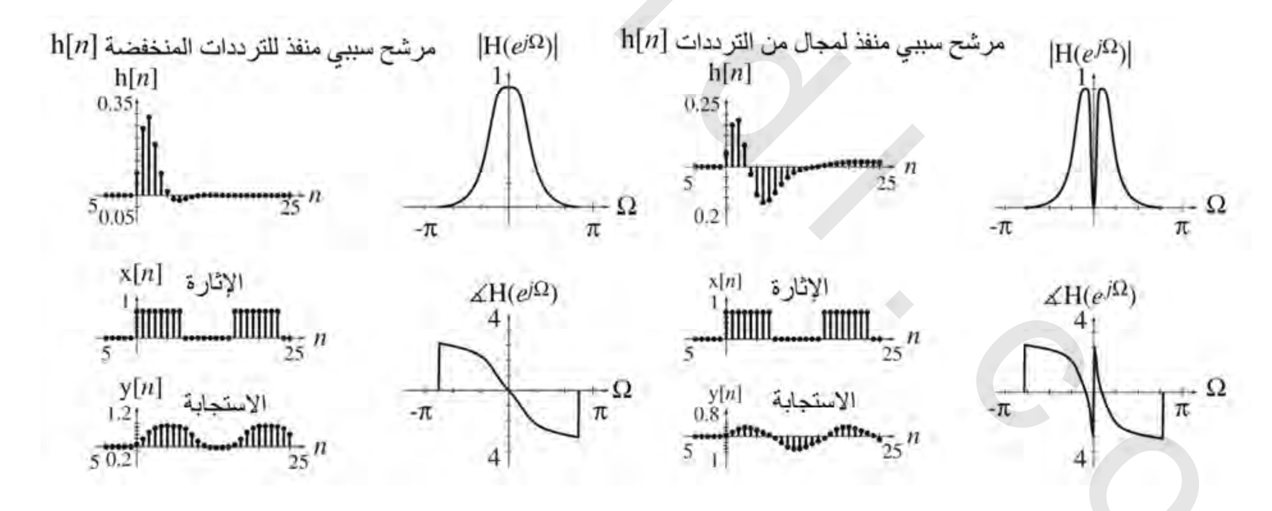
ترشيح الصور

أحد الطرق الظريفة لإظهار تأثير ما تفعله هذه المرشحات هو أن نقوم بترشيح صورة. الصورة هي إشارة ثنائية الأبعاد. يمكن اكتساب الصور بطرق مختلفة. كاميرا الفيلم تعرض الفيلم الحساس للضوء للمنظر من خلال نظام العدسات، التي تضع صورة ضوئية للمنظر على الفيلم. الصورة من الممكن أن تكون صورة ملونة أو صورة أبيض وأسود (أحادية اللون). هذا سنقتصر في هذا الشرح على الصور أحادية اللون. الكاميرا الرقمية تكتسب عن طريق تصوير المنظر على مصفوفة مستطيلة من الكشفات، التي تحول الطاقة الضوئية إلى شحنات كهربية. كل

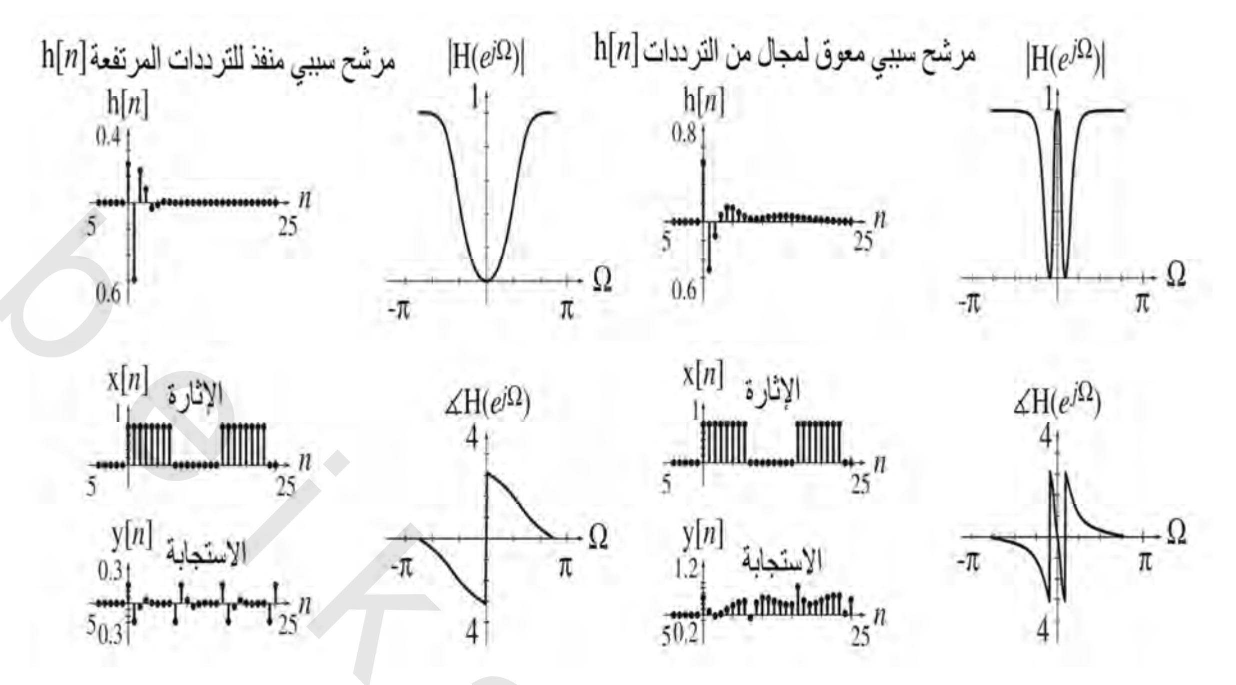
كاشف يرى جزءاً صغيراً جداً من الصورة يسمى البكسل pixel (وهي اختصار لكلمة عنصر صورة picture element). هذه الصورة المكتسبة عن طريق الكاميرا الرقمية تتكون بالتالي من مصفوفة من الأرقام، رقم لكل بكسل، يمثل شدة الضوء عند هذه النقطة (نؤكد على فرض الصورة أحادية اللون).



شكل رقم (١١,٦٣) استجابات صدمة مثالية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة، وآخر منفذ للترددات المرتفعة، وآخر منفذ لمجال من الترددات، وآخر معوق لمجال من الترددات.



شكل رقم (١١,٦٤) استجابة الصدمة، والاستجابة الترددية، والاستجابة لموجات مستطيلة لمرشح سببمنفذ للترددات المنخفضة وآخر منفذ لمجال من الترددات.

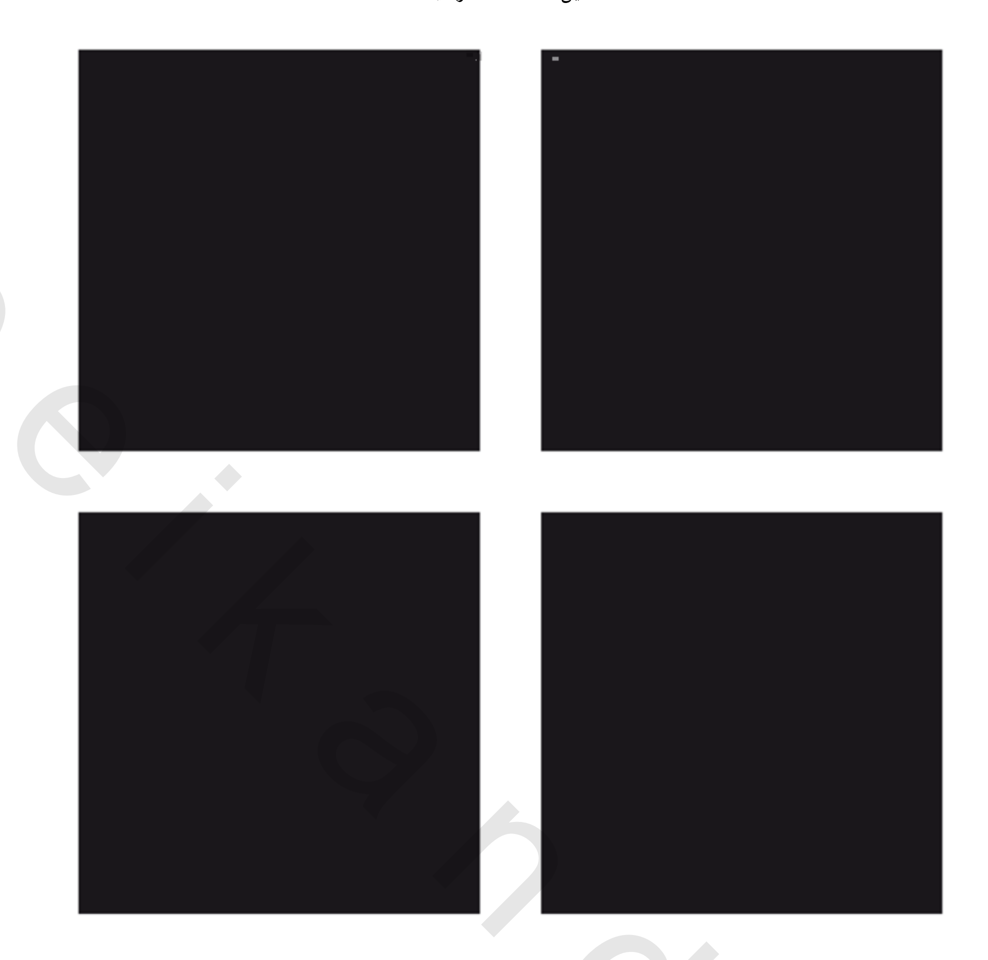


شكل رقم (١١,٦٥) استجابة الصدمة، والاستجابة الترددية، والاستجابة لموجات مستطيلة لمرشح سببمنفذ للترددات المرتفعة وآخر معوق لمجال من الترددات

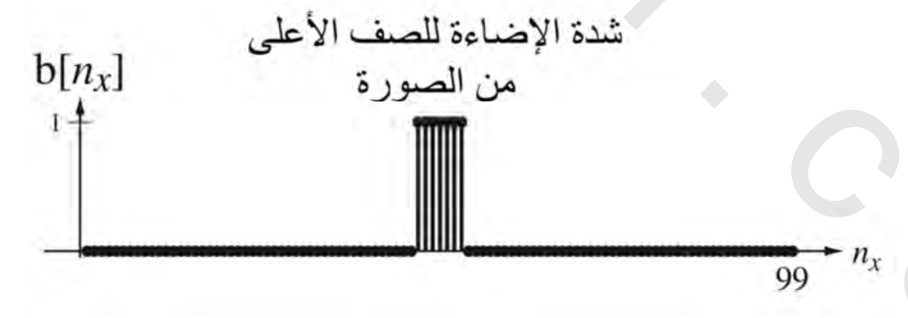
تعتبر الصورة دالة فراغ مستمر من محورين أو بعدين مساحيين يسميان عادة x و y. الصورة الرقمية المكتسبة هي دالة فراغ متقطع من محورين مساحيين متقطعين n_x ، n_y. عموماً، أو في الأساس، فإن أي صورة يمكن ترشيحها مباشرة. في الحقيقة، هناك طرق ضوئية التي تقوم بالترشيح الضوئي فقط. ولكن حتى الآن، فإن معظم أنواع مرشحات الصور الشائعة تكون رقمية، مما يعني أن الصورة المكتسبة رقميا يتم ترشيحها عن طريق الحاسب باستخدام طرق عددية.

الطرق المستخدمة في ترشيح الصور تشبه إلى حد كبير الطرق المستخدمة لترشيح الإشارات، فيما عدا أنها تتم في بعدين. افترض مثال الصورة البسيط الموضح في الشكل رقم (١١.٦٦).

أحد الطرق لترشيح الصورة هي أن نعامل صفاً واحداً من بكسلات الصورة كإشارة أحادية البعد ثم يتم ترشيحها تماماً كإشارة متقطعة زمنياً. الشكل رقم (١١.٦٧) هو رسم لشدة الإضاءة لبكسلات الصف الذي في قمة الصورة مع المحور الأفقي المتقطع n_x.

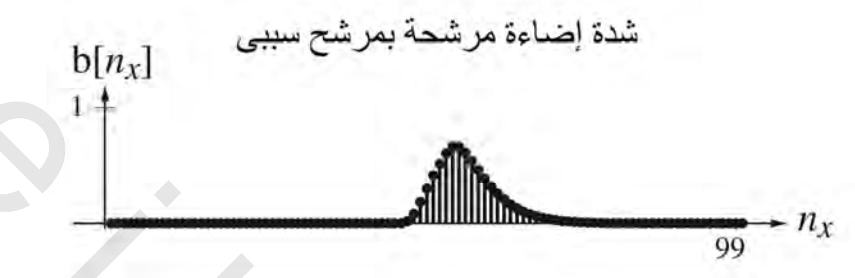


شكل رقم (١١,٦٦) صليب أبيض على خلفية سوداء.

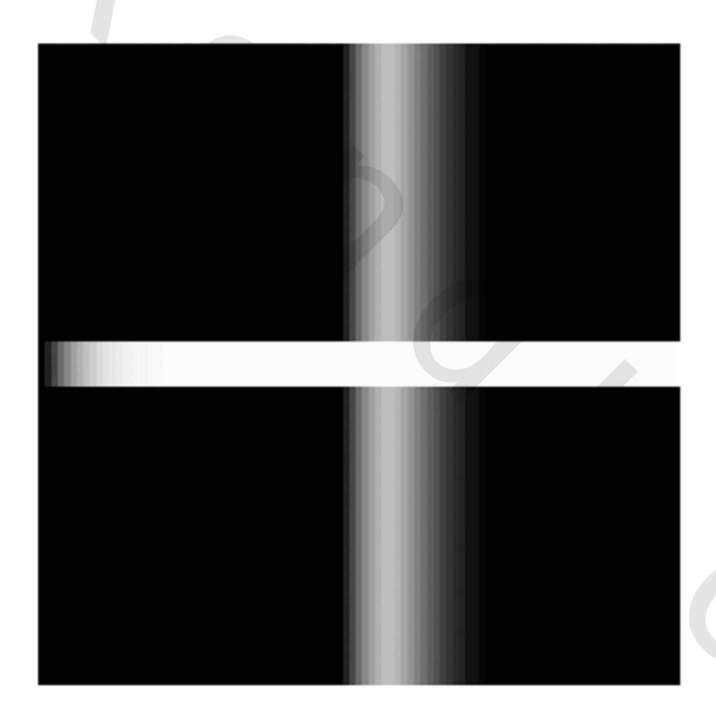


شكل رقم (١١.٦٧) شدة الإضاءة لصف البكسلات الذي في قمة صورة الصليب الأبيض

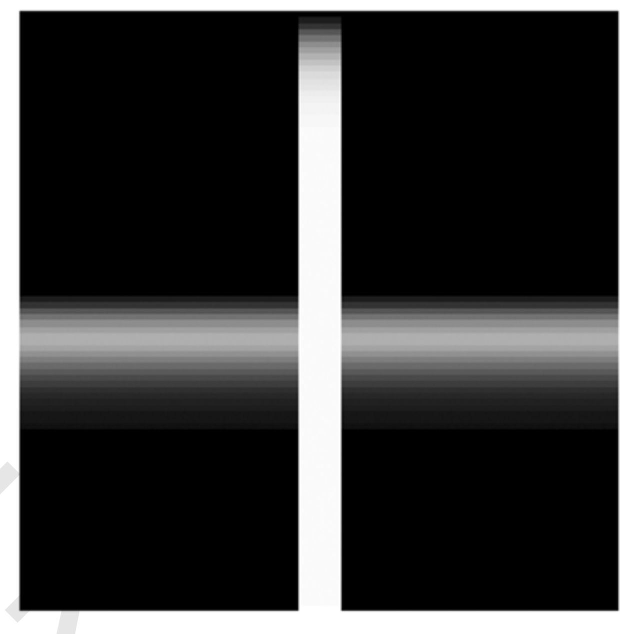
إذا كانت الإشارة دالة في الزمن المتقطع وكنا نرشحها في الزمن الحقيقي (مما يعني أننا قد لا يكون لدينا القيم المستقبلية متاحة أثناء عملية الترشيح)، فإن الإشارة المرشحة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة ستكون كما هو مبين في الشكل رقم (١١.٦٨).



شكل رقم (١١,٦٨) شدة إضاءة الصف الأول من البكسلات بعد ترشيحه بمرشح سببي منفذ للترددات المنخفضة.



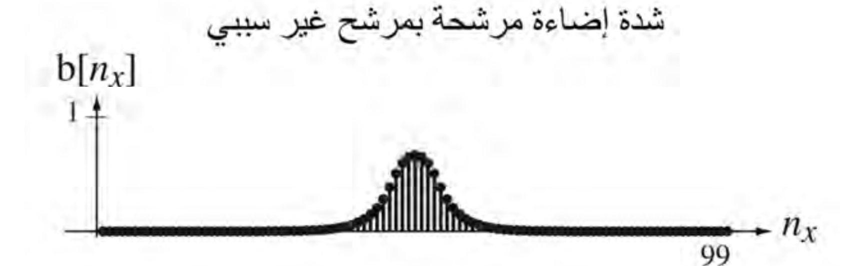
شكل رقم (١١,٦٩) صورة الصليب الأبيض بعد ترشيح جميع صفوفها بمرشح سببي منفذ للترددات المنخفضة



شكل رقم (١١,٧٠) صورة الصليب الأبيض بعد ترشيح جميع أعمدتها بمرشح سببي منفذ للترددات المنخفضة.

بعد ترشيح جميع صفوف الصورة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة فإن الصورة تبدو مضببة أو منعمة في الاتجاه الأفقي ولم تتغير في الاتجاه الرأسي كما في الشكل رقم (١١.٦٩). إذا قمنا بترشيح الأعمدة بدلاً من الصفوف، فإن التأثير سيكون كما هو واضح في الشكل رقم (١١.٧٠).

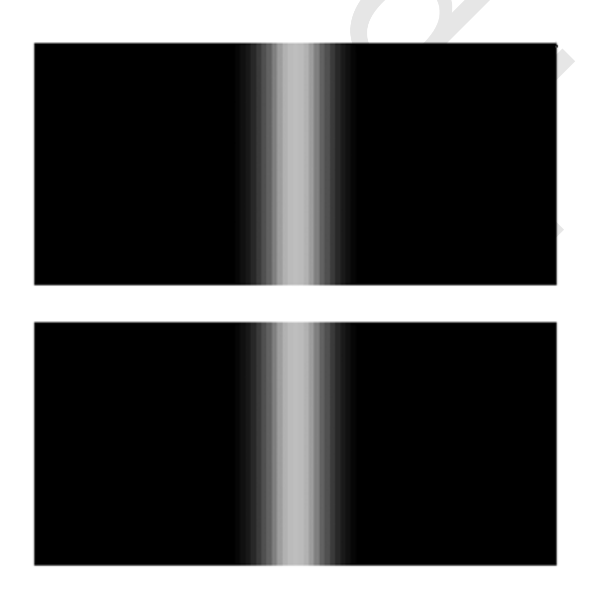
أحد الأشياء الظريفة عن ترشيح الصور هي أن السببية لا يجب أن تكون دائماً محققة أثناء عملية الترشيح. في العادة يتم اكتساب الصورة كلها أولاً، ثم تتم معالجتها. باتباع التطابق بين الزمن والمساحة، فإنه أثناء الترشيح الأفقي، فإن قيم الإشارة السابقة ستقع على اليسار والقيم المستقبلية ستكون على اليمين. أثناء الترشيح في الزمن الحقيقي للإشارات الزمنية لا نستطيع استخدام القيم المستقبلية؛ لأننا لا نعرفها. في ترشيح الصورة تكون الصورة كلها متاحة لنا قبل البدء في عملية الترشيح ولذلك فإن القيم المستقبلية تكون متاحة. إذا قمنا بترشيح الصف الأول الأفقي من الصورة باستخدام مرشح غير سببي منفذ للترددات المنخفضة، فإن التأثير سيبدو كما هو موضح في الشكل رقم (١١.٧١).



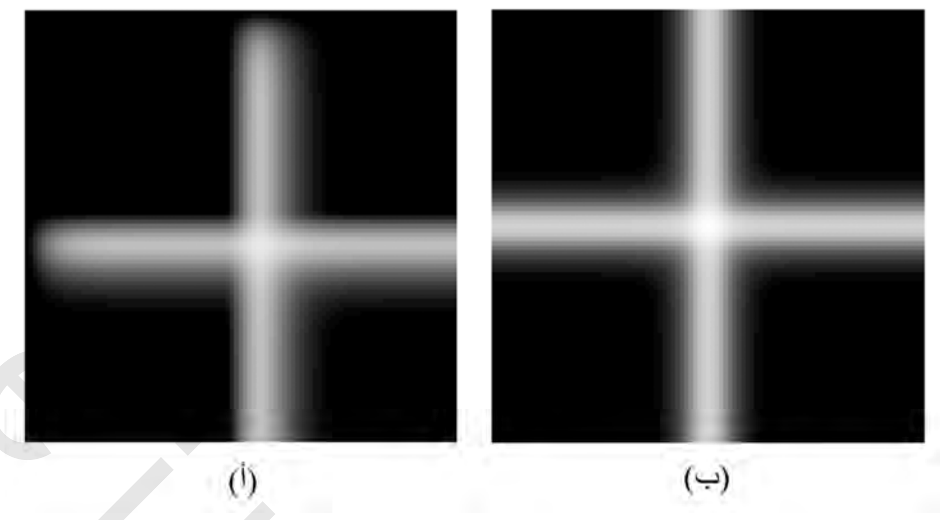
شكل رقم (١١,٧١) شدة إضاءة الصف الأول من البكسلات بعد ترشيحة بمرشح غير سببي منفذ للترددات المنخفضة

إذا رشحنا أفقياً الصورة كلها بمرشح غير سببي منفذ للترددات المنخفضة، فإن النتيجة ستكون كما هو موضح في الشكل رقم (١١.٧٢). التأثير الكلي لهذا النوع من المرشحات من الممكن رؤيته في الشكل رقم (١١.٧٣)، حيث تم ترشيح صفوف وأعمدة الصورة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة.

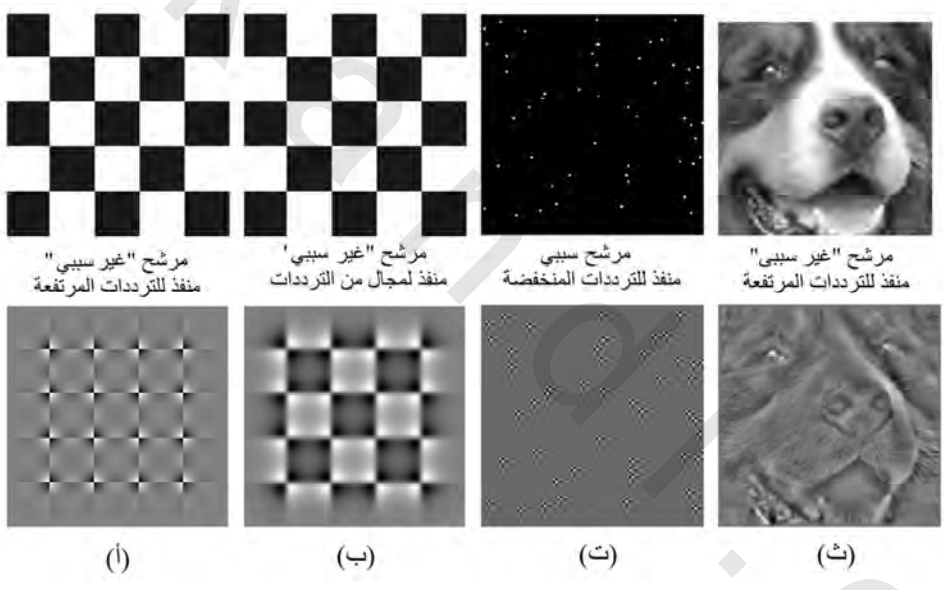
بالطبع، فإن المرشح المشار إليه مسبقاً على أنه غير سببي يكون في الحقيقة مرشحاً سببياً لأن كل بيانات الصورة تم اكتسابها قبل إجراء عملية الترشيح، وعلى ذلك فلا حاجة لمعرفة قيم مستقبلية. إننا نسميه فقط بأنه غير سببي لأنه في حالة وجود محاور مساحية بدلاً من الزمنية، وكنا نقوم بعملية ترشيح في الزمن الحقيقي، فإن الترشيح من الممكن أن يكون غير سببي. الشكل رقم (١١.٧٤) يوضح بعض الصور الأخرى وبعض عمليات الترشيح الأخرى.



شكل رقم (١١,٧٢) صورة الصليب الأبيض بعد ترشيح جميع الصفوف بمرشح غير سببي منفذ للترددات المنخفضة



شكل رقم (١١,٧٣) صورة الصليب الأبيض مرشحة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة (أ) سببي (ب) غير سببي.



شكل رقم (١١,٧٤) أمثلة على الأنواع المختلفة من مرشحات الصور

في كل صورة من صور الشكل (١١.٧٤) تتراوح قيم البكسلات من الأسود إلى الأبيض مع المستويات الرمادية بينهما. لكي نفهم تأثيرات الترشيح دعنا نفكر في البكسل السوداء على أن قيمتها تساوي صفراً، والبكسل البيضاء تكون قيمتها تساوي 1+. وعلى ذلك فإن المستوى الرمادي المتوسط ستكون قيمة أي بكسل فيه تساوي 0.5.

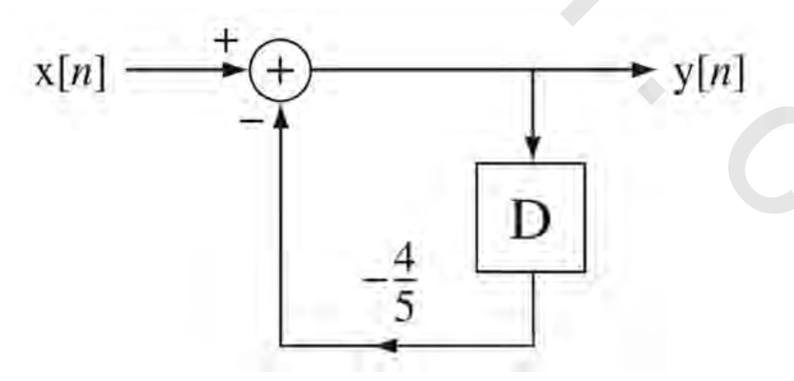
الصورة (أ) هو نموذج للوحة شطرنج تم ترشيحها باستخدام مرشح منفذ للترددات المرتفعة في البعدين. تأثير المرشح المنفذ للترددات المرتفعة هو تأكيد أو تقوية الحواف وتوهين أو إضعاف القيم المتوسطة بين الحواف. تحتوي الحواف على معلومات "الترددات المساحية العالية" في الصورة. لذلك فإن الصورة المرشحة بمرشح منفذ

للترددات المرتفعة يكون لها قيمة متوسطة تساوي 0.5 (المستوى الرمادي المتوسط) والمربعات السوداء والبيضاء، التي كانت مختلفة جداً في الصورة الأصلية، أصبحت تبدو هي نفسها تقريباً في الصورة المرشحة. لوحة الشطرنج في الصورة (ب) تم ترشيحها بمرشح منفذ لمجال من الترددات. هذا المرشح يعمل على تنعيم الحواف؛ لأنه له استجابة قليلة عند الترددات العالية. إنه أيضاً يوهن القيم المتوسطة؛ لأنه له قيمة استجابة قليلة عند الترددات المنخفضة جدا بما في ذلك التردد صفر. الصورة (ت) هي صورة لنموذج من النقاط العشوائية تم ترشيحها بمرشح سببي منفذ للترددات المنخفضة. يمكننا أن نرى أن المرشح سببي نتيجة أن التنعيم يحدث عادة على يمين وأسفل النقاط، والذي يعني أنها تقابل أزمنة متأخرة إذا كانت الإشارات إشارات زمنية. استجابة المرشح لنقطة ضوئية صغيرة جداً في الصورة تسمى دالة انتشار النقطة. دالة انتشار النقطة تناظر استجابة الصدمة في نطاق الأنظمة الزمنية. النقطة الضوئية الصغيرة تقارب صدمة ثنائية البعد ودالة انتشار النقطة تقابل استجابة الصدمة الثنائية البعد. الصورة الأخيرة (ث) هي صورة وجه لكلب. لقد تم ترشيح هذه الصورة بمرشح منفذ للترددات المرتفعة. تأثير ذلك هو تشكيل صورة من الخطوط الخارجية في الصورة الأصلية؛ لأن هذا المرشح يؤكد أو يقوي التغيرات المفاجئة (الحواف) ويوهن من التغيرات البطيئة في أجزاء الصورة.

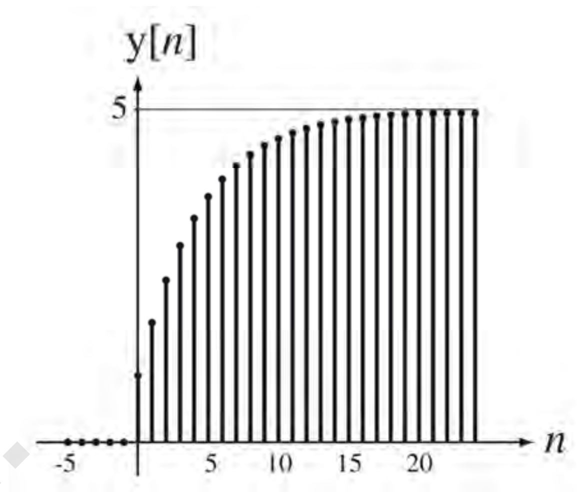
المرشحات العملية

مقارنة مع المرشحات المستمرة زمنياً

الشكل رقم (١١.٧٥) عبارة عن مثال لمرشح LTI منفذ للترددات المنخفضة. استجابة تتابع الوحدة هي $[5-4(0.8)^n]u[n]$ كما في الشكل رقم (١١.٧٦).



شكل رقم (١١,٧٥) مرشح منفذ للترددات المنخفضة



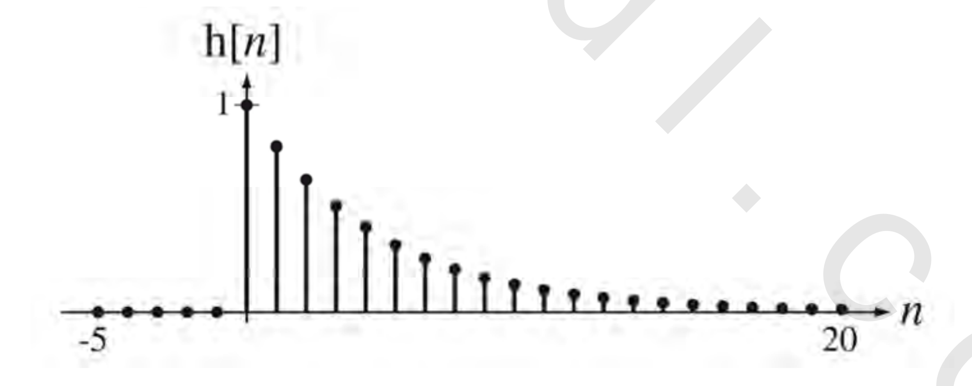
شكل رقم (١١,٧٦) استجابة تتابع الوحدة للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة.

استجابة الصدمة لأي نظام متقطع زمنياً هي الفرق العكسي الأول لاستجابته لوحدة التتابع. في هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة التالية:

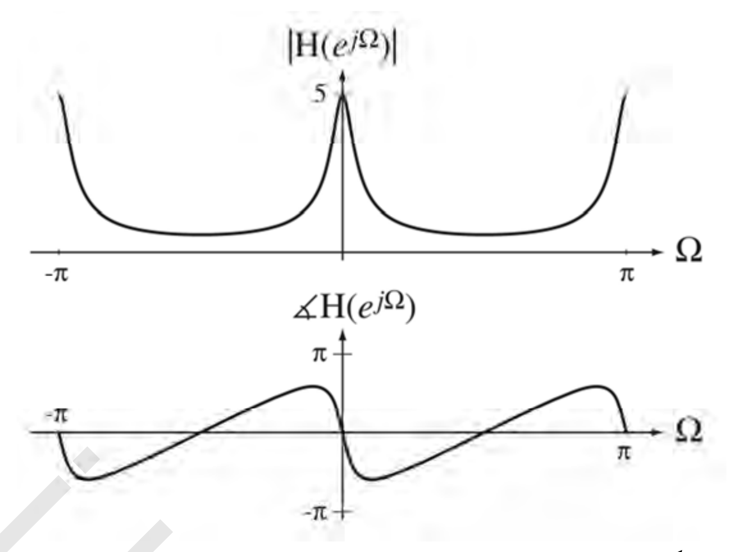
$$h[n] = [5 - 4(4/5)^n]u[n] - [5 - 4(4/5)^{n-1}]u[n-1]$$

والتي تؤول إلى $h[n]=(0.8)^n u[n]$ كما في الشكل رقم (١١.٧٧). دالة العبور والاستجابة الترددية ستكون كما يلي وكما في الشكل رقم (١١.٧٧) والشكل رقم (١١.٧٨):

$$H(z) = \frac{z}{z-0.8} \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0.8}$$

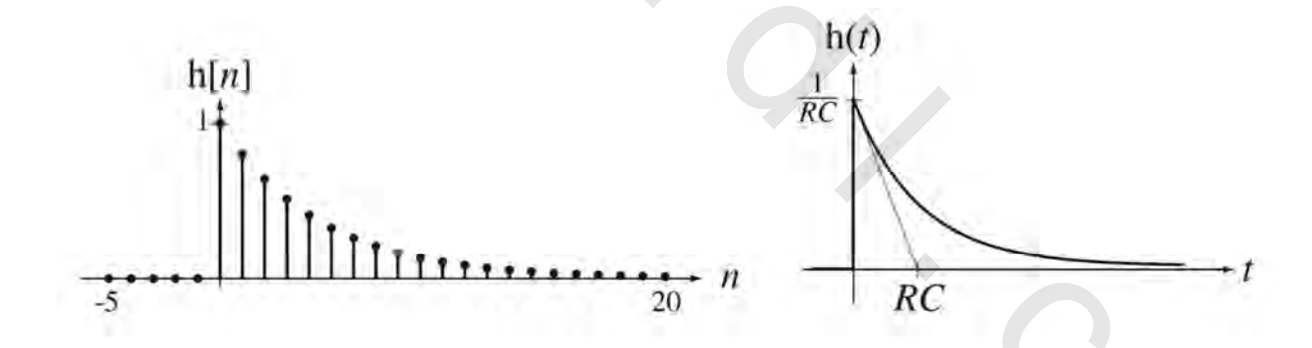


شكل رقم (١١,٧٧) استجابة الصدمة لمرشح منفذ للترددات المنخفضة.

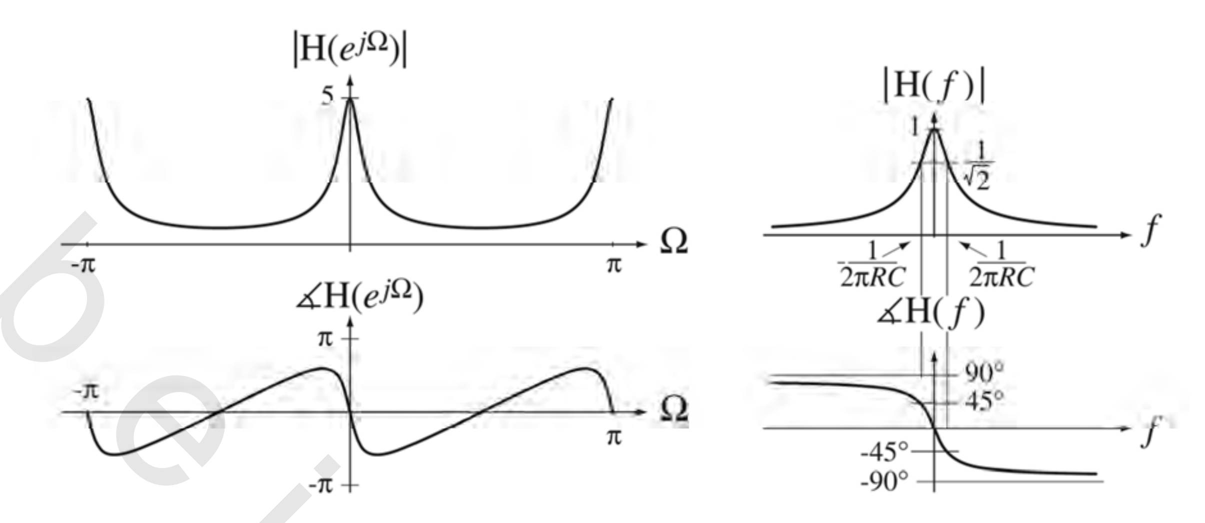


شكل رقم (١١,٧٨) الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة.

من المفيد أن نقارن استجابة الصدمة والاستجابة الترددية لهذا المرشح المنفذ للترددات المنخفضة واستجابة الصدمة والاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة. استجابة الصدمة للمرشح المتقطع زمنياً والمنفذ للترددات المنخفضة يبدو كنسخة معينة من استجابة الصدمة للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة كما في الشكل رقم (١١.٧٠). الاستجابة الترددية لكل من المرشحين لها أيضاً التشابه نفسه كما في الشكل رقم (١١.٨٠).



شكل رقم (١١,٧٩) مقارنة لاستجابة الصدمة للمرشح المتقطع زمنياً والمرشح RC المنفذين للترددات المنخفضة.



شكل رقم (١١,٨٠) الاستجابة الترددية للمرشح المتقطع زمنياً والمرشح المستمر زمنياً المنفذين للترددات المنخفضة.

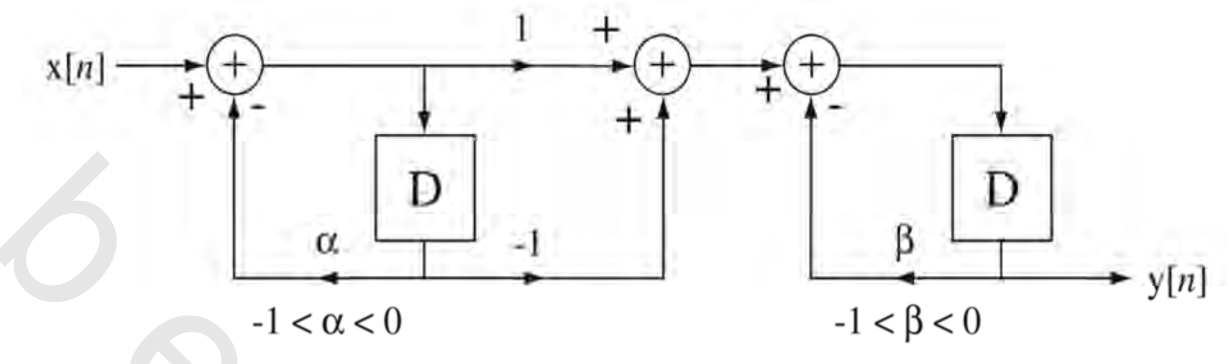
إذا قارنا أشكال مقدار وزاوية الاستجابة الترددية على المدى الترددي $-\pi<\Omega<\pi$ ، سنجد أنها تتشابه لدرجة كبيرة (المقادير تتشابه أكثر من الزوايا). ولكن الاستجابة الترددية المتقطعة زمنياً تكون دائماً دورية ولا يمكن أن تكون منفذة للترددات المنخفضة بمفهوم الاستجابة الترددية نفسه للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة. إن اسم "منفذ للترددات المنخفضة" تتطبق بدقة على سلوك الاستجابة الترددية في المدى $-\pi<\Omega<\pi$ وهذا هو المفهوم الوحيد الذي يتم معه استخدام العبارة "منفذ للترددات المنخفضة" بطريقة صحيحة مع الأنظمة المتقطعة زمنياً.

المرشحات المنفذة للترددات العالية، والمنفذة والمعوقة لمجال من الترددات

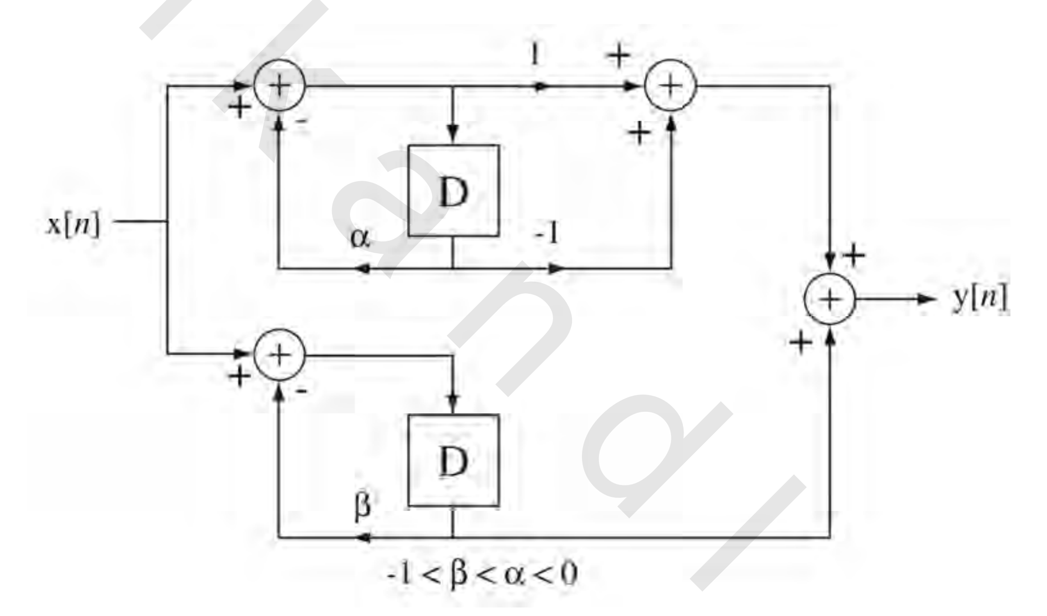
بالطبع ، يمكننا أن نصمم مرشحات متقطعة زمنياً منفذة للترددات المنخفضة ومنفذة لمجال من الترددات، كما في الشكل رقم (١١.٨١) حتى الشكل رقم (١١.٨٣). دوال العبور للمرشح المنفذ للترددات العالية ستكون :

$$H(z) = \frac{z-1}{z+a} \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}-a}$$

شكل رقم (١١,٨١) مرشح منفذ للترددات المرتفعة.



شكل رقم (١١,٨٢) مرشح منفذ لمجال من الترددات.



شكل رقم(١١,٨٣) مرشح معوق لمجال من الترددات.

وبالنسبة للمرشح المنفذ لمجال من الترددات ستكون الاستجابة الترددية كما يلي :

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{z(z-1)}{z^2+(a+\beta)z+a\beta} \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}(e^{j\Omega}-1)}{e^{j2\Omega}(a+\beta)e^{j\Omega}+a\beta}$$

بالنسبة للمرشح المعوق لمجال من الترددات ستكون الاستجابة الترددية كما يلي :

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{2z^2-(1-\beta-a)z-\beta}{z^2+(a+\beta)z+a\beta} \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{2e^{j2\Omega}-(1-\beta-a)e^{j\Omega}-\beta}{e^{j2\Omega}(a+\beta)e^{j\Omega}+a\beta}, -1<\beta<a<0$$

مثال ١١,٧

استجابة مرشح منفذ للترددات العالية لإشارة جيبية

الإشارة الجيبية التالية x[n]=5sin(2πn/18) تمثل دخلاً للمرشح المنفذ للترددات العالية الذي له دالة العبور التالية :

$$H(z)=\frac{z-1}{z-0.7}$$

ارسم الاستجابة y[n].

الاستجابة الترددية للمرشح ستكون :

$$H(e^{j\Omega})=\frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}-0.7}$$

DTFT لإشارة الدخل ستكون :

$$X(e^{j\Omega})=j5\pi[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)-\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)]$$

DTFT للخرج سيكون حاصلاً لهذين الاثنين :

$$Y(e^{j\Omega})=\frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}-0.7}\times j5\pi[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)-\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)]$$

باستخدام خاصية التكافؤ للصدمة وحقيقة أن كلاً منهما يكون دورياً بدورة مقدارها 2π :

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=j5\pi\left[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)\frac{e^{-j\pi/9}-1}{e^{-j\pi/9}-0.7}-\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)\frac{e^{-j\pi/9}-1}{e^{-j\pi/9}-0.7}\right]$$

$$Y(e^{j\Omega})=j5\pi\left[\frac{\left(e^{-j\pi/9}-1\right)\left(e^{-j\pi/9}-0.7\right)\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)-\left(e^{-j\pi/9}-1\right)\left(e^{-j\pi/9}-0.7\right)\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)}{(e^{-j\pi/9}-1)(e^{-j\pi/9}-0.7)}\right]$$

$$Y(e^{j\Omega})=j5\pi\left[\frac{\left(1.7-e^{-j\pi/9}-0.7e^{-j\pi/9}\right)\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)-\left(1.7-e^{-j\pi/9}-0.7e^{-j\pi/9}\right)\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)}{1.49-1.4cos(\pi/9)}\right]$$

$$Y(e^{j\Omega})=j28.67\pi\begin{Bmatrix}1.7[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)-\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)]\\+0.7e^{j\pi/9}\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)-e^{j\pi/9}\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)\\+e^{j\pi/9}\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)-0.7e^{j\pi/9}\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)\end{Bmatrix}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = j28.67\pi \begin{Bmatrix} 1.7[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9) - \delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)] \\ +\big(0.7cos(\pi/9) - j0.7sin(\pi/9)\big)\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9) \\ -\big(cos(\pi/9) - jsin(\pi/9)\big)\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9) \\ +\big(cos(\pi/9) - jsin(\pi/9)\big)\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9) \\ -\big(0.7cos(\pi/9) - j0.7sin(\pi/9)\big)\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9) \\ 1.7\big(1-cos(\pi/9)\big)[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9) - \delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)] \\ j0.3sin(\pi/9)[\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9) - \delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)] \end{Bmatrix}$$

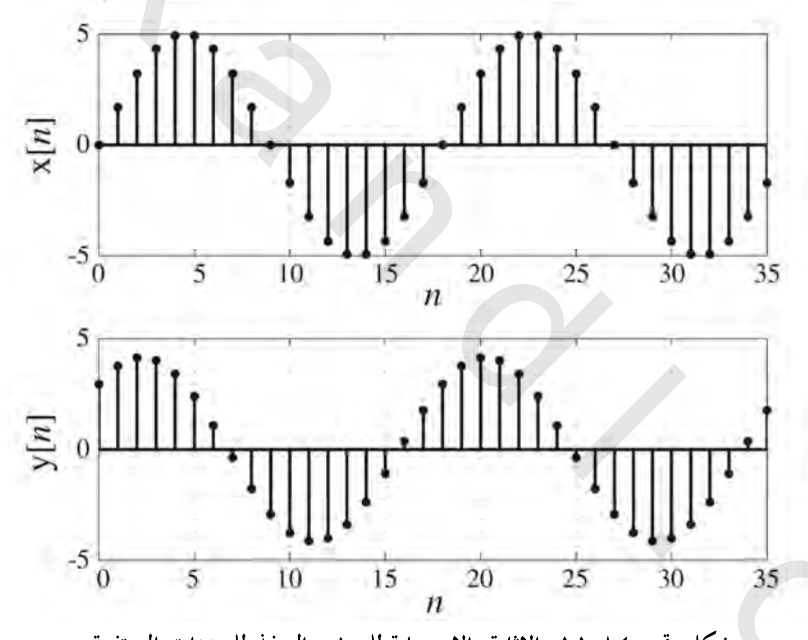
$$Y(e^{j\Omega}) = j28.67\pi \begin{Bmatrix} 1.7\big(1-cos(\pi/9)\big)[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9) - \delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)] \\ j0.3sin(\pi/9)[\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9) - \delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)] \end{Bmatrix}$$

بأخذ التحويل العكسي :

$$y[n] = 28.67 \times 1.7\big(1-cos(\pi/9)\big)sin(2\pi n/18) + 28.67 \times 0.3sin(\pi/9)cos(2\pi n/18)$$

$$y[n] = 2.939sin(2\pi n/18) + 2.939cos(2\pi n/18) = 4.158sin(2\pi n/18 + 0.786)$$

الشكل رقم (١١.٨٤) يوضح الإثارة والاستجابة لهذا المرشح.



شكل رقم (١١.٨٤) الإثارة والاستجابة للمرشح المنفذ للترددات المرتفعة.

مثال ١١,٨

تأثيرات المرشحات على أمثلة من الإشارات

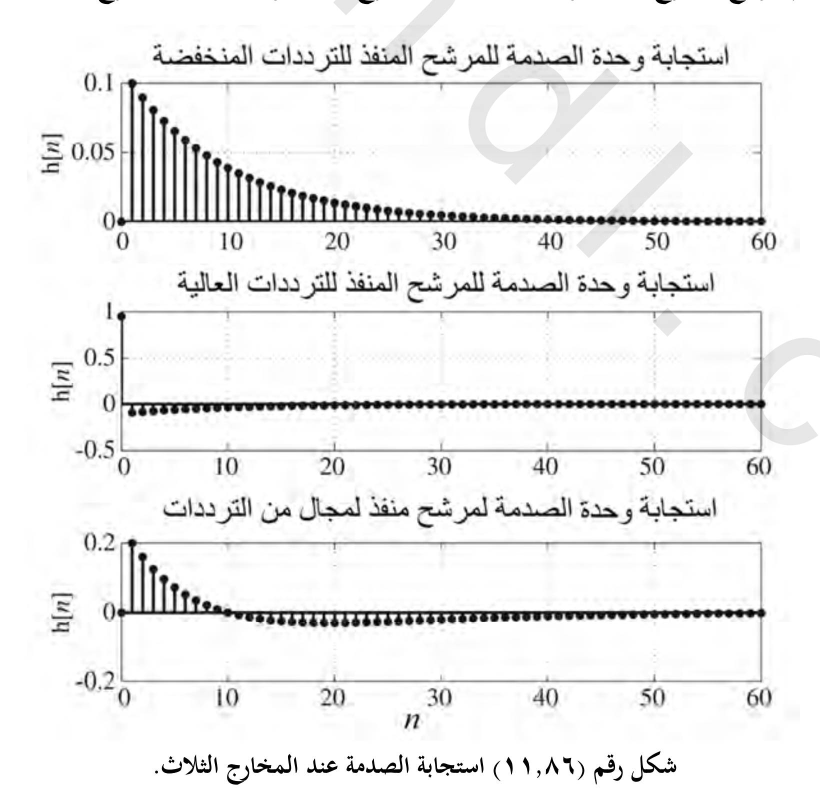
اختبر المرشح الموجود في الشكل رقم (١١.٨٥) باستخدام إشارات وحدة صدمة، ووحدة تتابع، وإشارة عشوائية لتوضح تأثيرات هذا المرشح عند المخارج الثلاثة :

$$H_{LP}(e^{j\Omega}) = \frac{Y_{LP}(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{0.1}{1 - 0.9e^{-j\Omega}}$$

$$H_{HP}(e^{j\Omega}) = \frac{Y_{HP}(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = 0.95\frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - 0.9e^{-j\Omega}}$$

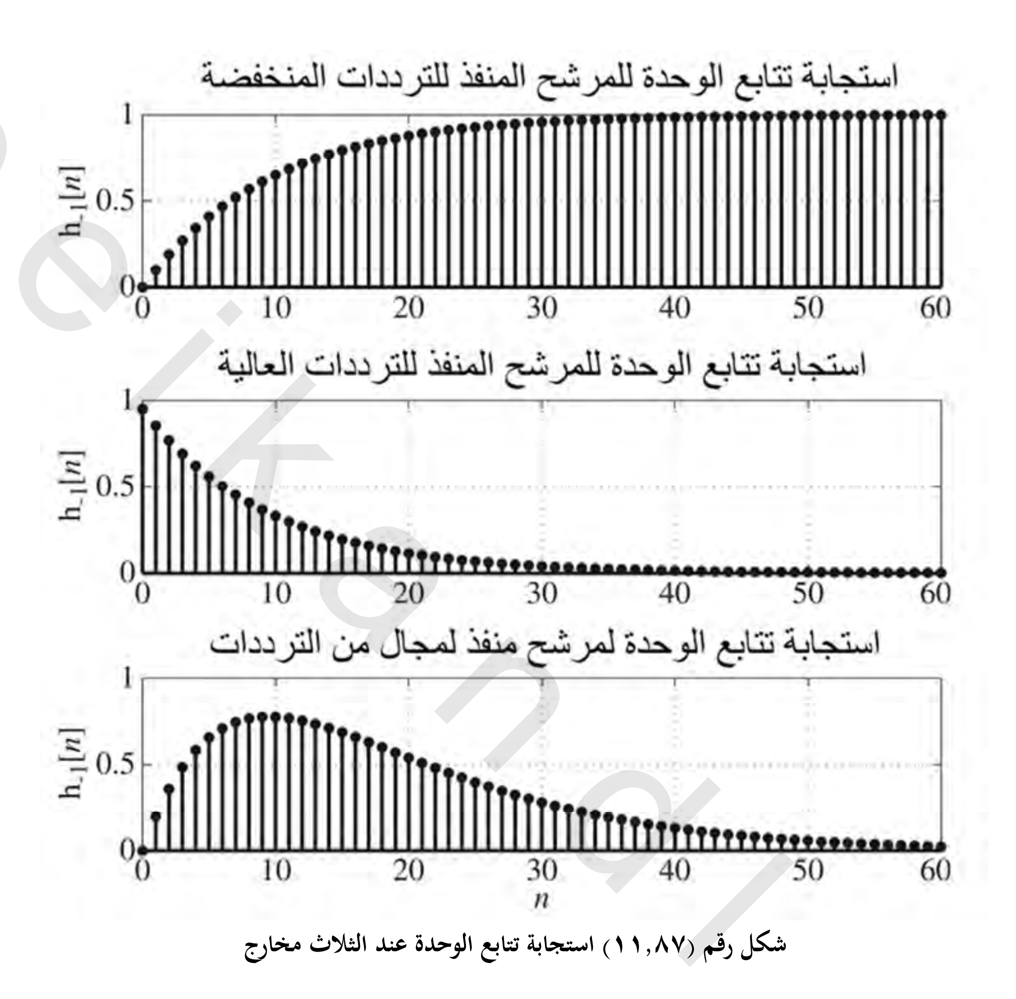
$$H_{BP}(e^{j\Omega}) = \frac{Y_{BP}(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = 0.2\frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - 1.8e^{-j\Omega} + 0.81e^{-j2\Omega}}$$

شكل رقم (١١,٨٥) مرشح له خرج منفذ للترددات المنخفضة، وخرج منفذ للترددات العالية، وخرج منفذ لمجال من الترددات.



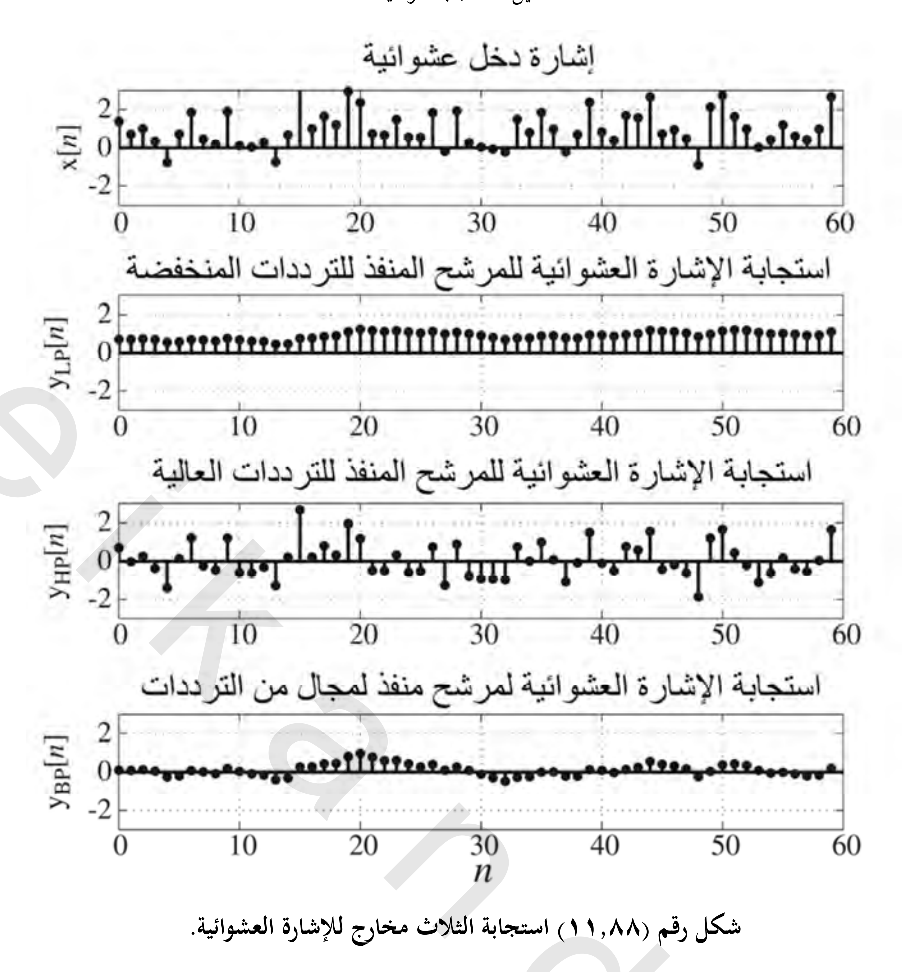
شكل رقم (١١,٨٦) استجابة الصدمة عند المخارج الثلاث.

لاحظ في الشكل (١١.٨٦) أن مجموع الاستجابات الصدمية تكون صفراً لأن الاستجابة الترددية تساوي صفراً عند Ω=0.



شكل رقم (١١,٨٧) استجابة تتابع الوحدة عند الثلاث مخارج

استجابة المرشح المنفذ للترددات المنخفضة لتتابع الوحدة كما في الشكل رقم (١١.٨٧) تتقارب من قيمة لا نهائية غير مساوية للصفر؛ لأن المرشح يمرر القيمة المتوسطة لتتابع الوحدة. استجابات تتابع الوحدة للمرشح المنفذ للترددات المرتفعة ولمجال من الترددات كليهما يقترب من الصفر. أيضاً فإن استجابة المرشح المنفذ للترددات المرتفعة يقفز فجأة عند تطبيق تتابع الوحدة ولكن المرشح المنفذ للترددات المنخفضة والمنفذ لمجال من الترددات، يتجاوب كل منهما ببطء كبير، مما يعني أنهما لا يسمحان بمرور الترددات العالية.



شكل رقم (١١,٨٨) استجابة الثلاث مخارج للإشارة العشوائية.

إشارة خرج المرشح المنفذ للترددات المنخفضة كما في الشكل رقم (١١.٨٨) هي نسخة منعمة من إشارة الدخل. المحتويات سريعة التغير (الترددات العالية) قد تم التخلص منها عن طريق المرشح. استجابة المرشح المنفذ للترددات المرتفعة لها قيمة متوسطة تساوي الصفر، وكل التغيرات السريعة في إشارة الدخل تظهر في الخرج أيضاً كتغيرات سريعة. المرشح المنفذ لمجال من الترددات يتخلص من القيمة المتوسطة للإشارة ويعمل أيضاً على تنعيمها بدرجة ما؛ لأنه يتخلص من كل من الترددات المنخفضة جداً والترددات المرتفعة جداً.

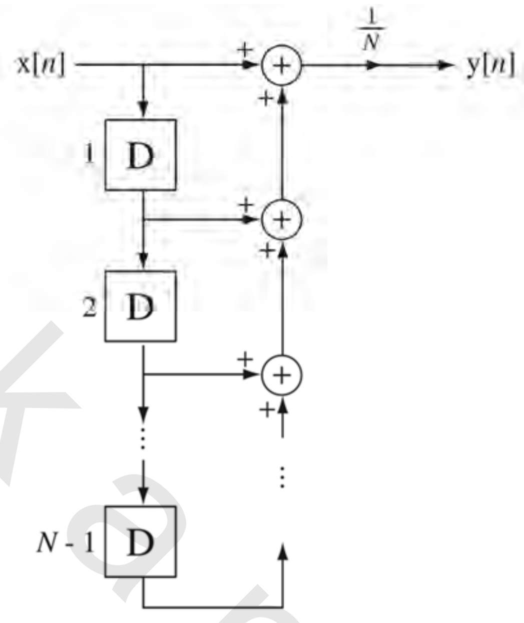
مرشح المتوسط المتحرك

من أنواع المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة، الذي يعرض لنا بعض أساسيات تصميم المرشحات المتقطعة زمنياً وتحليلها هو مرشح المتوسط المتحرك، كما في الشكل رقم (١١.٨٩). المعادلة الفرقية التي تصف هذا المرشح، هي كما يلي:

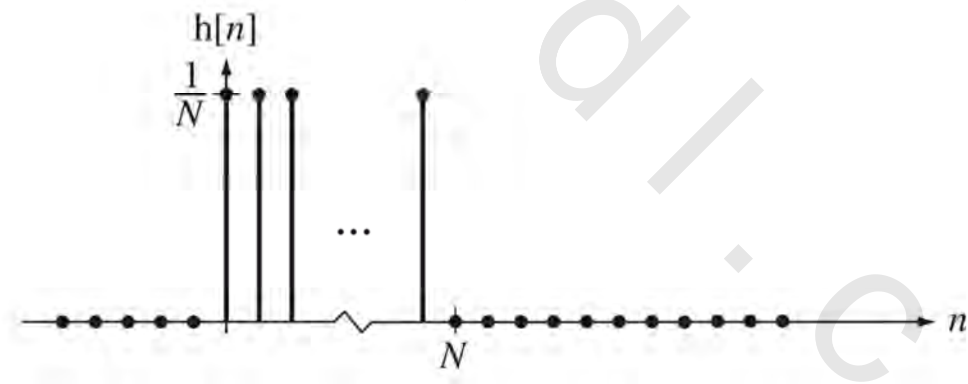
$$y[n] = \frac{X[n] + X[n-1] + X[n-2] + \cdots + X[n-(n-1)]}{\mathrm{N}}$$

واستجابة الصدمة له ستكون كما يلي وكما هو موضح في الشكل رقم (١١.٩٠):

$$h[n] = (u[n] - u[n-N])/\mathrm{N}$$



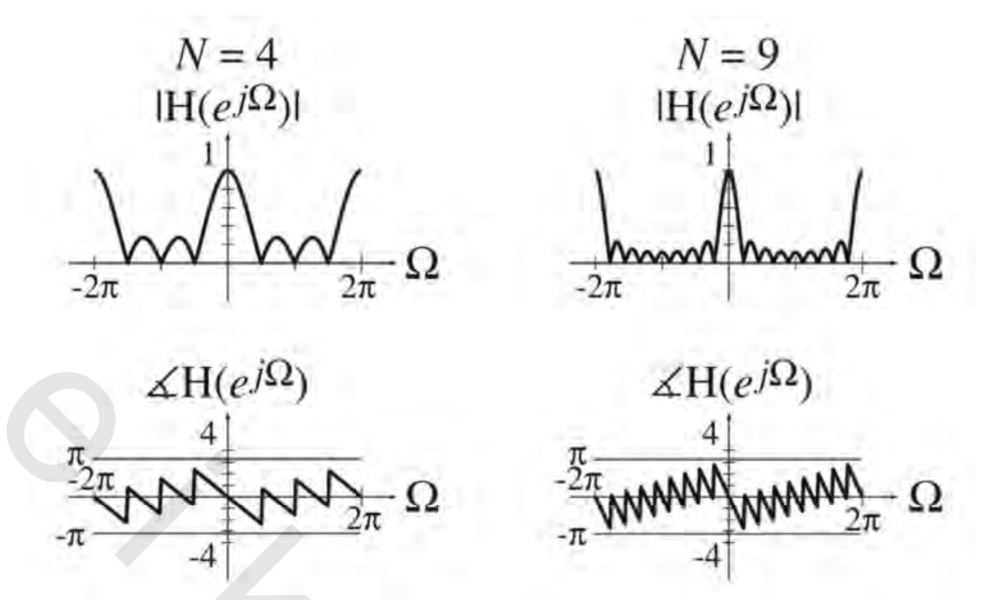
شكل رقم (١١,٨٩) مرشح المتوسط المتحرك.



شكل رقم (١١,٩٠) استجابة الصدمة لمرشح المتوسط المتحرك

الاستجابة الترددية لهذا المرشح، ستكون كما يلي وكما هو موضح في الشكل رقم (١١.٩١):

$$\mathrm{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\mathrm{N}-1)\Omega/2}}{\mathrm{N}} \frac{\sin(\mathrm{N}\Omega/2)}{\sin(\mathrm{N}\Omega/2)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\mathrm{N}-1)\Omega/2}\mathrm{drcl}(\Omega/2\pi, \mathrm{N})$$



شكل رقم (١١,٩١) الاستجابة الترددية لمرشح المتوسط المتحرك لقيمتين مختلفتين لزمن إجراء المتوسط

هذا المرشح يوصف عادة بأنه مرشح تنعيم ؛ لأنه عادة يعمل على إضعاف ، أو توهين الترددات العالية ، وهذا يتفق مع كونه مرشحاً منفذاً للترددات المنخفضة. على الرغم من ذلك ، فإنه بملاحظة الأصفار في مقدار الاستجابة الترددية فإن البعض قد يسميه مرشحاً معوقاً لمجال من الترددات متعدد المجالات. وهذا يوضح أن تصنيف أي مرشح كمرشح منفذ للترددات المنخفضة أو الترددات العالية أو لمجال من الترددات أو معوق لمجال من الترددات لا يكون واضحا في الغالب. ولكن نتيجة الاستخدام الشائع لهذه المرشح في تنعيم مجموعة من البيانات ، فإنه يصنف عادة كمرشح منفذ للترددات المنخفضة.

مثال ١١,٩

ترشيح نبضة باستخدام مرشح المتوسط المتحرك

مطلوب ترشيح الإشارة x[n]=u[n]-u[n-9] :

(أ) باستخدام مرشح المتوسط المتحرك باستخدام N=6

(ب) باستخدام المرشح المنفذ لمجال من الترددات في الشكل رقم (١١.٨٢) مع اعتبار α=0.8 و β=0.5.

باستخدام ماتلاب ، ارسم استجابة الحالة صفر y[n] من كل مرشح.

استجابة الحالة صفر هي الالتفاف بين استجابة الصدمة مع الدخل. استجابة الصدمة لمرشح المتوسط المتحرك هي :

$$h[n] = (1/6)(u[n] - u[n-6])$$

والاستجابة الترددية للمرشح المنفذ لمجال من الترددات، هي :

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - 1.3e^{-j\Omega} + 0.4e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j\Omega}} \times \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

لذلك ستكون استجابة الصدمة له كما يلي :

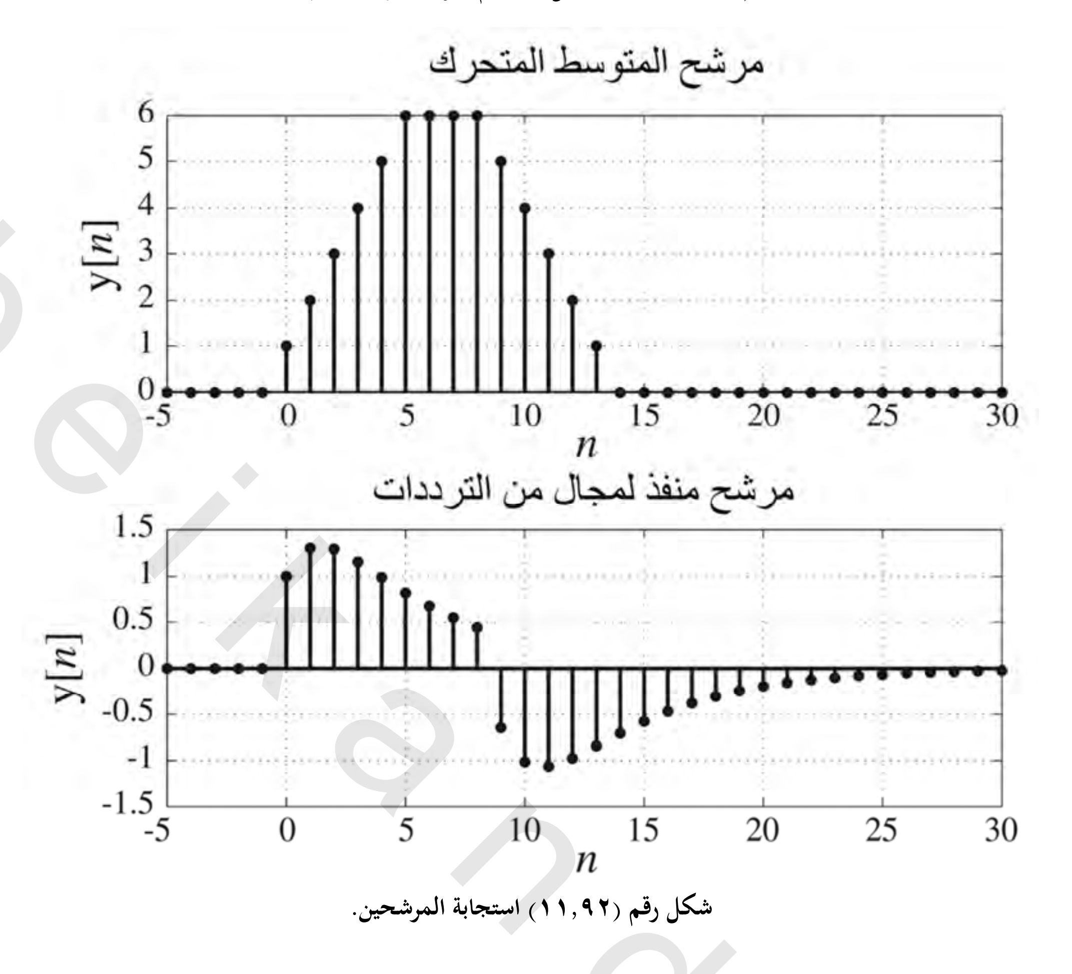
$$h[n] = (0.8)^n u[n] * \{(0.5)^n u[n] - (0.5)^{n-1} u[n-1]\}$$

برنامج ماتلاب سيكون ملف سكربت أساسياً ينادي على دالة تسمى convD تجري الالتفاف المتقطع زمنياً.

```
برنامج لرسم استجابة مرشح المتوسط المتحرك ومرشح متقطع زمنياً منفذ لمجال من الترددات %
لنبضة مستطيلة %
close all ; % إغلاق كل نوافذ الرسم المفتوحة
figure('Position',[20,20,800,600]) ; % فتح نافذة رسم جديدة
n = [-5:30]' ; % وضع متجه زمني للاستجابة
x = uD(n) - uD(n-9) ; % متجه الدخل
استجابة مرشح المتوسط المتحرك%
h = uD(n) - uD(n-6) ; % استجابة الصدمة لمرشح المتوسط المتحرك
[y,n] = convDT(x,n,h,n,n) ; % خرج مرشح المتوسط المتحرك
رسم هذا الخرج %
subplot(2,1,1) ; p = stem(n,y,'k','fi lled') ;
set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ; grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',18) ;
ylabel('y[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',18) ;
title('Moving-Average Filter','FontName','Times','FontSize',24) ;
استجابة المرشح المنفذ لمجال من الترددات %
حساب استجابة الصدمة للمرشح المنفذ لمجال من الترددات %
h1 = 0.8.^n.*uD(n) ; h2 = 0.5.^n.*uD(n) - 0.5.^(n-1).*uD(n-1) ;
[h,n] = convD(h1,n,h2,n,n) ;
[y,n] = convD(x,n,h,n,n) ; % خرج المرشح المنفذ لمجال من الترددات
رسم الخرج %
subplot(2,1,2) ; p = stem(n,y,'k','fi lled') ; set(p,'LineWidth',2,'
MarkerSize',4) ; grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',18) ;
ylabel('y[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',18) ;
title('Bandpass Filter','FontName','Times','FontSize',24) ;
```

```
دالة لأداء الالتفاف المتقطع زمنياً على إشارتين %
وتعطي الالتفاف عند أزمنة متقطعة محددة. الإشارتان هما متجهاً أعمدة %
وأزمنتهما محددة في متجهي الأعمدة ,x1, x2 %
الأزمنة المتقطعة التي نريد حساب الالتفاف عندها هي متجه العمود.n1, n2 %
متجه الالتفاف الناتج سيكون متجه العمود.n12 %
وزمنه سيكون في متجه العمود ,x12 %
إذا كان المتجه.n12 %
غير موجود في النداء على الدا، لة فإنه يتولد في الدالة n12 %
كزمن كلي يتم تحديده بمتجهات الأزمنة المنفردة %
%
% [x12,n12] = convD(x1,n1,x2,n2,n12)
function [x12,n12] = convD(x1,n1,x2,n2,n12)
إجراء الالتفاف على المتجهين باستخدام الدالة الضمنية في ماتلاب %conv
xtmp = conv(x1,x2) ;
وضع متجه مؤقت للأزمنة لعملية الالتفاف اعتماداً على متجهات أزمنة الدخل %
ntmp = n1(1) + n2(1) + [0:length(n1)+length(n2)-2]' ;
وضع الزمن الأول والأخير في المتجه المؤقت %
nmin = ntmp(1) ; nmax = ntmp(length(ntmp)) ;
if nargin < 5, %ntmp إذا لم يتحدد متجه زمن الدخل استخدم
x12 = xtmp ; n12 = ntmp ;
else
إذا تم تحديد متجه الزمن، احسب الالتفاف عند هذه الأزمنة %
x12 = 0*n12 ; % ابدأ خرج الالتفاف بصفر
أوجد مؤشرات الأزمنة المطلوبة التي تقع بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى في متجه الزمن المؤقت %
I12intmp = find(n12 >= nmin & n12 <= nmax) ;
حول هذه المؤشرات إلى المؤشرات التي في متجه الزمن المؤقت %
Itmp = (n12(I12intmp) - nmin) + 1 ;
استبدل قيم الالتفاف عند هذه الأزمنة بهذه الأزمنة في متجه الزمن المطلوب %
x12(I12intmp) = xtmp(Itmp) ;
end
```

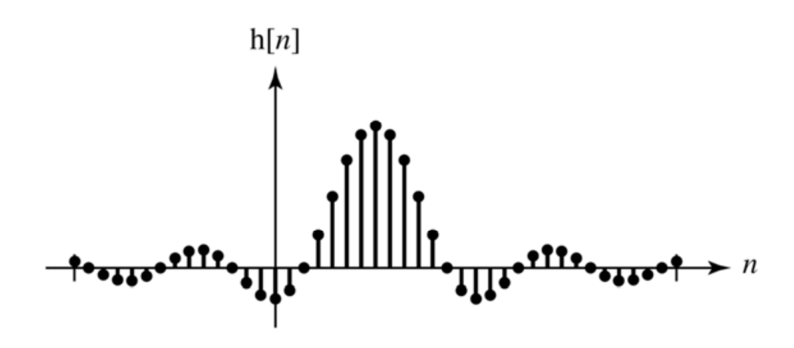
المخططات الناتجة موضحة في الشكل رقم (١١.٩٢).



شكل رقم (١١,٩٢) استجابة المرشحين.

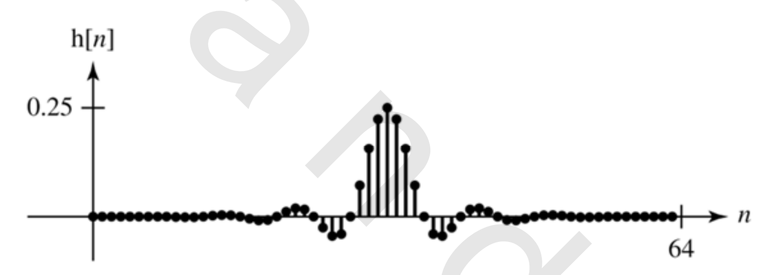
المرشح المنفذ للترددات المنخفضة القريب من المثالية

إذا كنا نريد الاقتراب من أداء النطاق الترددي للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة ، فإنه علينا تصميم مرشح متقطع زمنياً له استجابة صدمة تقارب بدرجة كبيرة تحويل الـ DTFT العكسي للاستجابة الترددية المثالية. لقد وضحنا مسبقاً أن المرشح المنفذ للترددات المنخفضة يكون غير سببي ولا يمكن تحقيقه عملياً ، ولكن على الرغم من ذلك ، فإننا يمكننا الاقتراب منه بدرجة كبيرة. الاستجابة الترددية للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة موضحة في الشكل رقم (١١.٩٣).

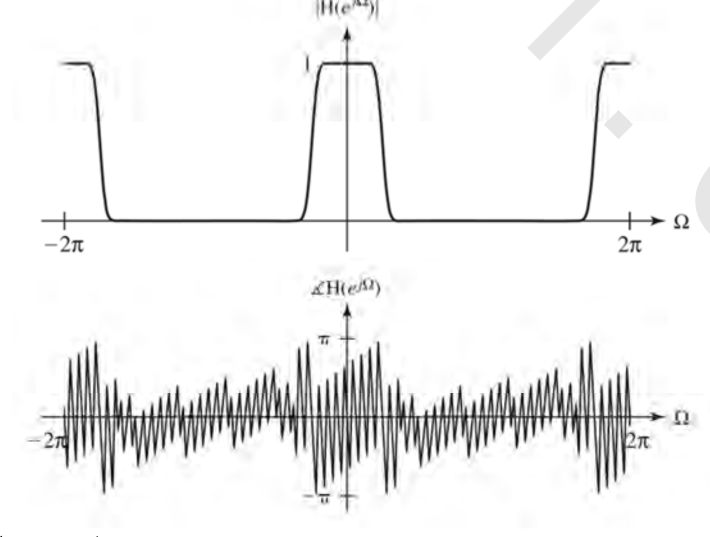


شكل رقم (١١,٩٣) استجابة الصدمة لمرشح مثالي متقطع زمنياً منفذ للترددات المنخفضة.

المشكلة في بناء هذا المرشح هي الجزء من استجابة الصدمة التي تحدث قبل الزمن n=0. إذا حاولنا تأخير استجابة الصدمة بفترة زمنية كبيرة، فإن طاقة الإشارة من استجابة الصدمة التي تقع قبل الزمن n=0 ستصبح صغيرة جداً ويمكننا الاستغناء عنها والاقتراب بدرجة كبيرة من الاستجابة الترددية المثالية، كما في الشكل رقم (١١.٩٤) والشكل رقم (١١.٩٥).

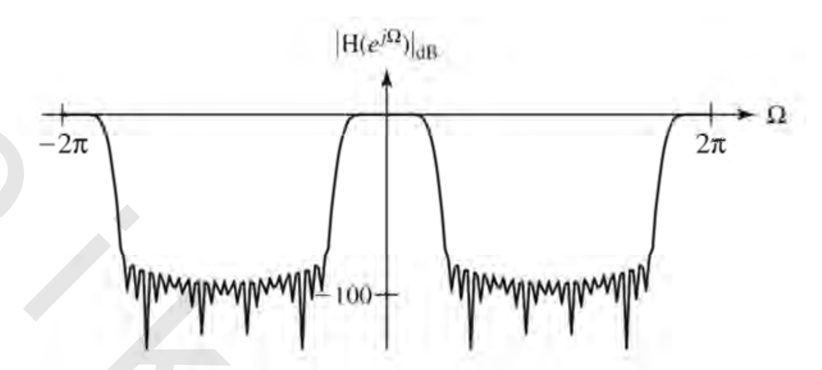


شكل رقم (١١.٩٤) استجابة الصدمة لمرشح منفذ للترددات المنخفضة متقطع زمنياً قريب جداً من المثالية



شكل رقم (١١,٩٥) الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة متقطع زمنياً قريب جداً من المثالية.

مقدار الاستجابة في مجال الإعاقة صغير جداً بحيث لا يمكن رؤيته عند رسمه على التدريج الخطي كما في الشكل رقم (١١.٩٥). في مثل هذه الحالات، فإن رسم لوغريتم المقدار يكون أفضل ويساعد في رؤية المقدار الضعيف في مجال الإعاقة كما في الشكل رقم (١١.٩٦).



شكل رقم (١١,٩٦) الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة متقطع زمنياً وقريب من المثالية مرسوم على تدريج بال dB.

هذا المرشح له مقدار استجابة ظريف منفذة للترددات المنخفضة ولكن ذلك يكون بتكلفة. علينا الانتظار لهذا المرشح لكي يستجيب. اقترب المرشح من المثالية، كان زمن التأخير المطلوب في استجابة الصدمة أكبر. يتضح ذلك في زمن التأخير لاستجابة الصدمة والإزاحة الزاوية للاستجابة الترددية. إن حقيقة أن زمن التأخير يكون كبيراً للمرشحات التي تقترب من المثالية يكون حقيقي أيضاً لباقي أنواع المرشحات مثل المنفذة للترددات المرتفعة والمنفذة لمجال من الترددات والمعوقة لمجال من الترددات وهو حقيقي لكل من المرشحات المستمرة والمتقطعة زمنياً. من أساسيات التصميم العامة للمرشحات، أن أي مرشح يتم تصميمه ليكون قادراً بين ترددين متقاربين ويسمح بمرور أحدها ويعوق الأخرى يجب أن يلاحظهم لفترة زمنية طويلة لكي يكون قادر على تمييز واحدة منهما. كلما كان الترددان متقاربين، كان زمن الملاحظة من المرشح أطول لكي يستطيع التمييز بينهما. وهذا هو السبب الأساسي لمتطلبات زمن التأخير الكبير في استجابة المرشح لكي يقترب من الحالة المثالية.

المميزات بالمقارنة مع المرشحات المستمرة زمنياً

قد يتعجب البعض لماذا علينا أن نستخدم المرشحات المتقطعة زمنياً بدلاً من المرشحات المستمرة زمنياً. هناك العديد من الأسباب لذلك. المرشحات المتقطعة زمنياً تكون مبنية من ثلاثة عناصر أساسية: عنصر تأخير، ضارب، وجامع. يمكن تنفيذ هذه العناصر باستخدام المكونات الرقمية. طالما أننا نظل في المدى المقصود للتشغيل، فإن هذه الأجهزة تقوم بأداء مهمتها نفسها بدقة. لا يمكننا أن نقول نفس الشيء على مكونات مثل المقاومات، أو المكثفات، أو مكبرات العمليات التي تستخدم في تركيب المرشح المستمر زمنياً. أي مقاومة يكون لها قيمة أسمية معينة لا يمكن

أن تكون قيمتها الحقيقية هي هذه القيمة الأسمية نفسها ، لأن التأثيرات الحرارية أو الوسط المحيط بها من الممكن أن يغير من قيمتها. الشيء نفسه من الممكن أن يقال عن المكثفات، والملفات، والترانزستورات، وهكذا. لذلك فإن المرشحات المتقطعة زمنياً تكون أكثر استقراراً وقابلة لإعادة الإنتاجية أكثر من المرشحات المستمرة زمنياً.

عادة يكون من الصعب تنفيذ المرشحات المستمرة زمنياً عند الترددات المنخفضة جداً ؛ لأن حجم المكونات المستخدمة يصبح كبيراً جداً، لأنه مثلاً قد نحتاج قيم مكثفات عالية جدا. أيضاً، عند الترددات المنخفضة جدا فإن التأثيرات الحرارية على المكونات تصبح مشكلة كبيرة جداً، لأنها لا يمكن تفريقها من تأثيرات تغير الإشارة في المدى الترددي نفسه. المرشحات المتقطعة زمنياً لا تعاني من هذه المشكلة.

المرشحات المتقطعة زمنياً يتم تنفيذها عادة باستخدام مكونات قابلة للبرمجة، وهذا يعني أن هذا النوع من المرشحات المتقطعة زمنياً يمكن إعادة برمجتها لأداء وظيفة أخرى بدون تغيير هذه المكونات. المرشحات المستمرة زمنياً ليس لها هذه المرونة. أيضاً، فإن بعض أنواع المرشحات المتقطعة زمنياً تكون متطورة حسابياً بدرجة كبيرة بحيث لا يمكن تنفيذها عمليا مثل المرشحات المستمرة زمنياً.

الإشارات المتقطعة زمنياً يمكن تخزينها بكفاءة لأزمنة طويلة جداً بدون أي تدهور ملحوظ على شريط التسجيل أو الـ CD-ROM. الإشارات المستمرة زمنياً يمكن تخزينها على شريط مغناطيسي تماثلي ولكن مع مرور الزمن تتدهور هذه القيم.

عن طريق التعدد أو الاختيار الزمني للإشارات، فإن المرشح الواحد يمكنه أن يستوعب العديد من الإشارات بطريقة تبدو كما لو كان يتعامل مع هذه الإشارات في الوقت وبنفس الكفاءة نفسها. لا يمكن للمرشحات المستمرة زمنياً أن تفعل ذلك لأنها لكي تعمل بطريقة صحيحة، فإنها تتطلب وجود إشارة الدخل بصورة دائمة.

(١١,٥) ملخص للنقاط المهمة

١- الاستجابة الترددية واستجابة الصدمة للأنظمة LTI تتعلق ببعضها بعضاً من خلال تحويل فورير.

٢- توصيف الأنظمة في النطاق الترددي يسمح بخطوات تصميم عامة للأنظمة لمعالجة أنواع معينة من الإشارات.

٣- المرشح المثالي يكون خالياً من التشويه في مجال المرور أو السماح الخاص به.

٤- كل المرشحات المثالية تكون غير سببية ولذلك لا يمكن بناؤها.

٥- طرق الترشيح يمكن تطبيقها على الصور مثل الإشارات.

٦- المرشحات العملية المتقطعة زمنياً يمكن بناؤها كأنظمة متقطعة زمنياً باستخدام المكبرات، ونقاط تجميع، وأزمنة التأخير فقط.

٧- كل الأفكار المطبقة على المرشحات المستمرة زمنياً يمكن تطبيقها على المرشحات المتقطعة زمنياً بالطريقة نفس.

٨- المرشحات المتقطعة زمنياً لديها مميزات على المرشحات المستمرة زمنياً.

تمارين وإجاباتها

(في كل تمرين، تكون الإجابات مدونة بطريقة عشوائية)

الاستجابة الترددية المستمرة زمنياً

١- نظام له استجابة الصدمة التالية :

$$h_1(t) = 3e^{-10t}\, u(t)$$

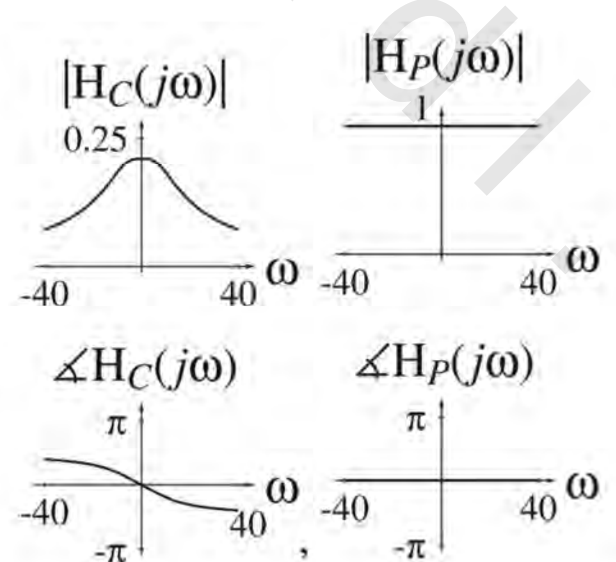
ونظام آخر له استجابة الصدمة التالية :

$$h_2(t) = \delta(t) - 3e^{-10t}\, u(t)$$

(أ) ارسم مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لهذين النظامين عند توصيلهما على التوازي.

(ب) ارسم مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لهذين النظامين عند توصيلهما على التوالي.

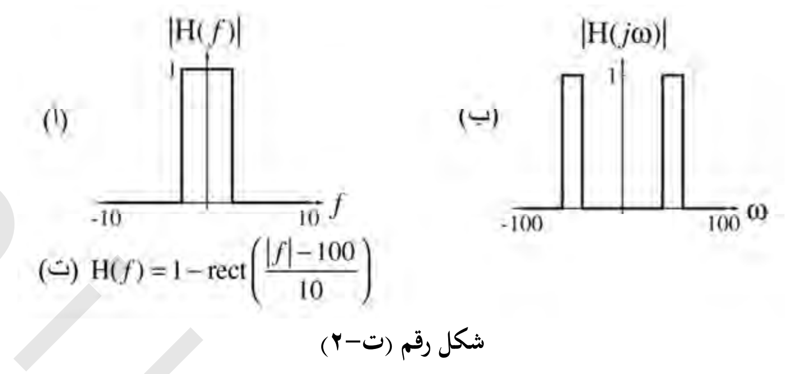
الإجابة :



شكل رقم (ج–ت١)<

المرشحات المثالية المستمرة زمنياً

٢- صنف الاستجابات الترددية في الشكل رقم (ت- ٢) على أنها منفذة للترددات المنخفضة، أم منفذة للترددات المرتفعة، أم منفذة لمجال من الترددات، أم معوقة لمجال من الترددات.



شكل رقم (ت-٢)

الإجابة:

واحدة منفذة للترددات المنخفضة — وواحدة منفذة لمجال من الترددات — وواحدة معوقة لمجال من الترددات.

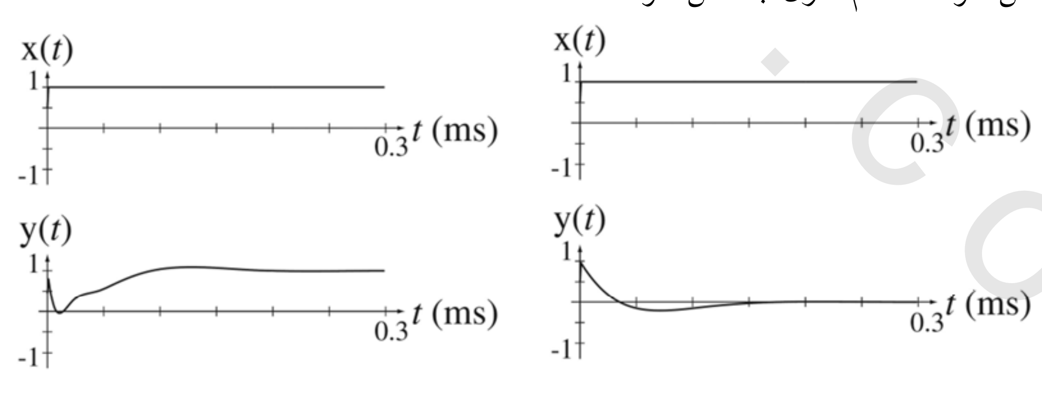
٣- نظام له استجابة الصدمة التالية:

$$h(t) = 10rect\,\frac{t-0.01}{0.02}$$

ما هو عرض المجال الصفري له ؟

الإجابة: 50

٤- في الشكل رقم (ت- ٤) أزواج من إشارات الدخل وإشارات الخرج. لكل زوج حدد نوع الذي تم على إشارة الدخل: هل هو ترشيح منفذ للترددات المنخفضة، أم منفذ للترددات العالية، أم منفذ لمجال من الترددات، أم معوق لمجال من الترددات.



شكل رقم (ت-٤)

الإجابة: أحدهما منفذ للترددات العالية والآخر معوق لمجال من الترددات.

السببية المستمرة زمنياً

٥- حدد إذا كانت الأنظمة التي لها الاستجابات الترددية التالية سببية :

(أ) $H(f) = sinc(f)$

(ب) $H(f) = sinc(f)e^{-j\pi t}$

(ت) $H(f) = rect(\omega)$

(ث) $H(f) = rect(\omega)e^{-j\omega}$

(ج) $H(f) = A$

(ح) $H(f) = Ae^{j2\pi t}$

الإجابة : اثنان سببية – وأربعة أنظمة غير سببية

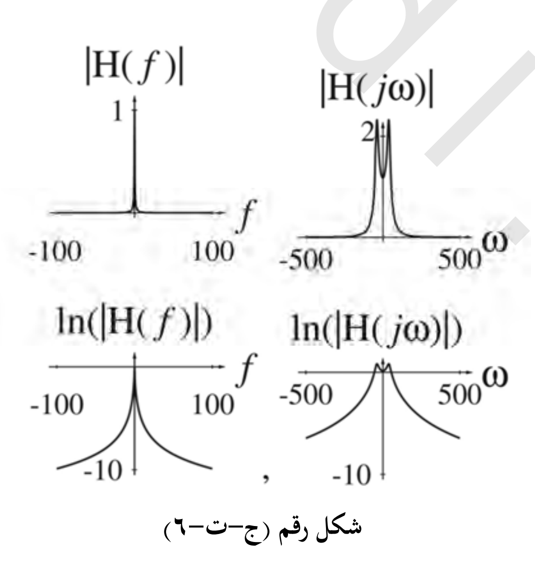
الرسم اللوغاريتمي ومخططات بود

٦- ارسم مقدار الاستجابة الترددية، على تدريج خطي وعلى تدريج لوغاريتمي، للأنظمة التي لها الاستجابات الترددية التالية وعلى المدى الترددي الموضح في كل حالة :

(أ) $H(f) = \frac{20}{20-4\pi^2 f^2+j42\pi f}, -100 < f < 100$

(ب) $H(j\omega) = \frac{2\times10^5}{(100+j\omega)(1700-\omega^2+j20\omega)}, -500 < \omega < 500$

الإجابة :

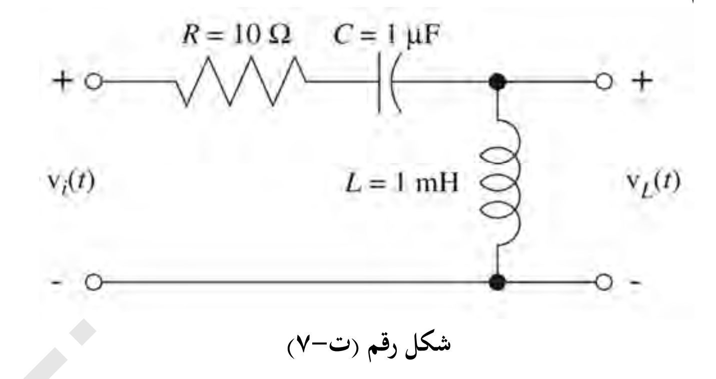


شكل رقم (ج–ت–٦)

٧- ارسم خطوط التقارب ومخططات بود الدقيقة للمقدار والزاوية للاستجابات الترددية للدوائر والأنظمة التالية :

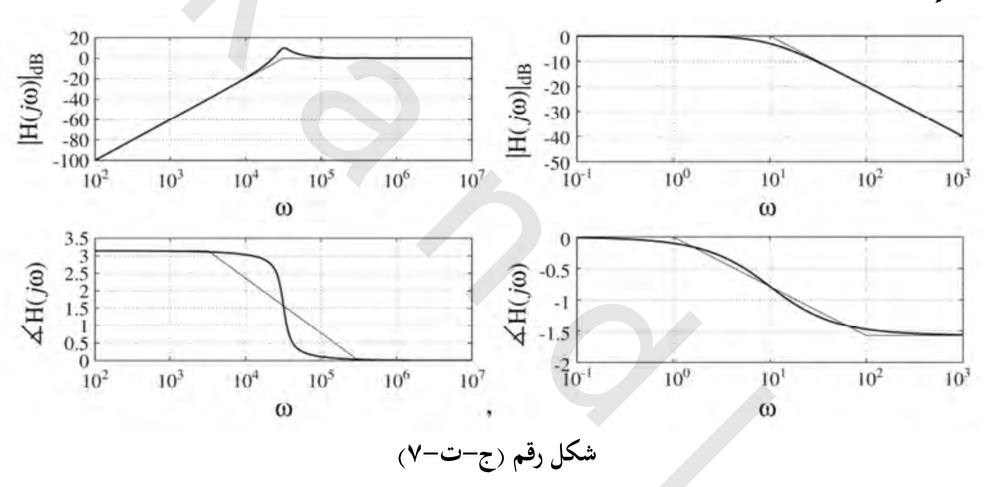
(أ) مرشح RCمنفذ للترددات المنخفضة مع R=1MΩ و C=0.1μF

الدائرة التي في الشكل رقم ٧



شكل رقم (ت–٧)

الإجابة:

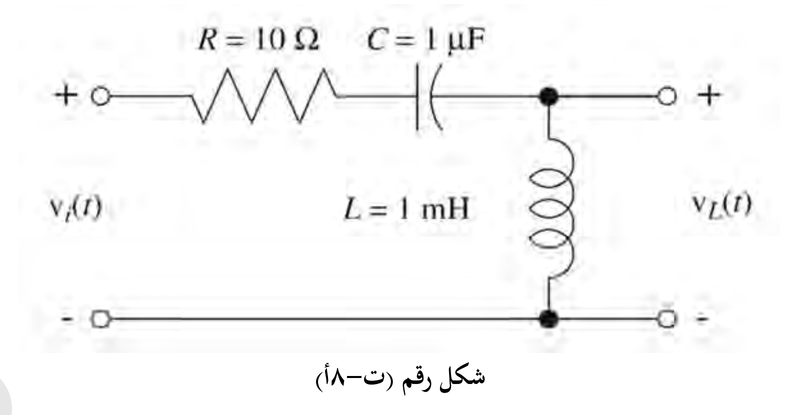


شكل رقم (ج–ت–٧)

المرشحات غير الفعالة المستمرة زمنياً

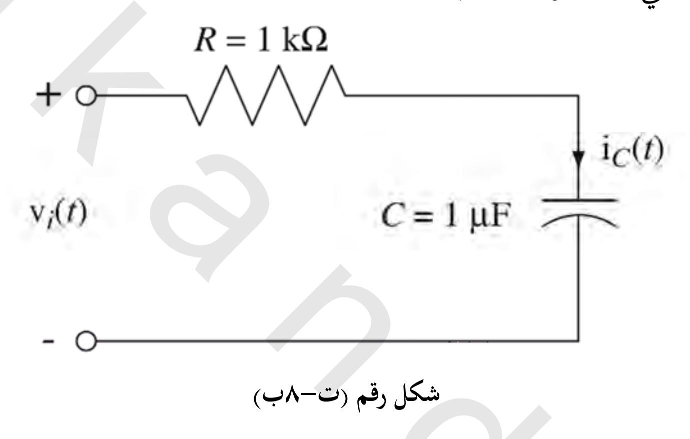
٨- أوجد وارسم الاستجابة الترددية لكل من الدوائر الموجودة في الشكل رقم (ت- ٨) بمعلومية الإثارة والاستجابة الموضحة في كل حالة:

(أ) الإثارة هي $v_i(t)$، والاستجابة هي $v_L(t)$



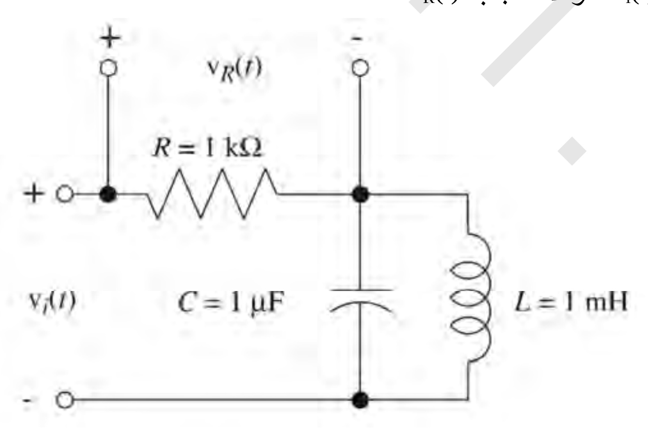
شكل رقم (ت–٨أ)

(ب) الإثارة هي $v_i(t)$، والاستجابة $i_c(t)$



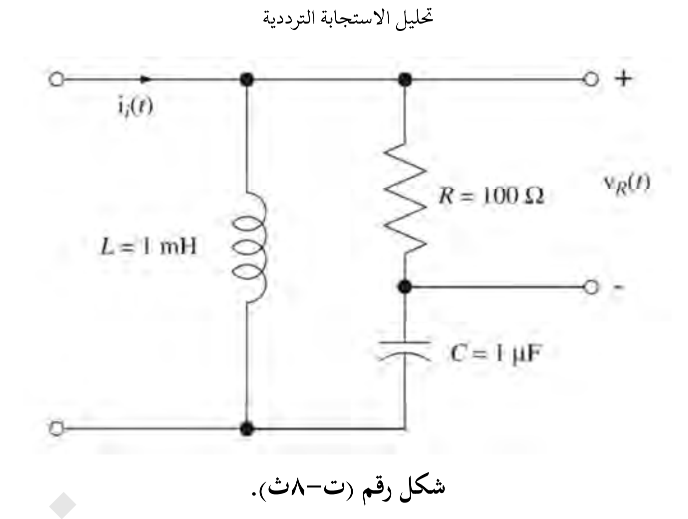
شكل رقم (ت–٨ب)

(ت) الإثارة $v_i(t)$، والاستجابة $v_R(t)$



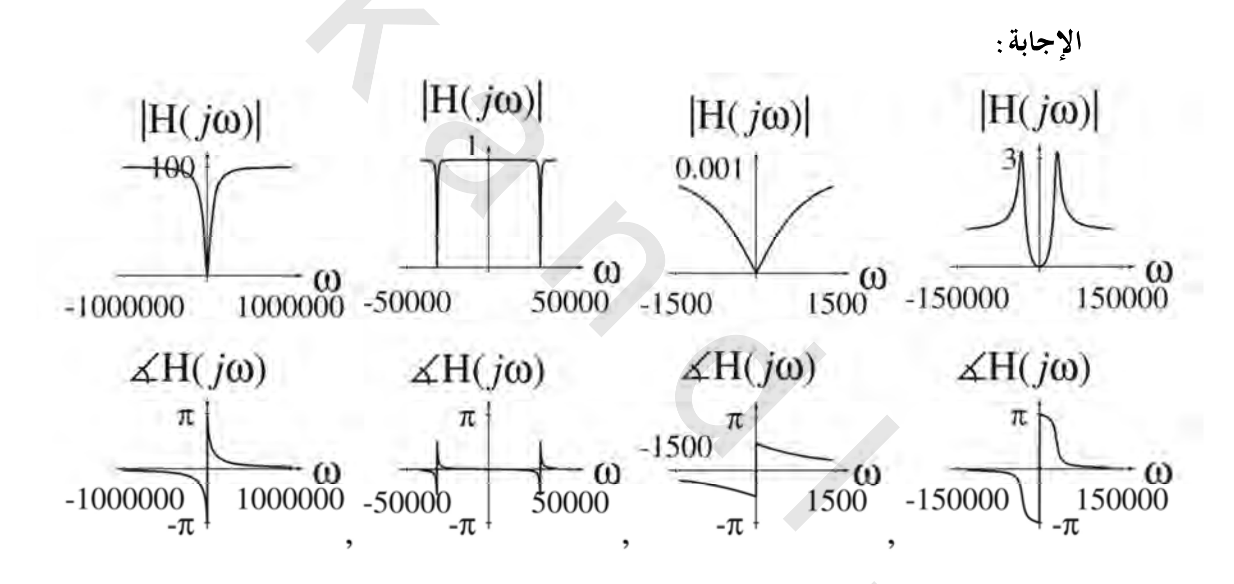
شكل رقم (ت–٨ت)

(ث) الإثارة $i_i(t)$، والاستجابة $v_R(t)$



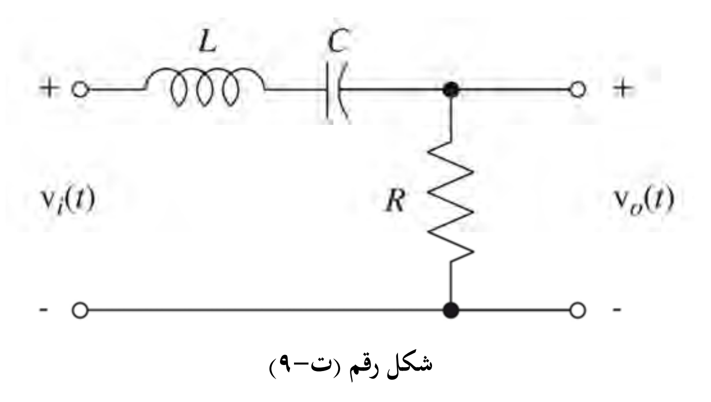
شكل رقم (**ت–٨ث**).

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٨)

٩- الدائرة الموجودة في الشكل رقم (ت- ٩) تمت إثارتها بالجهد $v_i(t)$ والاستجابة هي $v_0(t)$. قيم المكونات هي $R=50\Omega$، و $L=100mH$، و $C=5\mu F$.



شكل رقم (ت-٩)

(أ) ما هو نوع المرشح المثالي الذي تمثله هذه الدائرة العملية غير الفعالة .

(ب) اكتب تعبير الاستجابة الترددية $H(f)=V_0(f)/V_i(f)$.

(ج) ما هو التردد العددي f_{max} الذي ستكون عنده الاستجابة $H(f)$ قيمة عظمى وما هي زاوية $H(f)$ عند هذا التردد ؟

(د) أوجد القيمة العددية لمقدار الاستجابة الترددية عند الترددات 0Hz ، و 100Hz ، وعند التردد الذي يقارب الما لانهاية.

الإجابة: 0، و 0، و 0، و 0.192، منفذ لمجال من الترددات، و 225

١٠- لكل دائرة في الشكل رقم (ت- ١٠) تكون الاستجابة الترددية هي $H(f)=V_0(f)/V_i(f)$، ما هي الدائرة التي يكون لها :

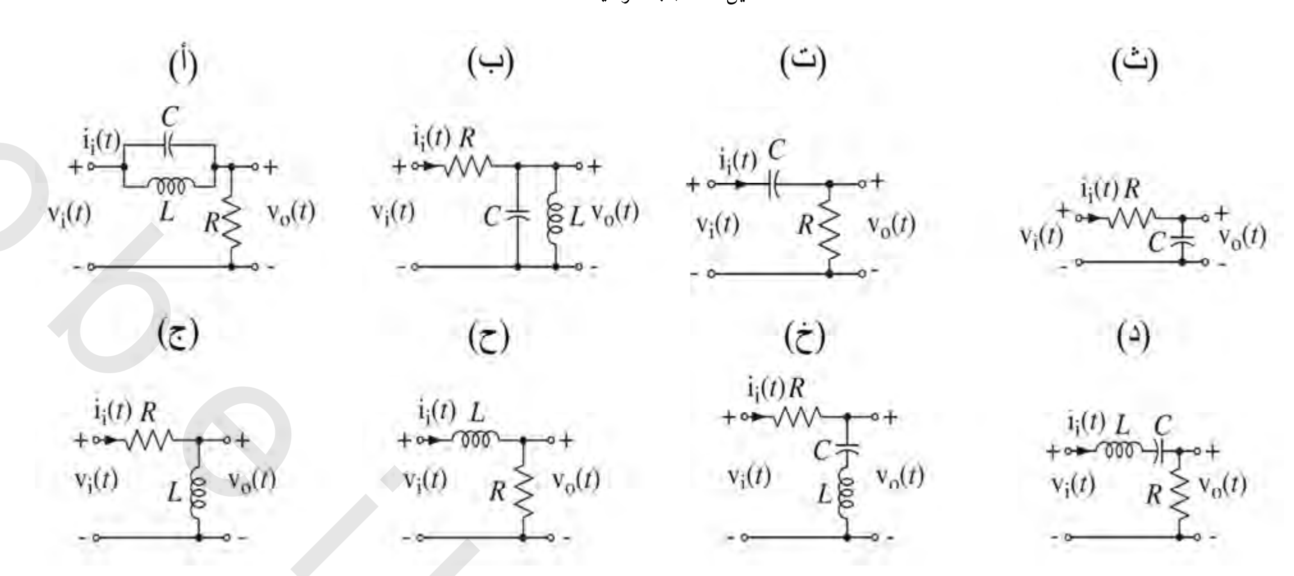
(أ) استجابة ترددية تساوي صفراً عند التردد $f=0$ ؟

(ب) استجابة ترددية تساوي صفراً عند $f\to+\infty$ ؟

(ج) مقدار للاستجابة الترددية يساوي واحداً عند التردد $f=0$ ؟

(د) مقدار للاستجابة الترددية يساوي واحداً عند $f\to+\infty$ ؟

(ه) مقدار للاستجابة الترددية مختلف عن الصفر وزاوية تساوي صفراً عند تردد ما في المجال $0<f<\infty$ (بمعنى تردد محدد مختلف عن الصفر)



شكل رقم (ت–١٠)

١١- صنف كل من الاستجابات الترددية التالية كمنفذة للترددات المنخفضة، أو منفذة للترددات المرتفعة، أو منفذة لمجال من الترددات، أو معوقة لمجال من الترددات:

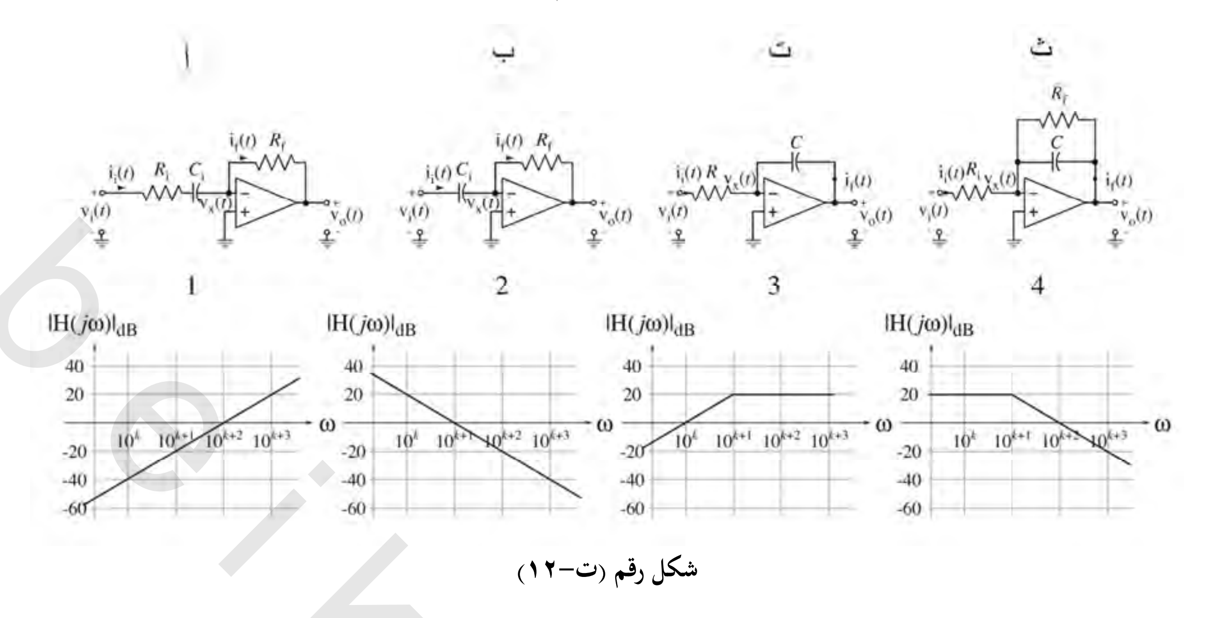
(أ) $H(f) = \frac{1}{1+jf}$

(ب) $H(f) = \frac{jf}{1+jf}$

(ت) $H(j\omega) = \frac{j10\omega}{100-\omega^2+j10\omega}$

الإجابة: منفذ للترددات المنخفضة، ومنفذ لمجال من الترددات، و منفذ للترددات المرتفعة

١٢- طابق كل دائرة في الشكل رقم (ت- ١٢) مع خطوط تقارب مخطط بود للاستجابة الترددية $H(j\omega)=V_0(j\omega)/V_i(j\omega)$:

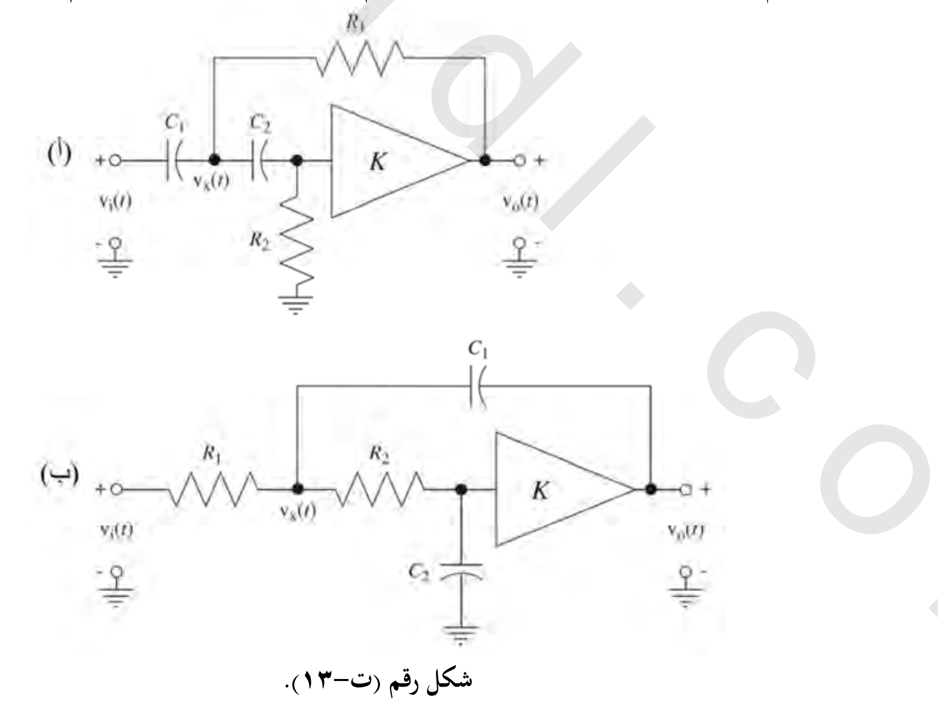


شكل رقم (ت–١٢)

الإجابة: A-3 ، B-1 ، C-2 ، D-4.

المرشحات الفعالة العملية المستمرة زمنياً

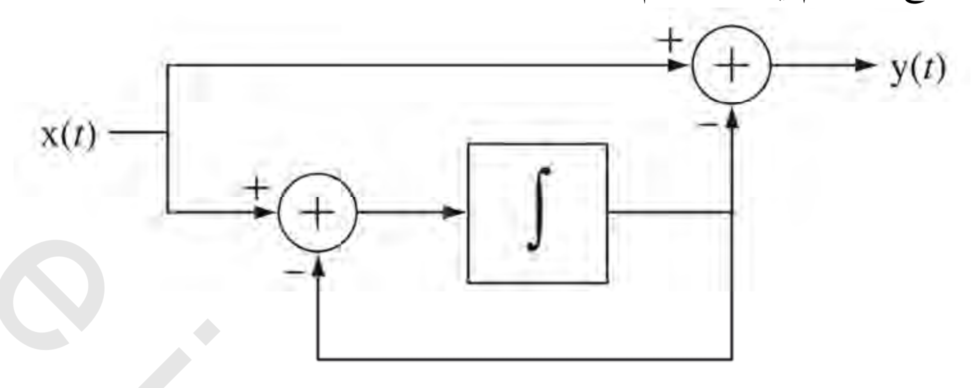
١٣- أوجد الاستجابة الترددية $H(f)=V_0(f)/V_i(f)$ لكل من الدوائر الفعالة في الشكل رقم (ت- ١٣) وعرف كل واحدة منهم إذا كانت منفذة للترددات المنخفضة ، أم منفذة لمجال من الترددات ، أم معوقة لمجال من الترددات :



شكل رقم (ت–١٣).

الإجابة: منفذ للترددات العالية ، منفذ للترددات المنخفضة

١٤- وضح أن النظام في الشكل رقم (ت- ١٤) سيكون له استجابة ترددية منفذة للرددات العالية :



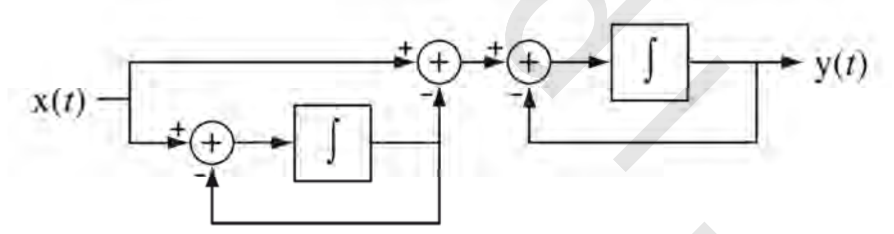
شكل رقم (ت–١٤)

الإجابة:

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{j\omega}{j\omega+1}$$

١٥- ارسم رسماً صندوقياً لنظام يكون له استجابة ترددية منفذة لمجال من الترددات باستخدام اثنين من المكاملات كبلوكات وظيفية. ثم بعد ذلك أوجد الاستجابة الترددية وتحقق من أنها منفذة لمجال من الترددات.

الإجابة:



الشكل رقم (ج–ت–١٥)

الاستجابة الترددية المتقطعة زمنياً

١٦- نظام له استجابة الصدمة التالية :

$$h[n]=(7/8)^{n}u[n]$$

ما هو عرض مجال نصف القدرة له ؟

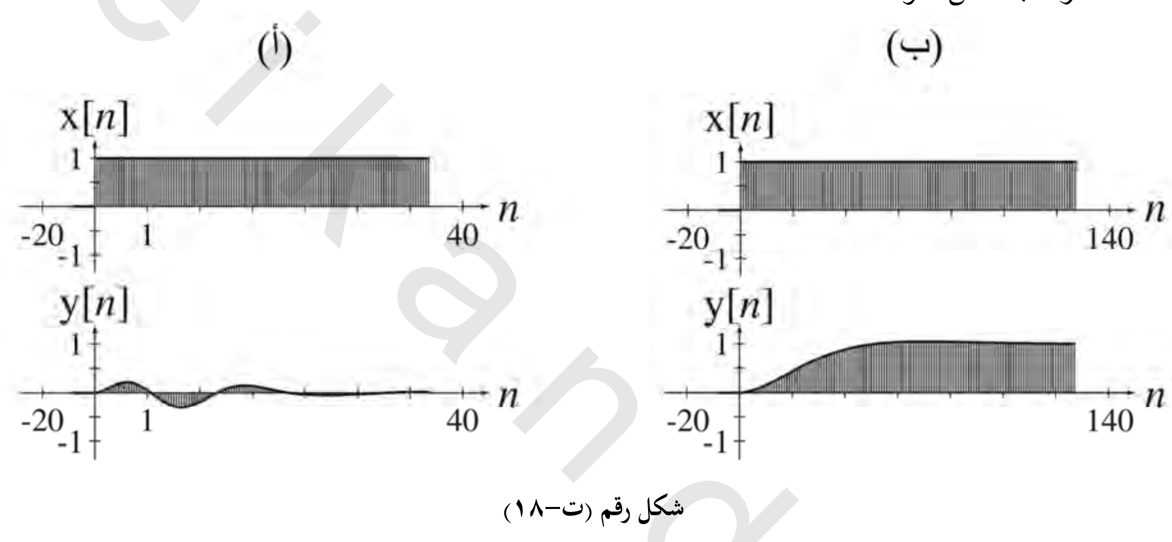
الإجابة: 0.1337 راديان

١٧- صنف كلاً من الاستجابات الترددية التالية كمنفذة للترددات المنخفضة، أو منفذة للترددات المرتفعة، أو منفذة أو معوقة لمجال من الترددات.

$$(أ)H(e^{j\Omega}) = \frac{sin(3\Omega/2)}{sin(\Omega/2)} \quad (ب)H(e^{j\Omega}) = j[sin(\Omega) + sin(2\Omega)]$$

الإجابة: منفذ للترددات المنخفضة، ومنفذ لمجال من الترددات

١٨- في الشكل رقم (ت- ١٨) توجد أزواج من الإثارات x والاستجابات y. لكل زوج منها حدد نوع الترشيح الذي حدث عليها إذا كان: منفذاً للترددات المنخفضة، أم منفذاً للترددات المرتفعة، أم منفذاً، أم معوقاً لمجال من الترددات:

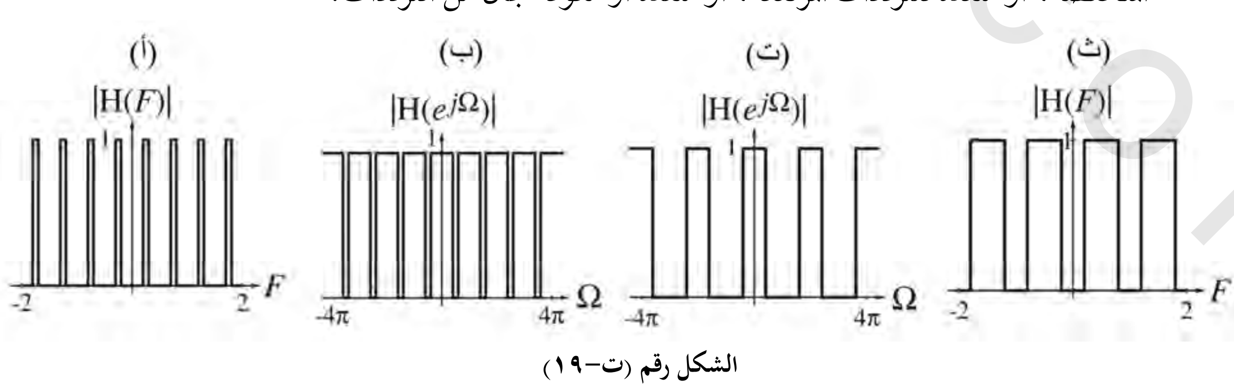


شكل رقم (ت-١٨)

الإجابة: منفذ واحد لمجال من الترددات، و منفذ واحد للترددات المنخفضة.

المرشحات المثالية المتقطعة زمنياً

١٩- صنفْ كلاً من الاستجابات الترددية الموضحة في الشكل رقم (ت- ١٩) كمنفذة للترددات المنخفضة، أو منفذة للترددات المرتفعة، أو منفذة أو معوقة لمجال من الترددات؟



الشكل رقم (ت-١٩)

الإجابة: واحد من كل نوع.

٢٠- صنف كلاً من الاستجابات الترددية التالية كمنفذة للترددات المنخفضة، أو الترددات المرتفعة، أو منفذة أو معوقة لمجال من الترددات:

(أ) $H(f) = rect(10F) * \delta_1(F)$

(ب) $H(e^{j\Omega}) = [rect(20\pi(\Omega - \pi/4)) + rect(20\pi(\Omega + \pi/4))] * \delta_1(\Omega/2\pi)$

الإجابة: واحد منفذ لمجال من الترددات وواحد منفذ للترددات المنخفضة

السببية المتقطعة زمنياً

٢١- حدد إذا كانت الأنظمة التالية بالاستجابة الترددية الموضحة سببية أم لا:

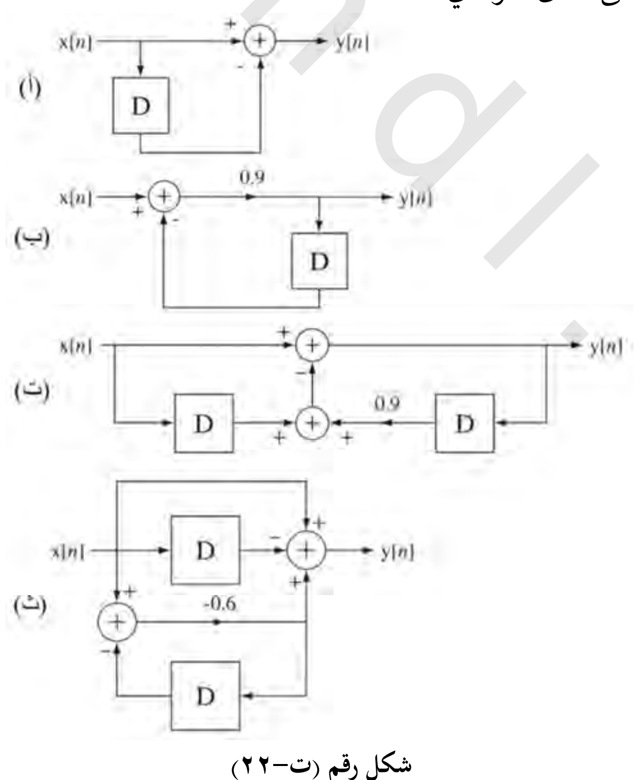
(أ) $H(e^{j\Omega}) = \frac{sin(7\Omega/2)}{sin(\Omega/2)}$ (ب) $H(e^{j\Omega}) = \frac{sin(7\Omega/2)}{sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega}$

(ت) $H(e^{j\Omega}) = \frac{sin(7\Omega/2)}{sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega}$ (ث) $H(e^{j\Omega}) = rect(5\Omega/\pi) * \delta_{2\pi}(\Omega)$

الإجابة: واحدة سببية، وثلاثة غير سببية

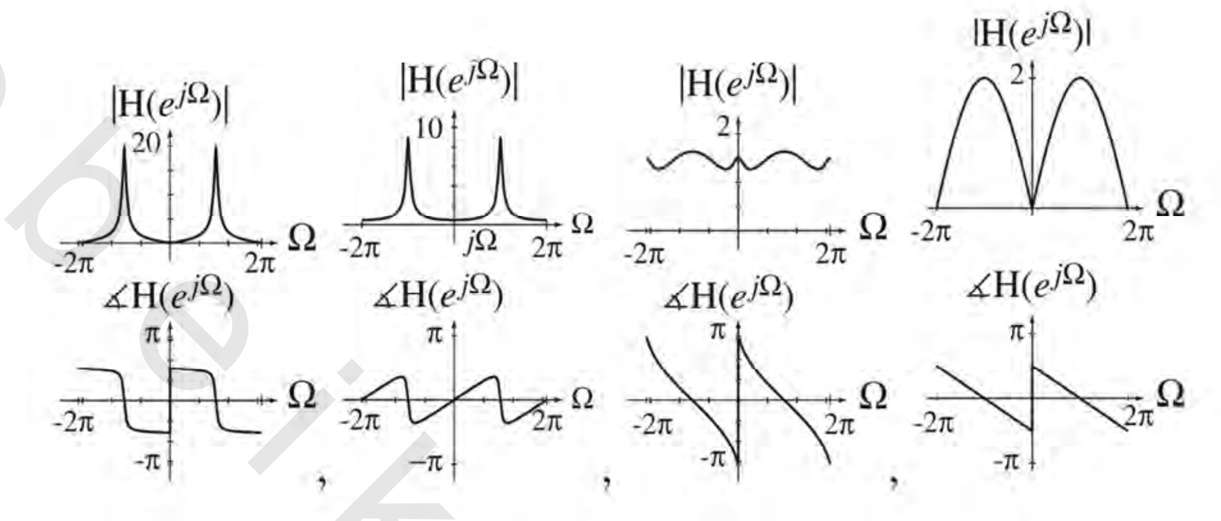
المرشحات العملية المتقطعة زمنياً

٢٢- أوجد الاستجابة الترددية $H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}$ وارسمها لكل مرشح من المرشحات الموجودة في الشكل رقم (ت- ٢٢) على المدى الترددي $-2\pi<\Omega<2\pi$.



شكل رقم (ت-٢٢)

الإجابة :



شكل رقم (ج–ت–٢٢)

٢٣- أوجد أقل إحباط أو توهين للمرشح ذي المتوسط المتحرك الذي له N=3. حدد مجال المعاوقة على أنه المدى الترددي $\Omega_C<\Omega<\pi$ حيث Ω_C هي تردد أول صفر في الاستجابة الترددية.

الإجابة : توهين مقداره 9.54dB

تمارين بدون إجابات

الاستجابة الترددية المستمرة زمنياً

٢٤- إحدى المشاكل مع المرشحات السببية هي أن إشارة الخرج للمرشح تتأخر في العادة عن إشارة الدخل. هذه المشكلة لا يمكن التخلص منها إذا كان الترشيح يتم في الزمن الحقيقي، ولكن إذا تم تسجيل الإشارة للاستخدام فيما بعد خارج الزمن الحقيقي، فإن أحد الطرق البسيطة للتخلص من تأثير التأخير هي ترشيح الإشارة، ثم تسجيل الاستجابة وبعد ذلك يتم ترشيح هذه الاستجابة ب المرشح نفسه ولكن مع تشغيل الإشارة مرة ثانية خلال النظام. افترض أن المرشح هو مرشح من قطب واحد مع استجابة ترددية على الصورة :

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega/\omega_c}$$

حيث ω_c هي تردد القطع (تردد نصف القدرة) للمرشح.

(أ) ما هي الاستجابة الترددية الفعلية لعملية الترشيح الكلية للإشارة الأمامية، ثم الإشارة العكسية ؟

(ب) ما هي استجابة الصدمة الفعلية ؟

المرشحات المثالية المستمرة زمنياً

٢٥- إشارة x(t) موصوفة بالمعادلة التالية :

$$x(t) = rect(1000t) * \delta_{0.002}(t)$$

(أ) إذا كانت x(t) هي إشارة دخل لمرشح مثالي منفذ للترددات المنخضة وتردد القطع له هو 3kHz، إرسم إشارة الدخل x(t) وإشارة الخرج y(t) على التدريج نفسه وقارن بينهما.

(ب) إذا كانت x(t) هي إشارة الدخل لمرشح مثالي منفذ لمجال من الترددات وتردد القطع الأسفل له هو 1kHz، وتردد القطع العلوي هو 5kHz، ارسم إشارة الدخل x(t) وإشارة الخرج y(t) على نفس التدريج وقارن بينهما.

السببية المستمرة زمنياً

٢٦- حدد إذا كانت الأنظمة التي لها الاستجابات الترددية التالية سببية أم لا :

(أ) $H(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$

(ب) $H(j\omega) = \frac{10}{6+j4\omega}$

(ت) $H(j\omega) = \frac{4}{25-\omega^2+j6\omega}$

(ث) $H(j\omega) = \frac{4}{25-\omega^2+j6\omega}e^{j\omega}$

(ج) $H(j\omega) = \frac{4}{25-\omega^2+j6\omega}e^{-j\omega}$

(ح) $H(j\omega) = \frac{j\omega+9}{45-\omega^2+j6\omega}$

(خ) $H(j\omega) = \frac{49}{49+\omega^2}$

مخططات بود

٢٧- ارسم خطوط التقارب ومخططات بود للمقدار والزاوية للاستجابات الترددية للدوائر والأنظمة الموضحة في الشكل رقم (ت- ٢٧).

شكل رقم (ت-٢٧)

٢٨- نظام LTI له الاستجابة الترددية التالية :

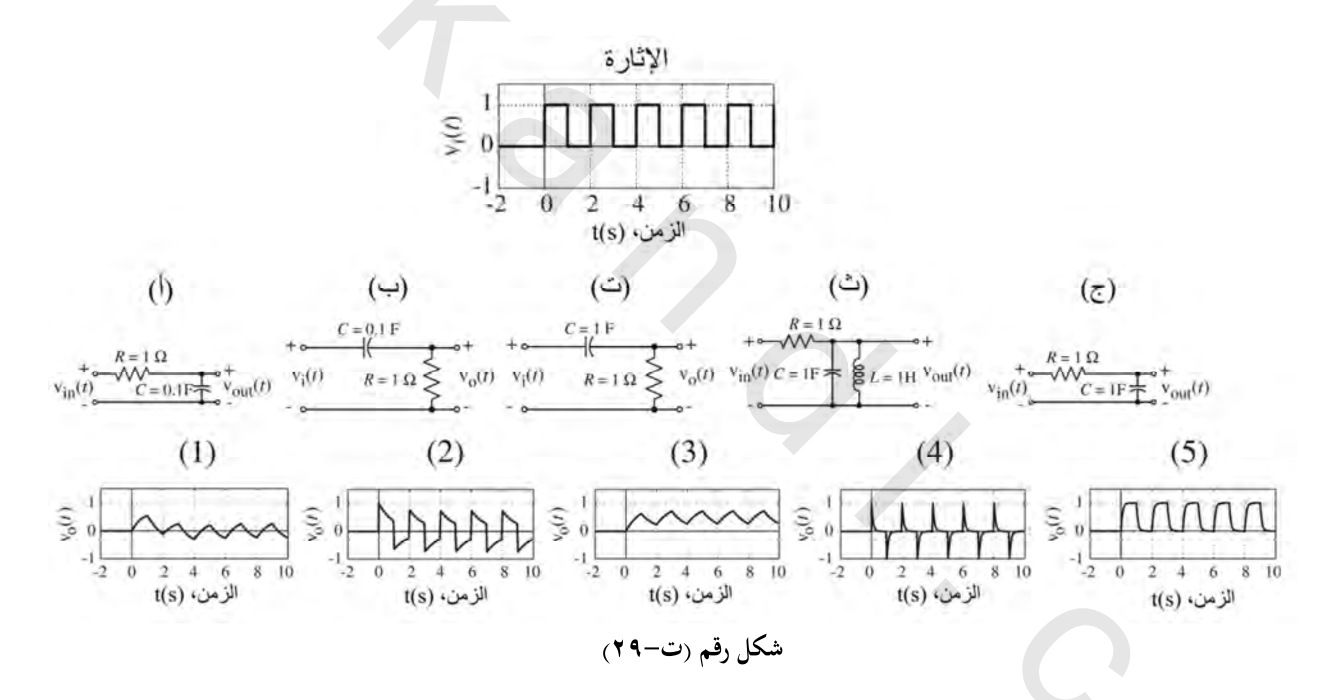
$$H(j\omega) = \frac{j3\omega - \omega^2}{1000 - 10\omega^2 + j250\omega}$$

(أ) أوجد كل الترددات الركنية (بالراديان في الثانية) في مخطط بود للمقدار لهذه الاستجابة الترددية.

(ب) ما هو مقدار ميل مخطط بود للمقدار بال dB على الأوكتاف عند الترددات المنخفضة جداً والترددات المرتفعة جداً.

المرشحات العملية غير الفعالة المستمرة زمنياً

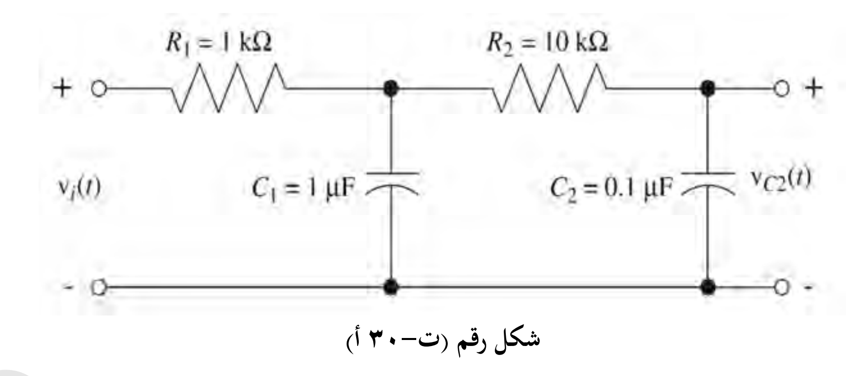
٢٩- إشارة الجهد السببية المربعة الشكل الموضحة في الشكل رقم (ت- ٢٩) تم استخدامها في إثارة خمسة مرشحات غير فعالة (أ) حتى (ج) في الشكل نفسه. استجابة هذه المرشحات الخمسة مبينة في الأسفل بطريقة عشوائية. طابق هذه الاستجابات مع المرشحات.



شكل رقم (ت-٢٩)

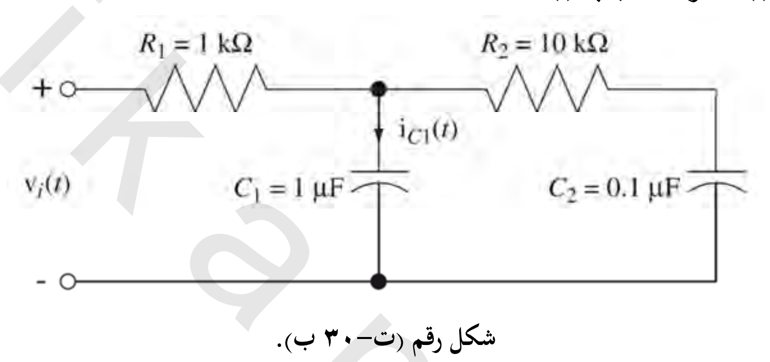
٣٠- أوجد وارسم الاستجابة الترددية لكل دائرة من الدوائر الموضحة في الشكل رقم (ت- ٣٠) بمعلومية الإثارة والاستجابة المعطاة.

(أ) الإثارة $v_i(t)$ ، والاستجابة $v_{C2}(t)$



شكل رقم (ت–٣٠ أ)

(ب) الإثارة $v_i(t)$ ، والاستجابة $i_{C1}(t)$



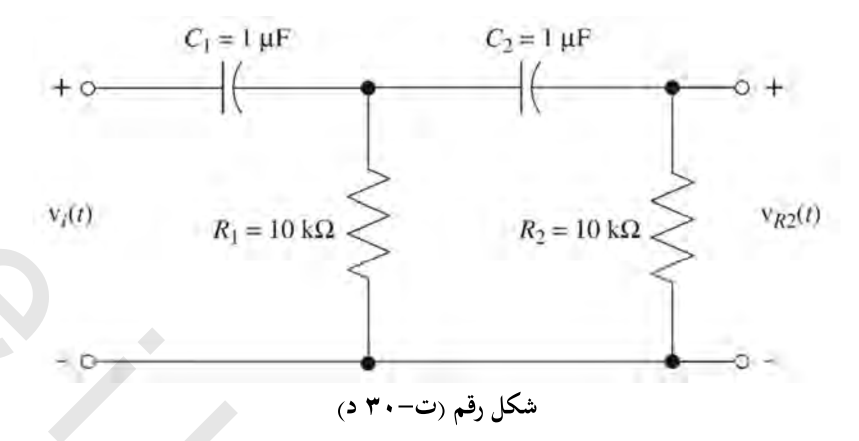
شكل رقم (ت–٣٠ ب).

(ج) الإثارة $v_i(t)$ ، والاستجابة $v_{R2}(t)$

C1 = 1 μF
C2 = 1 μF
+
+
vi(t)
R1 = 10 kΩ
R2 = 10 kΩ
vR2(t)
-
-

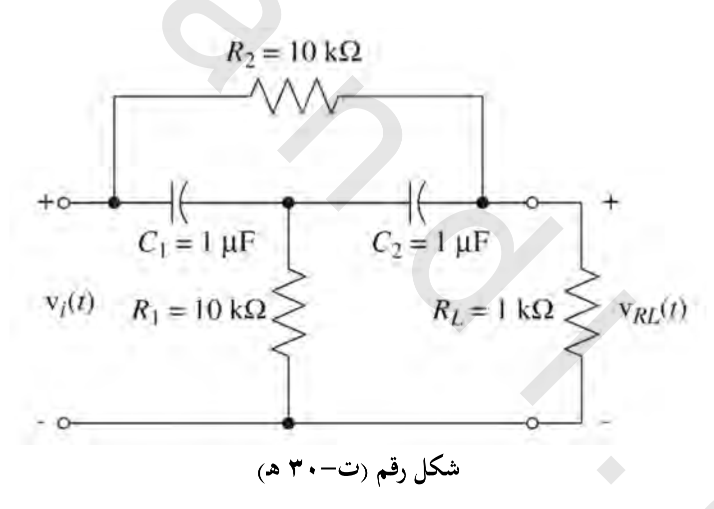
شكل رقم (ت–٣٠ ج).

(د) الإثارة $i_i(t)$، والاستجابة $v_{R1}(t)$



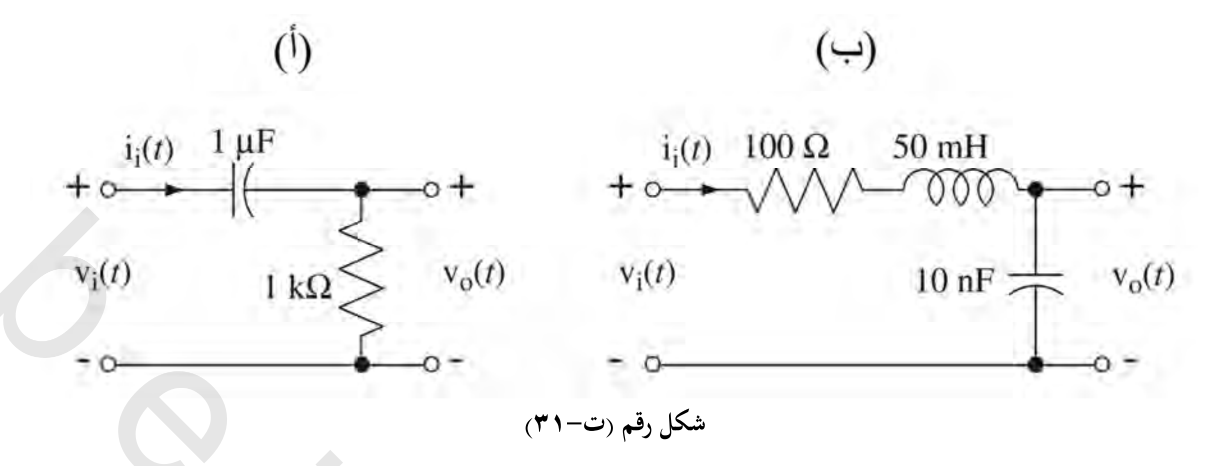
شكل رقم (ت-٣٠ د)

(ه) الإثارة $v_i(t)$، والاستجابة $v_{RL}(t)$



شكل رقم (ت-٣٠ ه)

٣١- أوجد وارسم مع التردد مقدار وزاوية معاوقة الدخل $Z_{in}(j\omega)=V_i(j\omega)/I_i(j\omega)$ والاستجابة الترددية $H(j\omega)=V_0(j\omega)/V_i(j\omega)$ لكل من المرشحات في الشكل رقم (ت- ٣١).

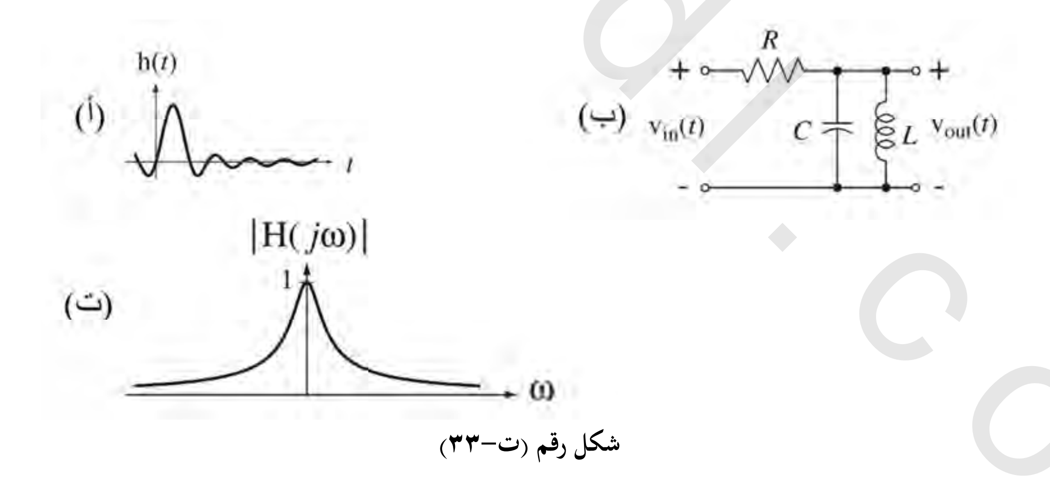


شكل رقم (ت–٣١)

٣٢- الإشارة x(t) في تمرين ٢٥ هي إشارة جهد الدخل لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة مع R=1kΩ و C=0.3µF. ارسم إشارات جهد الدخل والخرج مع الزمن على التدريج نفسه.

المرشحات المستمرة زمنياً

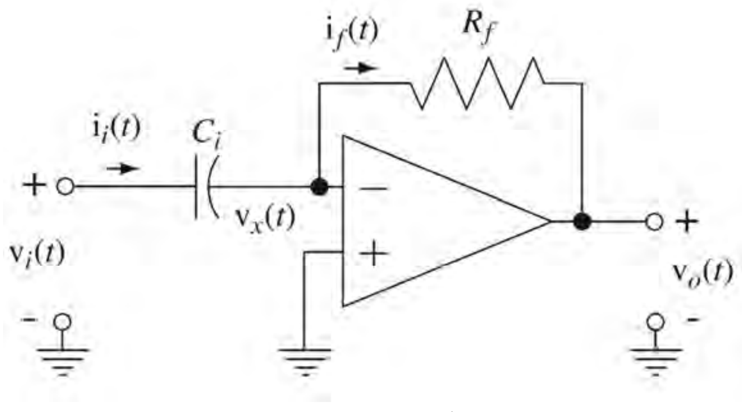
٣٣- يوجد في الشكل (ت- ٣٣) بعض الأوصاف لمرشحات في صورة استجابة الصدمة، ومقدار استجابة ترددية، ومخطط دائرة. لكل واحدة منها، وبقدر المستطاع، صنف هذه المرشحات كمثالية أو عملية، وسببية أو غير سببية، ومنفذة للترددات المنخفضة، أو للترددات العالية، أو منفذة أو معوقة لمجال من التردد.



شكل رقم (ت–٣٣)

المرشحات العملية الفعالة المستمرة زمنياً

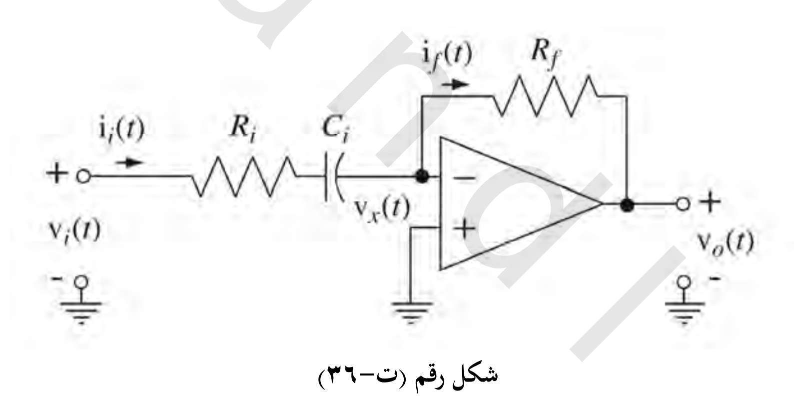
٣٤- أوجد الاستجابة الترددية للدائرة الموضحة في الشكل رقم (ت- ٣٤). ما هي الوظيفة التي تؤديها هذه الدائرة.



شكل رقم (ت-٣٤)

٣٥- صَمِّمْ مرشحاً فعالاً منفذاً للترددات المرتفعة باستخدام مكبر عمليات مثالي، ومقاومتين، ومكثف واحد، واستنتج استجابته الترددية لتتحقق أنه منفذ للترددات المرتفعة.

٣٦- أوجد الاستجابة الترددية $H(j\omega)=V_0(j\omega)/V_i(j\omega)$ للمرشح الفعال في الشكل رقم (ت- ٣٦) مع $R_i=1000\Omega$، و $C_i=1\mu F$، و $R_f=5000\Omega$.

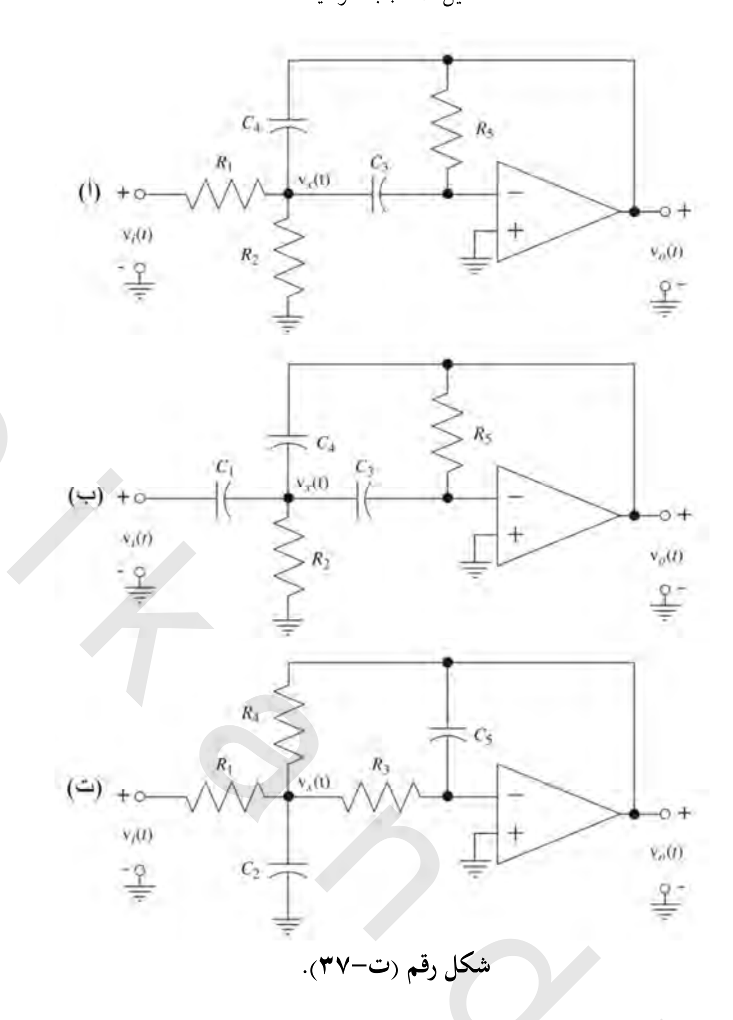


شكل رقم (ت-٣٦)

(أ) أوجد كل الترددات الركنية (راديان على الثانية) في مخطط مقدار بود لهذه الاستجابة الترددية؟

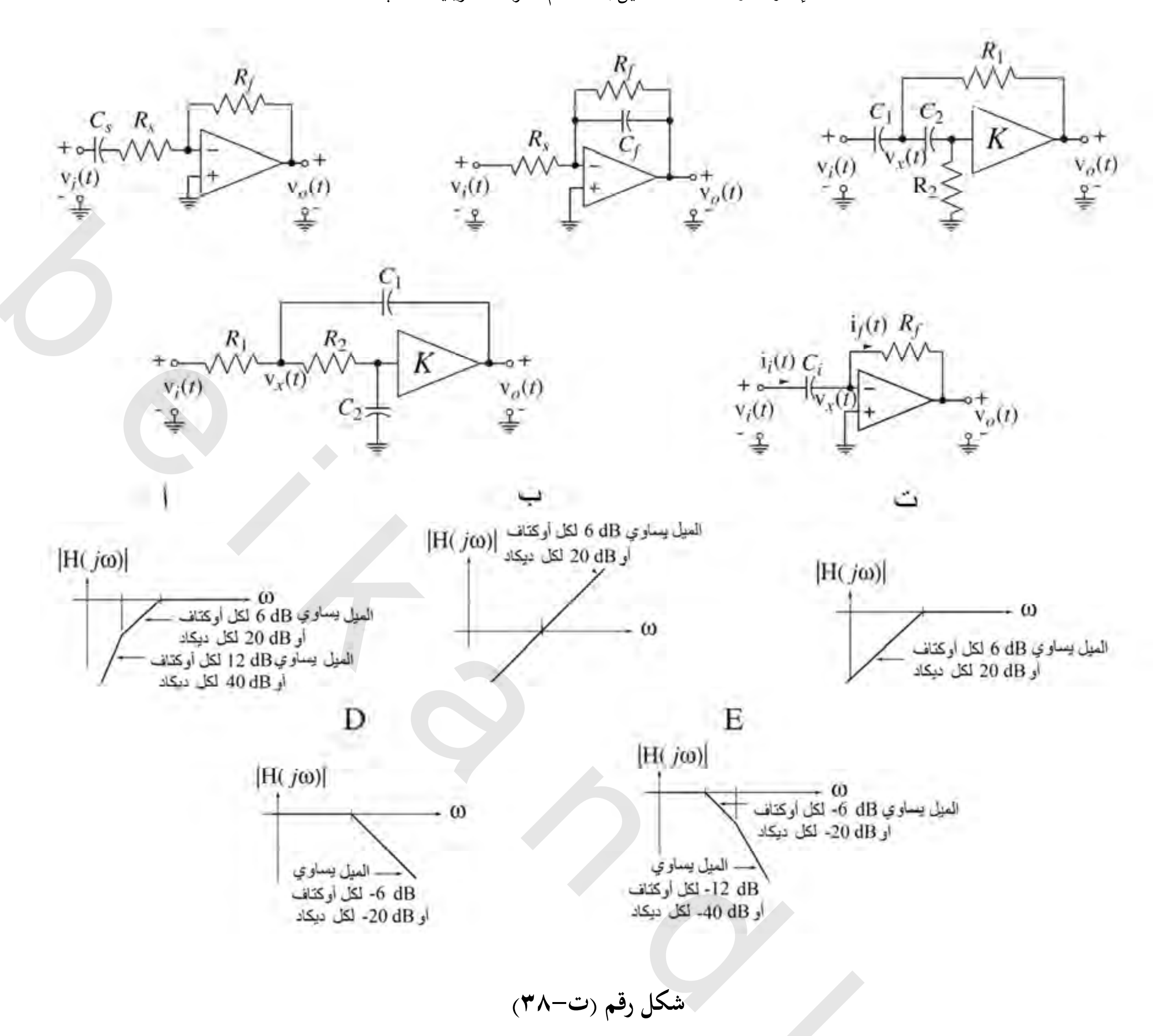
(ب) ما هو ميل مخطط بود للمقدار بالديسبل لكل ديكاد عند الترددات المنخفضة جداً والترددات المرتفعة جدا؟

٣٧- أوجد الاستجابة الترددية $H(f)=V_0(f)/V_i(f)$ للمرشحات الفعالة في الشكل رقم (ت- ٣٧) وحدد كل واحدٍ منها إذا كان منفذاً للترددات المنخفضة، أم للترددات العالية، أم منفذاً أم معوقاً لمجال من الترددات.



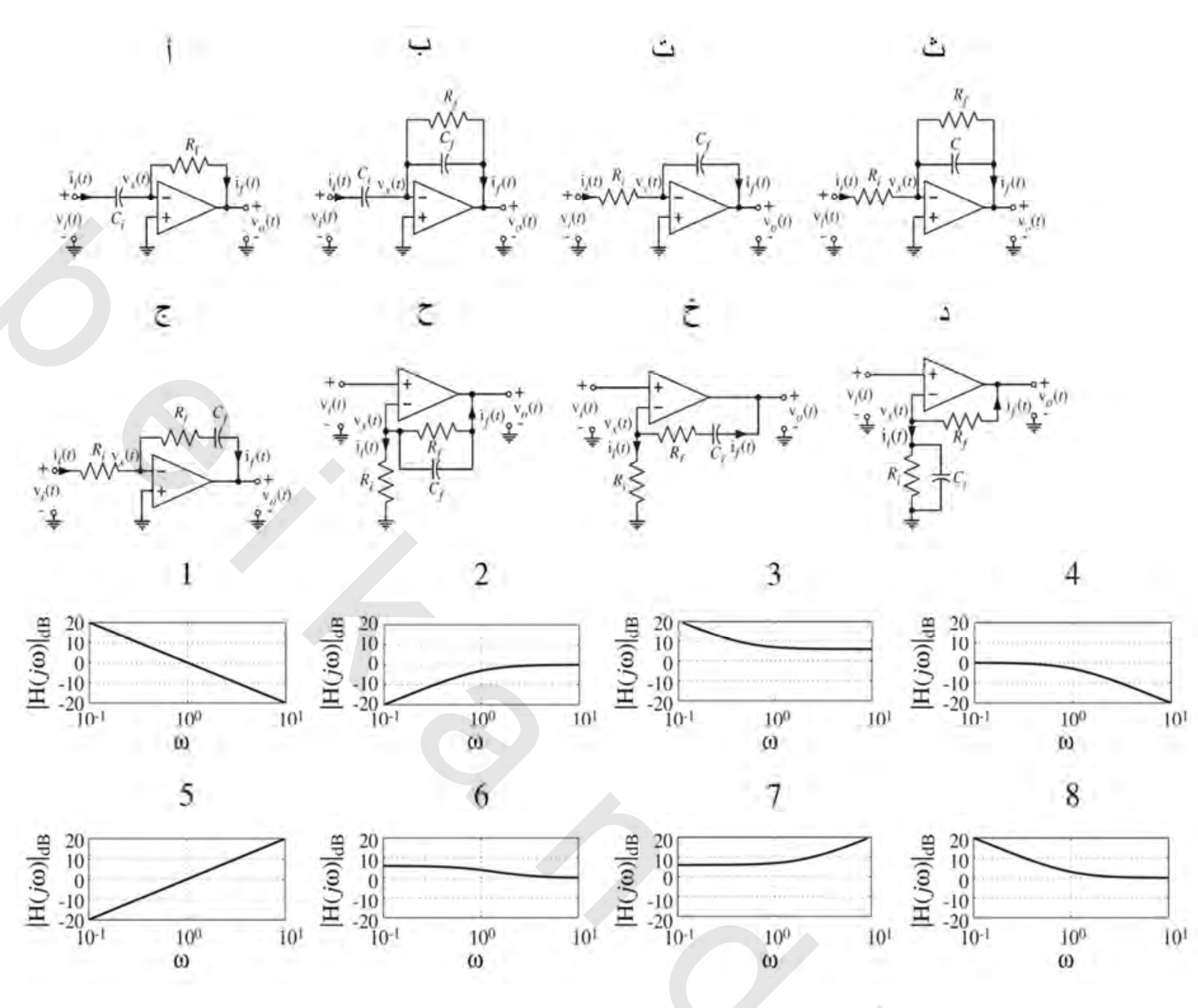
شكل رقم (**ت–٣٧**).

٣٨- في الشكل رقم (ت- ٣٨) يوجد بعض المرشحات الفعّالة وخطوط التقارب لمخططات بود للاستجابة الترددية $\left|\frac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)}\right|$. لكل مرشح أوجد مقدار مخطط بود الذي يتطابق معه؟



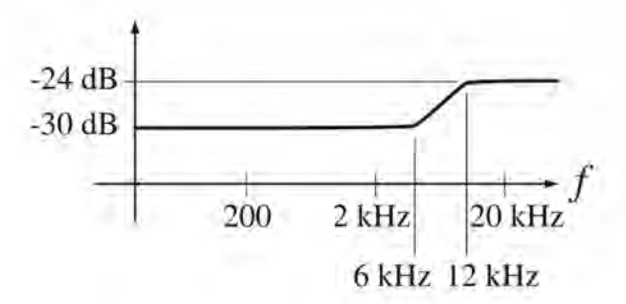
شكل رقم (ت–٣٨)

٣٩- في المرشحات الموضحة في الشكل رقم (ت- ٣٩) كل المقاومات تساوي واحد أوم وكل المكثفات تساوي واحد فاراد. لكل مرشح الاستجابة الترددية هي $H(j\omega)=V_0(j\omega)/V_i(j\omega)$. حدد مخطط بود لمقدار دالة العبور لكل دائرة؟



شكل رقم (ت–٣٩)

٤٠- عند تسجيل الموسيقي على شريط مغناطيسي تماثلي ثم تشغيله بعد ذلك، سنجد مركبة ضوضاء عالية التردد تسمى "صفيراً". الشريط يتم إضافتها على الموسيقي. افتراض من أجل التحليل أن طيف الموسيقي يستوي عند 30dB- خلال الطيف الصوتي من 20Hz حتى 20kHz. افتراض أيضاً أن طيف الإشارة الناتجة من تشغيل الإشارة بها مكونات مضافة تجعل الإشارة الناتجة من تشغيل الشريط لها مخطط بود كما هو موضح في الشكل رقم (ت- ٤٠).



شكل رقم (ت–٤٠) مخطط بود للإشارة الناتجة من تشغيل الشريط.

يمكن توهين الضوضاء العالية التردد المضافة عن طريق مرشح منفذ للترددات المنخفضة ولكن ذلك أيضاً سيوهن المركبات العالية التردد في الموسيقي، مما يقلل من أمانة النظام. أحد حلول هذه المشكلة هو عن طريق التكبير المبدئي لجزء الترددات العالية في الموسيقي أثناء عملية التسجيل بحيث عندما يتم تطبيق المرشح المنفذ للترددات المنخفضة، فإن التأثير النهائي على الموسيقي يكون صفراً مع توهين الصفارة المضافة. صَمِّمْ مرشحاً فعالاً يمكن استخدامه أثناء عملية التكبير ليقوم بعملية التكبير المبدئي.

السببية المتقطعة زمنياً

٤١- حدد إذا كانت الأنظمة التي لها استجابات الصدمة التالية سببية أم لا :

(أ) $H(e^{j\Omega}) = [rect(5\Omega/\pi) * \delta_{2\pi}(\Omega)]e^{-j10\Omega}$

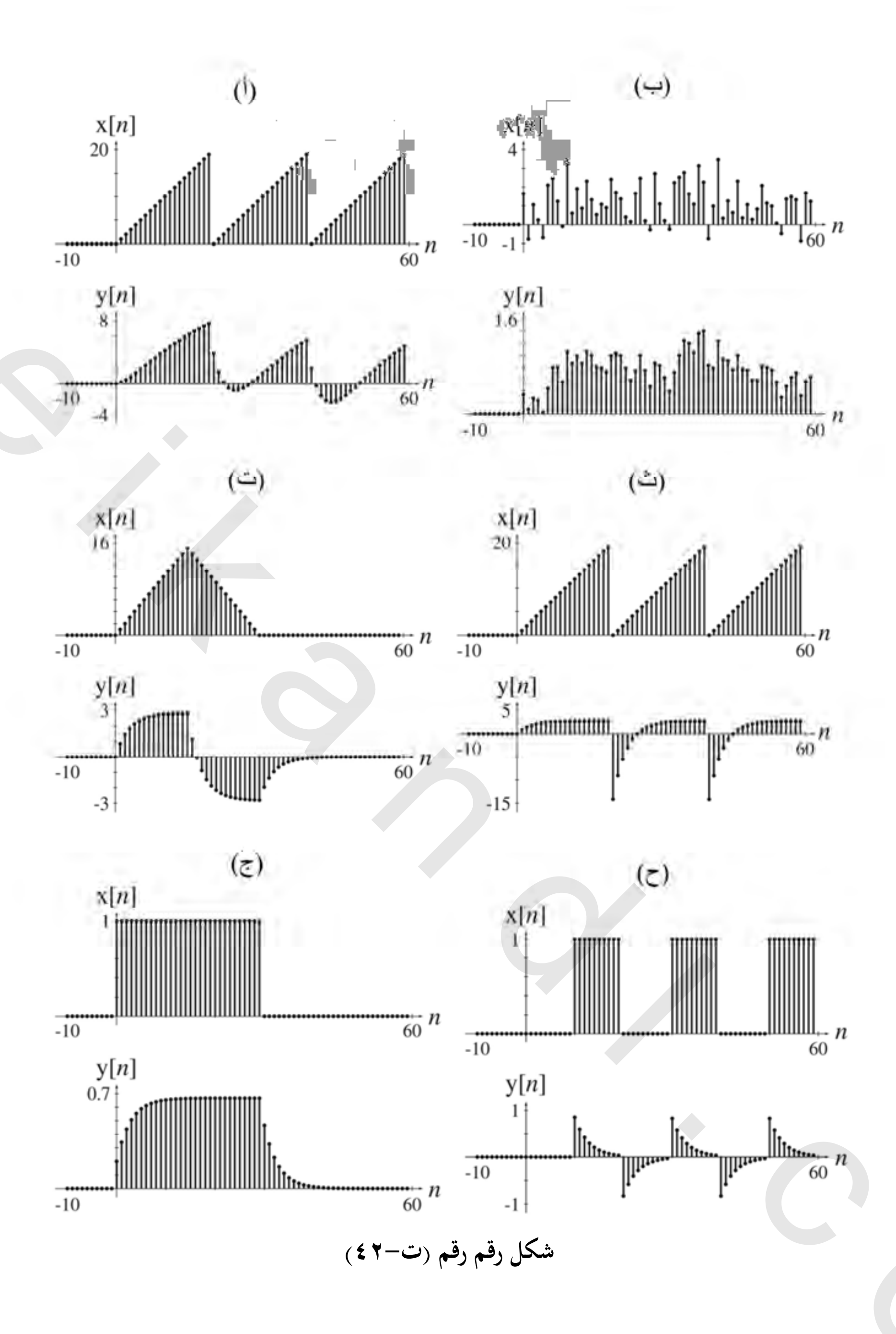
(ب) $H(e^{j\Omega}) = j\sin(\Omega)$

(ت) $H(e^{j\Omega}) = 1 - e^{-j10\Omega}$

(ث) $H(e^{j\Omega}) = \frac{8e^{j\Omega}}{8-5e^{-j\Omega}}$

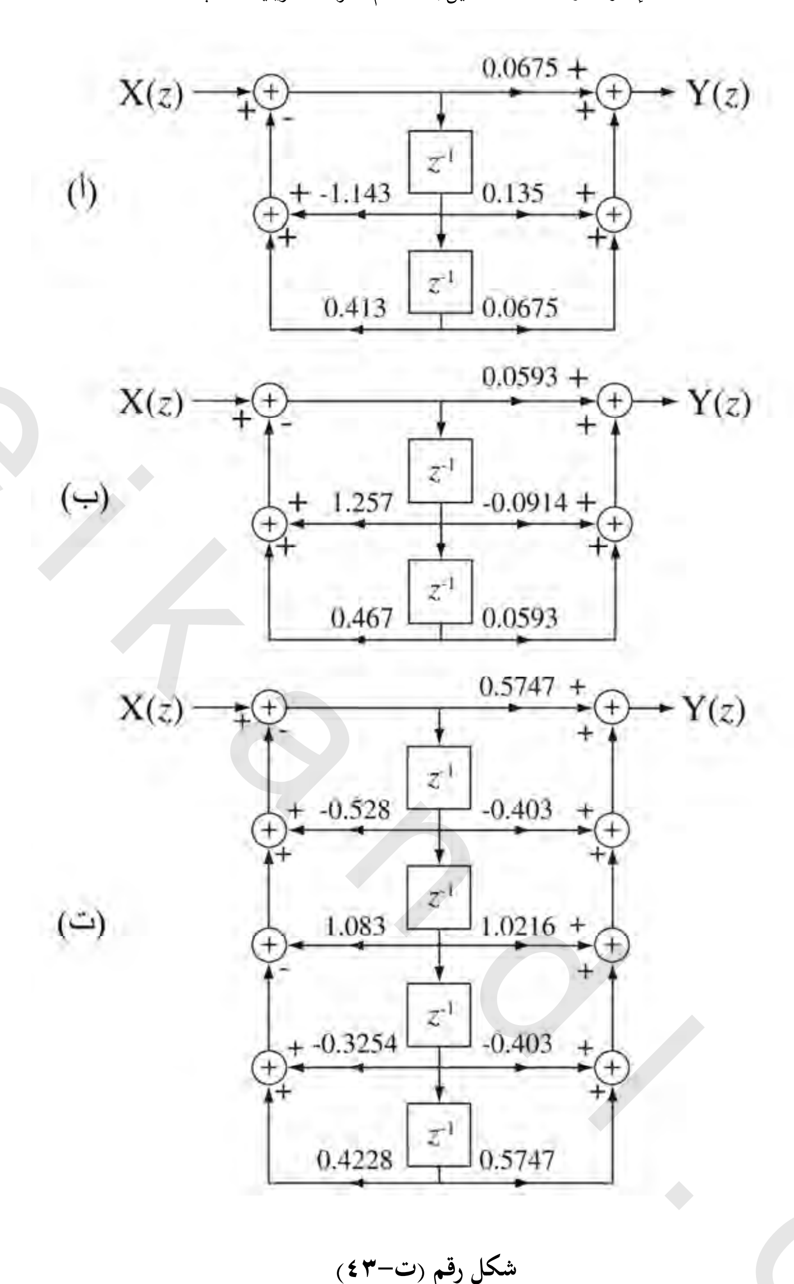
المرشحات المتقطعة زمنياً

٤٢- في الشكل رقم (ت– ٤٢) يوجد أزواج من الإثارات x والاستجابات y. لكل زوج حَدِّدَ نوع المرشح المستخدم، هل هو منفذ للترددات المنخفضة، أم للترددات العالية، أم منفذ أم معوق لمجال من الترددات.



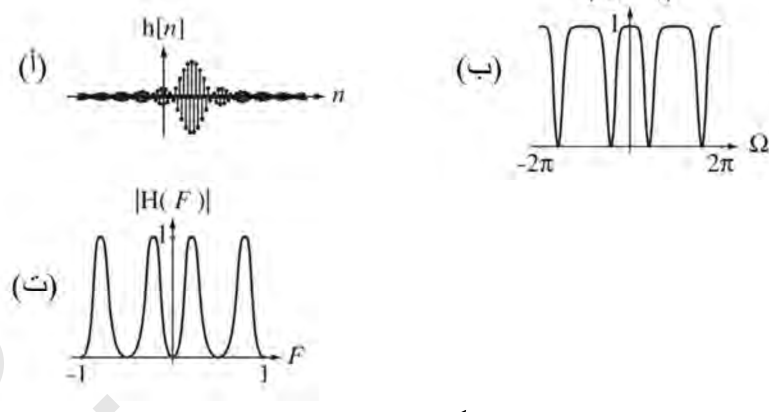
شكل رقم رقم (ت–٤٢)

٤٣- أوجد الاستجابة الترددية $H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}$ وارسمها لكل مرشح من المرشحات الموجودة في الشكل رقم (ت- ٤٣) على المدى الترددي $-\pi<\Omega<\pi$؟



شكل رقم (ت-٤٣)

٤٤- في الشكل رقم (ت- ٤٤) يوجد بعض أوصاف لمرشحات في صورة استجابة صدمة واثنتين لمقدار الاستجابة الترددية. لكل واحدة من هذه المرشحات، وبقدر الإمكان، صنف هذه المرشحات على أنها مثالية أم عملية، سببية أم غير سببية، منفذة للترددات المنخفضة، أم للترددات المرتفعة، أم منفذة أم معوقة لمجال من الترددات.



شكل رقم (ت-٤٤)

ترشيح الصور

٤٥- ولد صورة في الفراغ المتقطع تتكون من 96×96 من البكسلات. افتراض أن الصورة تمثل لوحة شطرنج تتكون من 8×8 من المربعات البيضاء والسوداء التبادلية :

(أ) رشح هذه الصورة صفاً بصف وبعد ذلك عمود بعمود باستخدام مرشح تكون استجابة الصدمة له كما يلي :

(ب) $h[n] = 0.2(0.8)^n u[n]$

واعرض الصورة على الشاشة باستخدام الأمر imagesc في ماتلاب.

(ت) رشح هذه الصورة صفاً بصف وبعد ذلك عموداً بعمود باستخدام مرشح تكون استجابة الصدمة له كما يلي :

$$h[n] = \delta[n] - 0.2(0.8)^n u[n]$$

واعرض الصورة على الشاشة باستخدام الأمر imagesc في ماتلاب.



الفصل الثاني عشر

تحليل أنظمة الاتصالات

(١٢.١) المقدمة والأهداف

يعتمد الاقتصاد العالمي، والتفاعل بين الحكومات والأفراد على أنظمة الاتصالات وهذا الاعتماد يصبح أقوى مع مرور الزمن. تشتمل هذه الأنظمة على شبكة التليفونات، وشبكات الحاسب بدءا من الشبكات المحلية إلى شبكة الإنترنت العالمية Web، وخدمات الراديو والتليفزيون الخاصة والعامة.

في العادة تكون طرق تحليل فورير هي المفضلة في تحليل أنظمة الاتصالات. العديد من هذه الأنظمة تكون موجات حاملة جيبية يتم تعديلها عن طريق إشارات المعلومات. تعمل الموجات الحاملة باستمرار على فترات مستمرة وطويلة من الزمن وفي العادة تكون موجات جيبية. لذلك فإن الموجات الحاملة المعدلة وغير المعدلة يمكن وصفها بكفاءة باستخدام تحويلات فورير. تستخدم بعض الأنظمة الموجات الحاملة التي تكون دورية ولكنها غير جيبية. حتى هذه يمكن التعبير عنها أيضاً بكفاءة عن طريق تحويلات فورير.

أهداف الفصل

١- لنتعلم كيف أن التعدد الترددي frequency multiplexing يمكنه أن يسمح باستخدام العديد من قنوات الاتصال التي تعمل في الوقت نفسه بدون التداخل بين بعضها بعضاً.

٢- لنستكشف أكثر أنواع التعديل والكشف (عكس التعديل) المقداري مع الموجة الحاملة شيوعاً ونفهم مميزاتها وعيوبها.

٣- لنتعلم المفاهيم الأساسية المستخدمة في التعديل الزاوي.

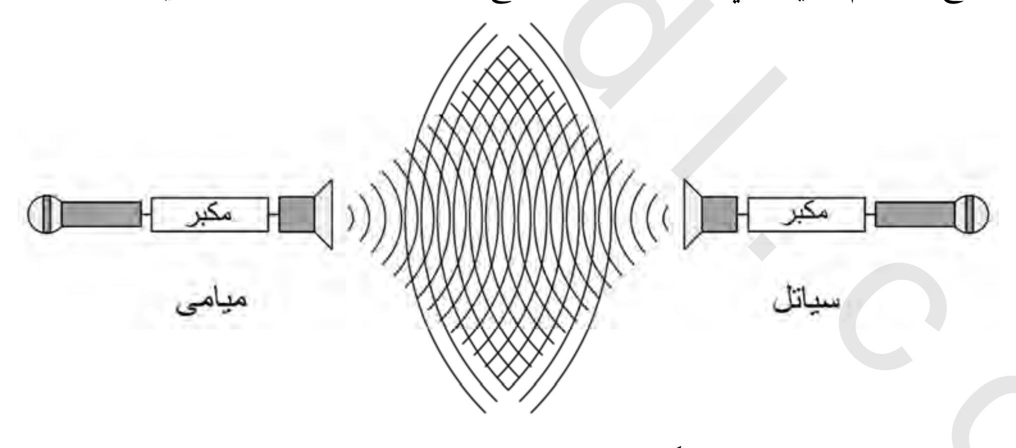
٤- لننشر مفاهيم التعديل والكشف المستمر زمنياً إلى التعديل والكشف المتقطع زمنياً.

(١٢.٢) أنظمة الاتصالات المستمرة زمنياً

الحاجة لأنظمة الاتصالات

واحد من أهم تطبيقات تحويل فورير هو في تحليل وتصميم أنظمة الاتصالات. سنعرض هذا المفهوم عن طريق تحليل تشغيل مرسل ومستقبل راديو. لماذا نحتاج الراديو ؟ إنها تحل مشكلة الاتصالات بين الناس المتباعدين جداً عن بعضهم بعضاً لكي يتواصلوا مباشرة عبر الصوت. هناك بالطبع العديد من الاتصالات عن بعد. هذه الاتصالات من الممكن أن تكون في اتجاه واحد مثل الراديو والتليفزيون، أو في اتجاهين مثل التليفونات، أو راديو الهواة، أو الإنترنت وهكذا. هذه المعلومات المنقولة من الممكن أن تكون صوتاً، أو بيانات، أو صور. هذه الاتصالات من الممكن أن تكون في الزمن الحقيقي أو متأخرة.

عندما يكون شخصين على بعد القليل من الأمتار من بعضهما بعضاً فإنهما يستطيعان التواصل صوتياً ببساطة عن طريق الكلام المباشر مع بعضهما بعضاً بدون أي مساعدة تكنولوجية. إذا امتدت المسافة بين الشخصين إلى العشرات من الأمتار، فإنهما قد يحتاجان إلى الصياح وربما استخدام بوق. عندما تصل المسافة بينهما إلى مئات الأمتار فإنه لا بد من تكبير فعال لكي يتم التواصل الصوتي. لكي نتوسع في هذا التفكير إلى مداه، سنفترض أن شخصا كان في ميامي وآخر في سياتل وكل منهما يريد أن يتخاطب مع الآخر. يمكننا نظريا أن نستخدم المكبرات ومضخمات الصوت لزيادة الطاقة الصوتية ولكن نتيجة أن الطاقة الصوتية تتلاشى بسرعة مع زيادة المسافة فإننا بالتأكيد سنحتاج إلى نظام قوي فلكي يمكن من خلاله سماع الصوت عبر هذه المسافة كما في شكل (١٢.١).



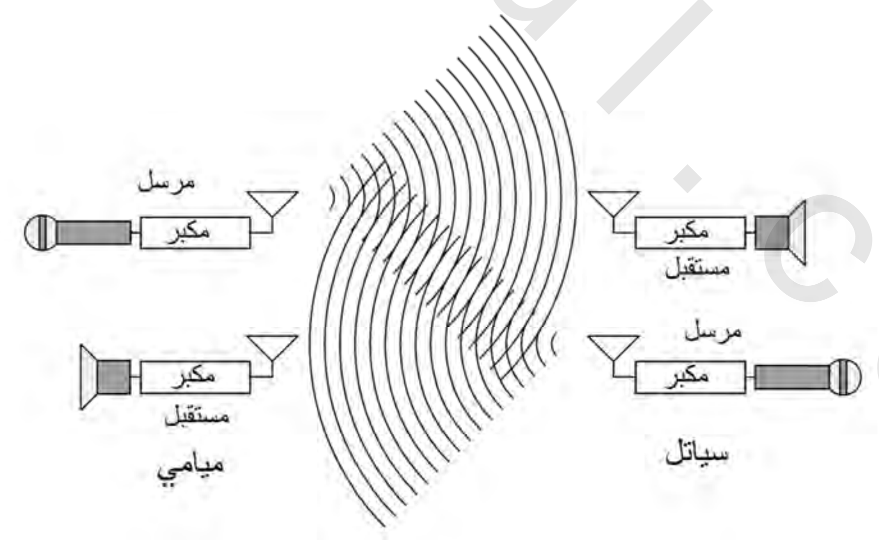
شكل رقم (١٢.١) نظام بدائي للاتصالات.

إذا أمكن سماع الصوت من ميامي إلى سياتل والعكس، مع تكبير صوتي، فإنه قد يكون هناك بعض الشكاوى من الناس في أورلاندو وأسبو، كان من الضوضاء. (لن يكون هناك شكاوى من الناس في ميامي وسياتل لأن الناس قد يكونون قتلوا بسبب الطاقة الصوتية). أيضاً، إذا كانت الاتصالات في الاتجاهين، وبمعلومية سرعة

الصوت في الهواء، فإن الشخص الذي في سياتل سيكون عليه الانتظار ٨ ساعات لكي يستمع إلى الإجابة عن سؤال يكون قد سأله للشخص الذي في ميامي. إذا افترضنا أن ملايين الناس في أمريكا سيتكلمون في الوقت نفسه مع ما يصاحب ذلك من فقد للخصوصية فإننا سنعلم أن مثل هذا النظام سيكون غير مريح على الإطلاق وممل.

أحد الحلول الجيدة للعديد من مثل هذه المشاكل هو استخدام انتشار الطاقة الكهرومغناطيسية لتحمل الرسائل بين الأماكن الكثيرة التباعد. إن سرعة هذه الطاقة أسرع بكثير من سرعة الصوت وبالتالي فإن ذلك سيحل مشكلة التأخير الزمني، ولكن سيصبح لدينا الآن بعض المشاكل الأخرى التي نحتاج لحلها. كيف سنحمل الرسالة الصوتية على الإشارة الكهرومغناطيسية حتى تستطيع الانتشار معها بسرعة انتشار الموجة الكهرومغناطيسية (التي تساوي سرعة الصوت)؟. من الأفكار البسيطة لذلك استخدام ميكروفون، ومكبر، وهوائي، لتحويل الطاقة الصوتية إلى طاقة كهرومغناطيسية كما في شكل (١٢.٢). أي هوائي استقبال عند الطرف الآخر سيقوم بتجميع بعض الطاقة الكهرومغناطيسية المرسلة بحيث يمكن باستخدام مكبر وسماعة تحويل الطاقة الكهرومغناطيسية إلى طاقة صوتية.

هناك مشكلتان كبيرتان تصاحبان مثل هذه الفكرة البسيطة. أولاً: الطيف الترددي للإشارة الصوتية يكون معظمه في المدى 30Hz حتى 300Hz، وحتى البرامج الموسيقية لا تمتد كثيراً بعد الـ 10kHz. لتصميم هوائي يعمل في هذا المجال سيكون طويلاً جداً (ربما يبلغ العديد من الأميال). أيضاً، فإن تغير التردد على مدى 10:1 حتى 1000:1 ربما يعني أن الإشارة سيتم تشويهها نتيجة تغير كفاءة الهوائي مع هذا المدى من التردد. ربما سنحتاج أن نبنى هوائياً طويلاً جداً أو أننا نختار التعايش مع هوائي غير كفء. ولكن المشكلة الثانية تكون هي الأكثر أهمية.



شكل رقم (١٢.٢) نظام اتصالات باستخدام التحويل المباشر من طاقة صوتية إلى كهرومغناطيسية، والعكس.

عن افتراض أن العديد من الناس قد يحتاجون إلى الحديث في الوقت نفسه (وهذا افتراض جيد)، فإنه بعد تحويل الطاقة إلى الطاقة الصوتية مرة أخرى، فإنه ستظل مشكلة سماع كل الناس يتكلمون في الوقت نفسه قائمة لأن كلهم يقومون بعملية الإرسال في الوقت نفس. تخيل أنك أنت وشخص آخر هما الشخصان الموجودان فقط في مطعم كبير وأنكما تجلسان في ركنين متقابلين. إذا أردت التخاطب مع هذا الشخص، فإنه عليك أن ترفع صوتك قليلاً ولكن ذلك لن يكون صعباً. الآن تخيل أن المطعم كان مملوءاً بالزبائن، وأن عليك أن تتخاطب مع نفس الشخص، في هذه الحالة سيكون الأمر صعبا جداً نتيجة هذه الأصوات من كل الزبائن الذين يتكلمون في الوقت نفس. إن هذه هي المشكلة التي تحدث عندما نحاول إرسال إشارات عديدة في عرض المجال نفسه وفي الوقت نفسه.

التعدد الترددي

لقد حلت أنظمة التليفونات القياسية مشكلة فصل الإشارات عن طريق تحديد أو حصر الطاقة الكهرومغناطيسية لكل إشارة لواحد من الكابلات، وهذا الكابل إما أن يكون سلكياً أو شعيرة ضوئية. لقد تم فصل الإشارات مساحياً عن طريق تخصيص وصلة مباشرة بين كل اثنين من المتصلين. ولكن مع التليفونات الخلوية اللاسلكية الحديثة فقد أصبح هذا الحل غير مناسب؛ لأن الطاقة الكهرومغناطيسية أصبحت غير محددة على مسار معين بين سماعة التليفون وأقرب هوائي خلوي. حل آخر من الممكن أن يكون هو تخصيص مجموعة من الفترات الزمنية لكل مرسل وفي هذه الفترات يمنع جميع المرسلين الآخرين من عملية الإرسال. بعد ذلك. لاستقبال الرسالة الصحيحة، فإن المستقبل يجب أن يكون متزامناً مع فترات الإرسال (مع أخذ التأخير نتيجة الانتشار الموجي في الحسبان). هذا الحل يسمى التعدد الزمني time multiplexing. التعدد الزمني يتم استخدامه بكثافة في أنظمة التليفونات حيث تكون الإشارة محددة على كابلات أو في المساحات الخلوية المحلية حيث تستطيع شركة التليفونات أن تتحكم في كل عمليات التزامن وهذه الفترات الزمنية يمكن أن تكون صغيرة جداً بحيث لا يمكن ملاحظتها عن طريق مستخدمي النظام. على الرغم من ذلك فإن نظام التعدد الزمني له بعض المشاكل في أنظمة الاتصالات الأخرى.

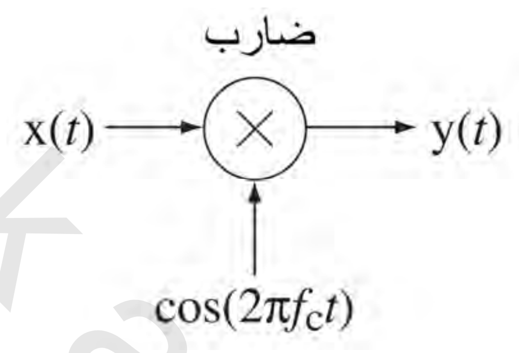
إذا كانت الموجة الكهرومغناطيسية ستنتشر في الفضاء الحر، مع العديد من المرسلات والمستقبلات المستقلة التي يشتمل عليها نظام اتصالات قومي عالمي، فإن التعدد الزمني يصبح غير ممكن عملياً. هناك حل أفضل من ذلك، ومن السهل فهمه عن طريق تحويل فورير، هذا الحل يسمى التعدد الترددي frequency multiplexing وهو يعتمد على طريقة أو تقنية تسمى تقنية أو طريقة التعديل.

التعديل وفك التعديل التماثلي

تعديل المقدار

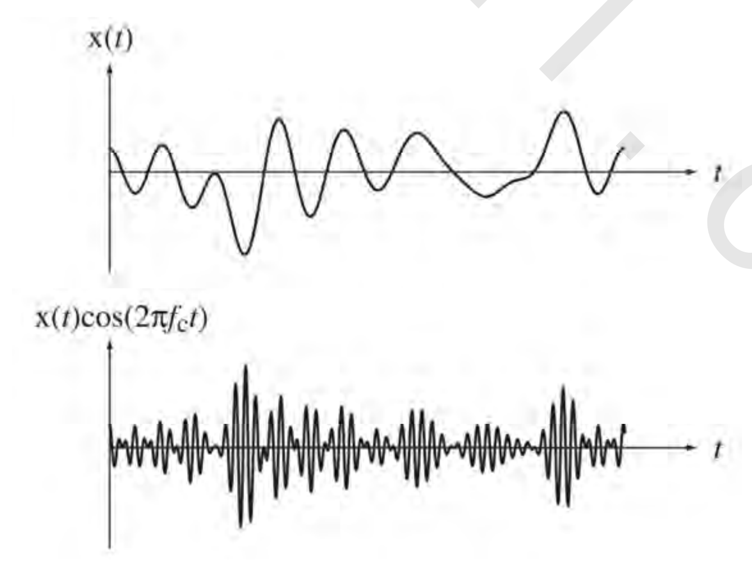
التعديل المقداري ذي الجانبين مع قمع الموجة الحاملة

افترض الإشارة x(t) هي إشارة المعلومات المطلوب إرسالها. إذا قمنا بضرب هذه الإشارة في موجة جيبية كما هو موضح في شكل (١٢.٣) فإننا سنحصل على إشارة جديدة y(t)، تمثل حاصل ضرب الإشارة الأصلية والموجة الجيبية.



شكل رقم (١٢.٣) ضارب تناظري يعمل كمعدل للإشارة.

بلغة أنظمة الاتصالات، فإن الإشارة x(t) تعدل الموجة الحاملة $\cos(2\pi f_c t)$. في هذه الحالة، فإن هذا النوع من التعديل يسمى تعديل المقدار amplitude modulation ؛ لأن مقدار الموجة الحاملة يتم تعديله بمستوى الإشارة x(t) كما في شكل (١٢.٤).



شكل رقم (١٢.٤) الإشارة المعدلة x(t) والموجة الحاملة التي تم تعديلها $y(t)=x(t)\cos(2\pi f_c t)$.

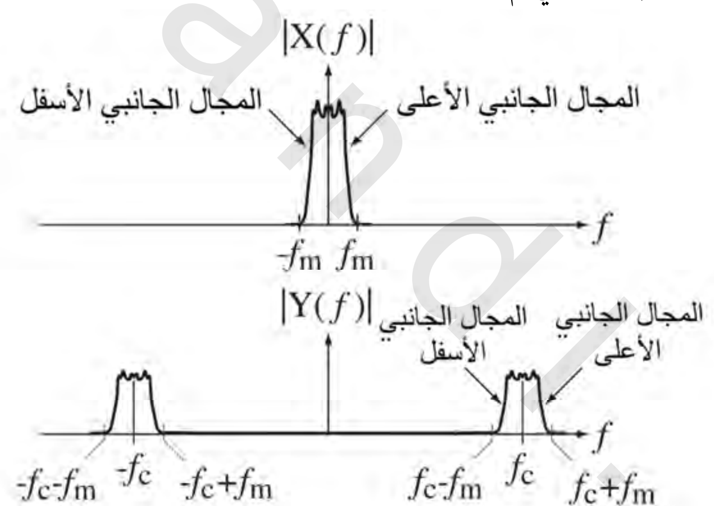
خرج عملية التعديل هو $y(t)=x(t)\cos(2\pi f_c t)$. بإجراء تحويل فورير على طرفي هذه المعادلة نحصل على :

$$Y(f) = X(f) * (1/2)[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

أو :

$$Y(f) = (1/2)[X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$

هذا النوع من التعديل يكون تأثيره ببساطة هو إزاحة طيف الإشارة المعدلة بعد وقبل الموجة الحاملة f_c في المجال الترددي كما في شكل (١٢.٥). لذلك فإن العملية التي بدت مركبة في النطاق الزمني أصبحت تبدو واضحة وبسيطة في النطاق الترددي، وهذه أحد مميزات التحليل في النطاق الترددي. هذا النوع من التعديل المقداري يسمى التعديل ذا الجانبين مع قمع الموجة الحاملة double sideband suppressed carrier, DSBSC وهو الأبسط في التحليل الحسابي. الجانبان أو النطاقان هما جزءا إشارة المعلومات في الطيف الترددي. في عملية التعديل يتم نقل أو تحويل مجال هذه الإشارة إلى جانبين أو نطاقين فوق وتحت التردد $\pm f_c$. أما عبارة قمع الموجة الحاملة فنقصد بها حقيقة أنه لا يوجد موجة حاملة في طيف الإشارة التي تم تعديلها.



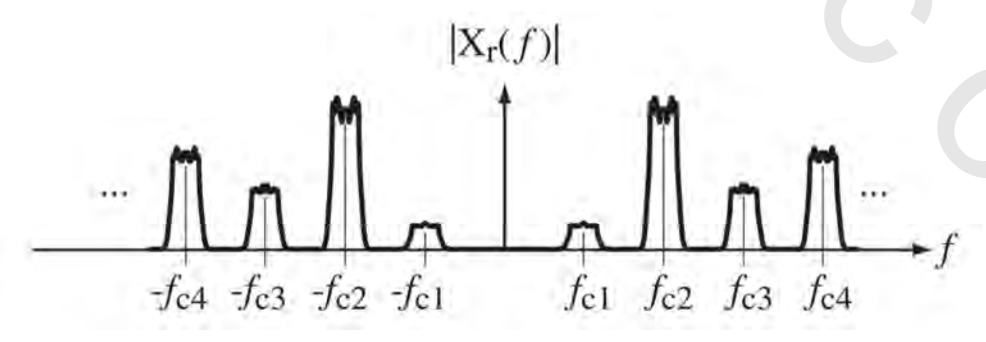
شكل رقم (١٢.٥) الإشارة المعدلة والموجة الحاملة المتعدلة في النطاق الترددي.

نظرية نظم الاتصالات تفرق بين نوعين شائعين من تراسل الإشارات هما: مجال القاعدة baseband أو تردد الراديو radio frequency, RF، ومجال المرور أو السماح passband. إشارة مجال القاعدة يكون لها طيف ترددي (فورير) يمتد من التردد صفر حتى تردد منخفض نسبيا. إشارة تردد الراديو RF تتولد عن طريق تعديل موجة حامل عالية التردد بإشارة مجال القاعدة. في مثالنا السابق تمثل الإشارة x(t) إشارة مجال أو نطاق القاعدة وتمثل الإشارة y(t) إشارة تردد الراديو RF.

تعديل DSBSC لا يستخدم عملياً كثيراً، وعلى الرغم من ذلك، فإن فهم هذه الطريقة من التعديل يكون مهماً جداً لفهم الطرق الأكثر شيوعاً من طرق التعديل، ولذلك فهي تعتبر نقطة بداية جيدة. لقد حققنا حتى الآن هدفاً واحداً وهو أن طيف الإشارة الأصلية، الذي يبدأ في نطاق الترددات المنخفضة، قد تمت إزاحته إلى نطاق جديد يمكن وضعه عند أي وضع نريده عن طريق اختيار تردد الموجة الحاملة.

إن حل مشكلة أن كل واحد كان يتكلم في النطاق الترددي نفسه أصبح عن طريق أن كل واحد من المتكلمين يستخدم نطاقاً ترددياً مختلفاً عن الآخر باستخدام موجة حاملة مختلفة. افترض حالة التعديل المقداري AM في الإذاعة. هناك العديد من محطات الإرسال الموجودة في أي منطقة جغرافية والتي تذيع كلها في الوقت نفسه. كل محطة أو كل إذاعة مخصص لها مجال ترددي تقوم بالإذاعة فيه. كل مجال أو كل نطاق من هذه النطاقات يكون عرضه حوالي 20kHz. ولذلك فإن محطة الراديو تقوم بتعديل موجة حاملة عن طريق إشارة البرامج الخاصة بها (إشارة نطاق القاعدة). تكون الموجة الحاملة في مركز النطاق الترددي الخاص بهذه المحطة. بذلك تقوم الموجة الحاملة المتعدلة بتشغيل المرسل. إذا كان عرض المجال الخاص بإشارة نطاق القاعدة أقل من 10kHz، فإن إشارة برامج المحطة ستقع بالكامل في النطاق الترددي المخصص لهذه المحطة. في الجانب الآخر على المستقبل أن يختار محطة واحدة ليستمع إليها ويهمل كل المحطات الأخرى. الهوائي عند المستقبل يستقبل الطاقة القادمة من محطات الإزاعة ويحولها إلى فرق جهد عند طرفيه. ولذلك فإن المستقبل يقوم في الحقيقة باختيار أحد النطاقات الترددية الخاصة بواحدة من المحطات ليستمع إليها ويهمل كل المحطات الأخرى.

هناك العديد من الطرق لاختيار إحدى المحطات للاستماع إليها. ولكن أكثر هذه الطرق شيوعاً هي استخدام فكرة التعديل مرة أخرى، ولكن في هذه الحالة، فإن هذه العملية تسمى فك التعديل أو الكشف demodulation حيث أننا نقوم باستخلاص إشارة مجال القاعدة مرة أخرى. افترض أن الإشارة المستقبلة عند خرج هوائي المستقبل هي $x_r(t)$ التي تحتوي العديد من محطات الإذاعة في هذا النطاق الجغرافي وأن طيف إشارة الهوائي ستكون كما هو موضح في شكل (١٢.٦).



شكل رقم (١٢.٦) طيف الإشارة المستقبلة عن طريق هوائي المستقبل.

افترض أن المحطة التي نريد سماعها هي المحطة المتمركزة عند f_{c3}. إذا ضربنا إشارة الهوائي في موجة جيبية عند هذا التردد فإننا سنحصل على الإشارة المستخلصة $y_r(t)$ كما يلي:

$$y_r(t) = X_r(t)cos(2\pi f_c t) = A\begin{bmatrix} X_1(t)cos(2\pi f_{c1}t) + X_2(t)cos(2\pi f_{c2}t) \\ + \cdots + X_N(t)cos(2\pi f_{cN}t) \end{bmatrix} cos(2\pi f_{c3}t)$$

أو:

$$y_r(t) = A\sum_{k=1}^{N} X_k(t)cos(2\pi f_{ck}t)\, cos(2\pi f_{c3}t)$$

يمكن كتابة هذه المعادلة في النطاق الترددي كما يلي:

$$Y_r(f) = A\left\{\sum_{k=1}^{N} X_k(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_{ck}) + \delta(f + f_{ck})]\right\} * \frac{1}{2}[\delta(f - f_{c3}) + \delta(f + f_{c3})]$$

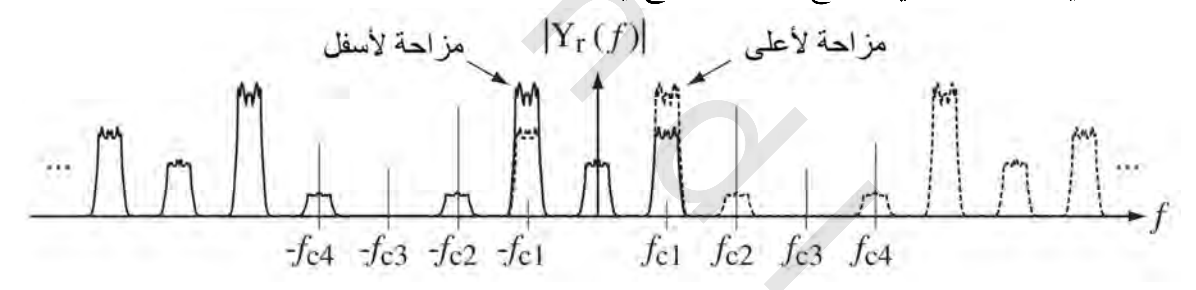
أو:

$$Y_r(f) = \frac{A}{4}\sum_{k=1}^{N} X_k(f) * \begin{bmatrix} \delta(f - f_{c3} - f_{ck}) + \delta(f + f_{c3} - f_{ck}) \\ +\delta(f - f_{c3} + f_{ck}) + \delta(f + f_{c3} + f_{ck}) \end{bmatrix}$$

أو:

$$Y_r(f) = \frac{A}{4}\sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} X_k(f - f_{c3} - f_{ck}) + X_k(f + f_{c3} - f_{ck}) \\ +X_k(f - f_{c3} + f_{ck}) + X_k(f + f_{c3} + f_{ck}) \end{bmatrix}$$

هذه النتيجة تبدو لأول نظرة معقدة ولكنها غير ذلك. للمرة الثانية، ما حدث هو إزاحة للإشارة المستقبلة فوق وتحت في النطاق الترددي والجمع كما هو موضح في شكل (١٢.٧).



شكل رقم (١٢.٧) إشارة المستقبل بعد عملية فك التعديل أو الكشف

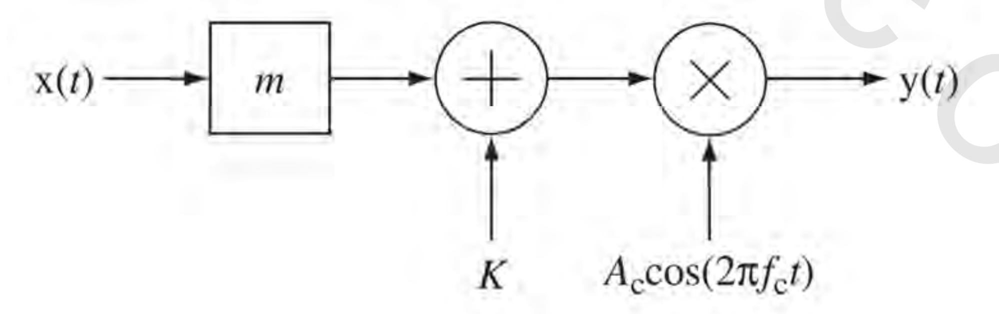
لاحظ أن طيف المعلومات الذي كان متمركزاً عند f_{c3} قد أزيح لأعلى ولأسفل وأصبح الآن متمركزا عند الصفر (وأيضاً عند $\pm f_{c3}$). يمكننا الآن استرجاع الإشارة الأصلية التي تمت إزاحتها عند المرسل إلى النطاق f_{c3} باستخدام مرشح منفذ للترددات المنخفضة يسمح بتمرير طاقة الإشارة التي تقع في نطاق المعلومات المطلوبة، والتي أصبحت متمركزة الآن عند التردد صفر. إن ذلك ليس بالضبط هو كيفية عمل مستقبل الـ AM، ولكن العديد من هذه العمليات يتم استخدامها. عملية فك التعديل أوالكشف هذه تعتبر مثالاً جيداً على مميزات استخدام طرق التحويل التي تحتوي على الترددات السالبة. في هذه الحالة بعض القمم الطيفية تتم إزاحتها من الترددات السالبة إلى الموجبة والعكس وتوضح مباشرة الإشارة المستخلصة الصحيحة.

مشكلة وحيدة تصاحب هذه الطريقة هي أن الموجة الجيبية f_{c3} المستخدمة في عملية فك التعديل أو الكشف، والتي يتم الحصول عليها باستخدام ما يسمى المذبذب الموضعي local oscillator عند المستقبل، لا يجب أن تكون فقط مساوية تماما لـ f_{c3} الصحيحة ولكنها يجب أن تكون لها نفس الزاوية أو الطور مثل الموجة الحاملة المستقبلة تماماً حتى تكون عملية الاستخلاص جيدة. إذا حدث تغير طفيف أو إزاحة طفيفة في تردد المذبذب الموضعي فإن نظام الاستقبال لن يعمل كما يجب. هناك نغمة أو صفارة مزعجة تسمى تردد الفرق سيتم سماعها كلما كان هناك إزاحة في التردد الصحيح للمذبذب الموضعي. هذا التردد الفرقي هو الفرق بين تردد الموجة الحاملة وتردد المذبذب الموضعي. لذلك فإنه لكي يعمل هذا النظام بصورة جيدة فإن تردد المذبذب الموضعي وطوره يجب أن تتساويا تماماً مع تردد وطور الموجة الحاملة. إن ذلك يتم تحقيقه عادة باستخدام ما يسمى بحلقة حصر الطور phase locked loop. هذا النوع من الاستخلاص يسمى الاستخلاص المتزامن؛ لأن كل من الموجة الحاملة والمذبذب الموضعي يجب أن يكونا عند الطور نفسه ، أي متزامنين.

إننا نستخدم كلمة ضبط أو تنغيم جهاز الراديو لاختيار المحطة المطلوبة. عندما نتناغم مع محطة فإننا ببساطة نغير من تردد المذبذب الموضعي في جهاز الاستقبال لجعل واحدة من المحطات المختلفة متمركزة عند الصفر (عند مجال القاعدة). كما سنرى في الجزء التالي، هناك طرق أبسط وأكثر اقتصادية لإجراء عملية الاستخلاص المستخدمة في العديد من أجهزة استقبال AM القياسية.

التعديل ثنائي المجال مع إرسال الموجة الحاملة

كما ذكرنا في الجزء السابق، فإن التعديل مزدوج المجال مع قمع الموجة الحاملة لا يستخدم بكثرة. هناك طريقة للتعديل تستخدم بكثرة وهي طريقة التعديل المزدوج المجال مع إرسال الموجة الحاملة double sided transmitted carrier, DSBTC. تستخدم هذه الطريقة عن طريق أجهزة تراسل الراديو AM التجارية وفي معظم أجهزة إرسال الموجة القصيرة الدولية. هذه الطريقة تشبه كثيراً طريقة DSBSC، الفرق الوحيد بينهما هو في ضرب إشارة التعديل في معامل m وإضافة قيمة ثابتة K على الإشارة x(t) قبل عملية التعديل كما في شكل (١٢.٨).



شكل رقم (١٢.٨) التعديل مزدوج المجال مع إرسال الموجة الحاملة.

الثابت K هو رقم موجب يتم اختياره ليكون كبيراً بدرجة كافية بحيث عند إضافته على الكمية mx(t)، فإن المجموع لن يكون سالباً على الإطلاق. في هذه الطريقة تسمى m معامل التعديل أو مؤشر التعديل. (لمعظم إشارات التعديل إذا كان أكبر مقدار سالب هو K−، فإن أكبر مقدار موجب سيكون تقريبا K+). إشارة الخرج من هذا النظام للتعديل ستكون كما يلي وكما هو مبين في شكل (١٢.٩):

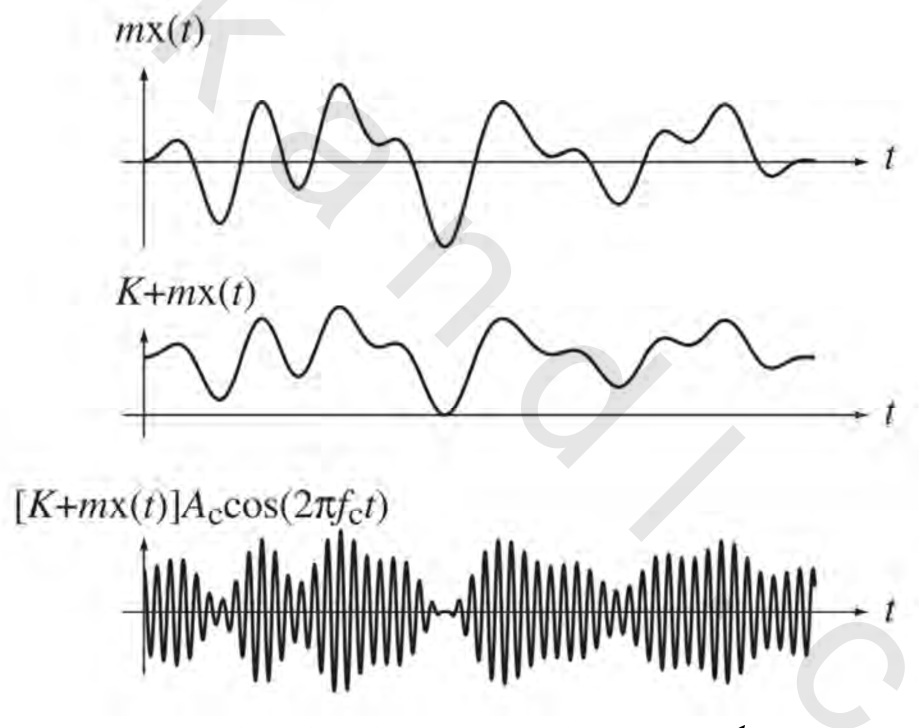
$$y(t) = [k + mx(t)]A_c\cos(2\pi f_c t)$$ المعادلة رقم (١٢.١)

بإجراء تحويل فورير للمعادلة (١٢.١) نحصل على:

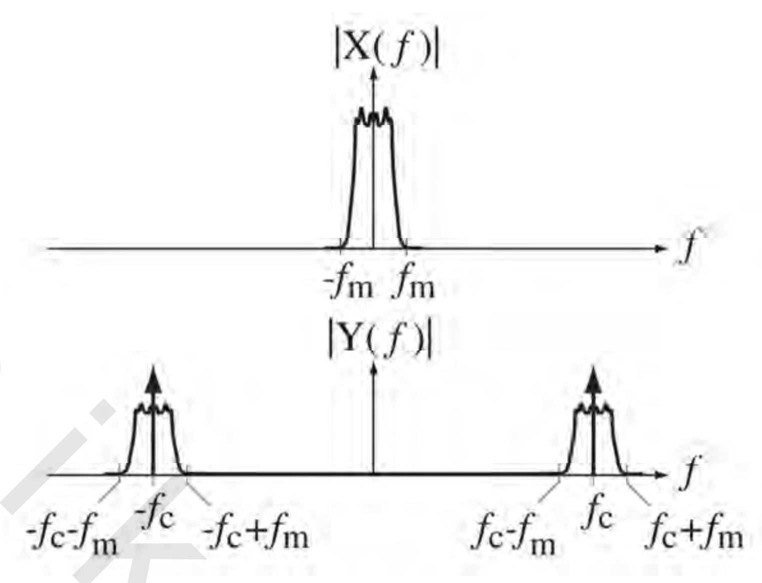
$$Y(f) = [K\delta(f) + mX(f)] * (A_c/2)[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

أو وكما في شكل (١٢.١٠):

$$Y(f) = (KA_c/2)\{[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + m[X(f - f_c) + X(f + f_c)]\}$$

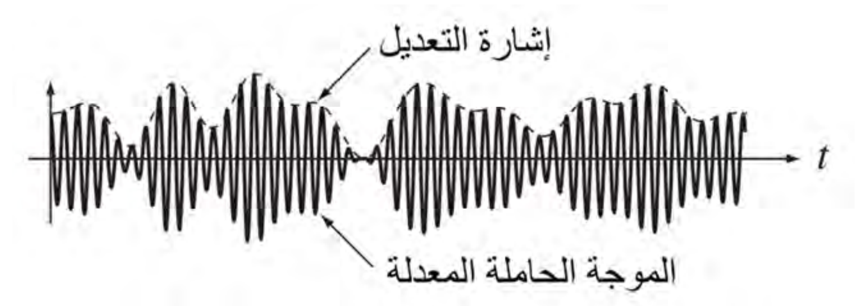


شكل رقم (١٢.٩) نظام تعديل DSBTC والموجة الحاملة المتعدلة.

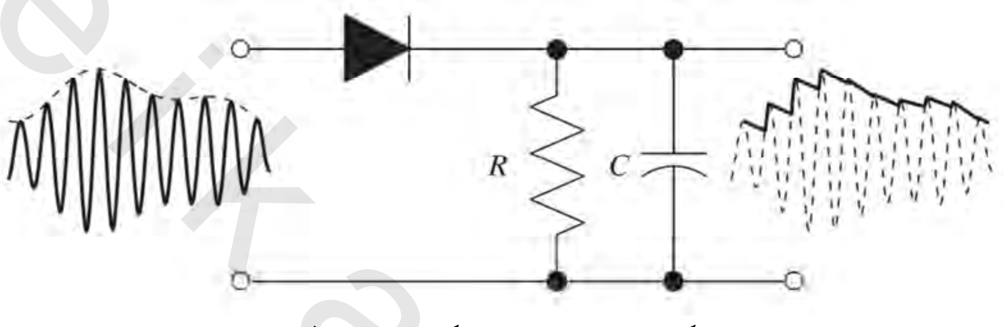


شكل رقم (١٢.١٠) طيف إشارة مجال القاعدة وإشارة DSBTC

بالنظر إلى الطيف الموجود في شكل (١٢.١٠) يمكننا أن نرى من أين أتى الإسم "مع إرسال الموجة الحاملة" حيث نلاحظ أن هناك صدمة عند تردد الموجة الحاملة مما يعني وجود هذه الموجة حيث لم تكن موجودة أصلا في تعديل DSBSC. من الطبيعي أن نتعجب لماذا تستخدم هذه الطريقة من التعديل بكثرة عن الطريقة السابقة، مع العلم أنها تتطلب بناء نظام أكثر تعقيداً. السبب وراء ذلك هو أنه على الرغم من أن طريقة DSBTC في التعديل تكون أكثر تعقيداً من طريقة DSBSC، فإن استخلاص الإشارة من ال DSBTC يكون أكثر بساطة من استخلاصها من DSBSC. لكل محطة راديو تجارية من النوع AM يوجد هناك جهاز إرسال واحد يقوم بتعديل الموجة الحاملة باستخدام إشارة مجال القاعدة، والآلاف بل الملايين من أجهزة الاستقبال تقوم باستخلاص الإشارة من إشارة الموجة الحاملة المتعدلة. استخلاص DSBTC يكون أبسط كثيراً باستخدام دائرة تسمى كاشف الغلاف envelop detector، وطريقة عمل هذه الدائرة يمكن فهمها من النطاق الزمني. في تعديل DSBTC، تكون الموجة الحاملة متتبعة لشكل إشارة مجال القاعدة مع القمم الموجبة (والسالبة) لتذبذب الموجة الحاملة كما في شكل (١٢.١١). دائرة الكشف عن الغلاف هي دائرة تقوم باستشعار وتتبع قمم المجة الحاملة المتعدلة، وبالتالي تعطي شكل إشارة مجال القاعدة تقريباً كما في شكل (١٢.١٢).



شكل رقم (١٢.١١) العلاقة بين إشارة مجال القاعدة والموجة الحاملة المتعدلة .

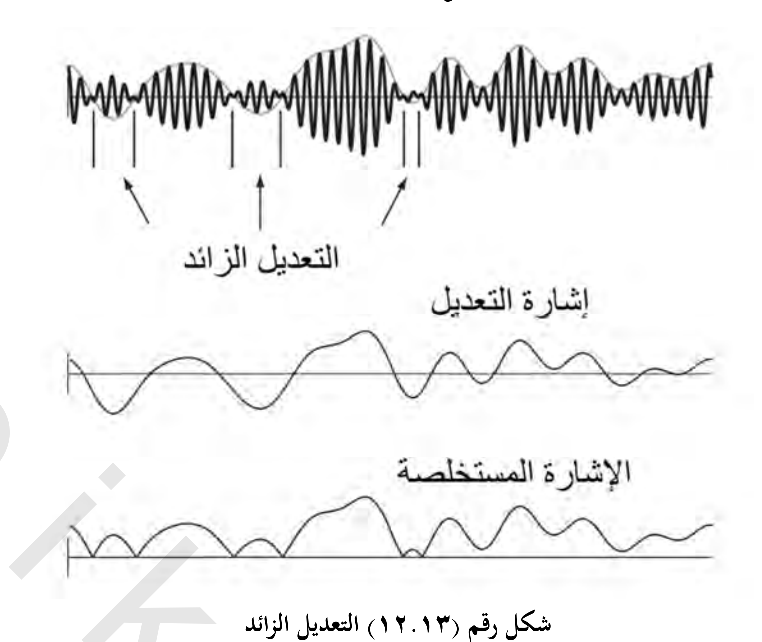


شكل رقم (١٢.١٢) دائرة الكشف عن الغلاف .

إن إعادة إنتاج إشارة مجال القاعدة المعروضة في شكل (١٢.١٢) ليست جيدة جداً ولكنها توضح مفهوم تشغيل دائرة كاشف الغلاف. في الممارسة العملية يكون تردد الموجة الحاملة أعلى كثيراً مما هو معروض في هذا الشكل ويكون إنتاج إشارة مجال القاعدة أفضل كثيراً جداً. إن شرح طريقة عمل هذه الدائرة يتم عادة في النطاق الزمني، وذلك لأن كاشف الغلاف هو نظام غير خطي وبالتالي، فإن نظريات النظم الخطية تكون غير مطبقة هنا. في هذه الحالة لا تكون هناك حاجة لشرط التزامن أو المذبذب الموضعي للكشف عن الغلاف لذلك فإن هذه الطريقة من التعديل تسمى التعديل غير التزامني.

إشارة DSBTC يمكن فك تعديلها أو كشفها أيضاً بطريقة فك التعديل نفسها أو الكشف المستخدمة مع DSBSC المقدمة في الجزء السابق باستخدام مذبذب موضعي يولد موجة جيبية متزامنة مع الموجة الحاملة. دائرة الكشف عن الغلاف تكون أبسط كثيراً وأقل تكلفة.

إذا كانت m كبيرة جداً، وكانت K صغيرة جداً، فإن المقدار K+mx(t) ستكون سالبة ويحدث تعديل زائد وستفشل دائرة الكشف عن الغلاف في استخلاص الإشارة الأصلية بدون بعض التشويه كما في شكل (١٢.١٣).

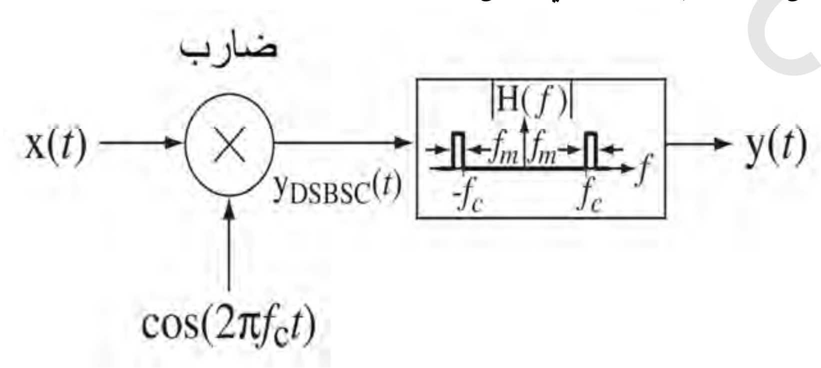


شكل رقم (١٢.١٣) التعديل الزائد

التعديل أحادي المجال مع قمع الموجة الحاملة

مقدار الطيف X(f) لأي إشارة حقيقية x(t) تكون له الخاصية X(f)=X*(-f). لذلك فإن المعلومات الموجودة في X(f) عندما f≥0 تكون كافية لإعادة تشكيل الإشارة تماماً. هذه الحقيقة تدعم مفهوم التعديل أحادي المجال مع قمع الموجة الحاملة single sideband suppressed carrier, SSBSC. في تعديل الـ DSBSC يكون مقدار الطيف متمركزاً عند الموجة الحاملة (وعند سالب الموجة الحاملة أيضاً) يكون به معلومات من X(f) تمتد على المدى $-f_m<f<f_m$. ولكن مع التصميم الصحيح لجهاز الاستقبال فإنه يمكننا إرسال نصف الطيف فقط. ميزة إرسال نصف الطيف هي أننا سنحتاج إلى نصف عرض المجال المستخدم مع تعديل DSBSC.

المعدل SSBSC يكون هو نفسه تقريباً مثل المعدل DSBSC. الفرق هو مرشح يتخلص من إما المجال الجانبي الأعلى أو الأسفل قبل عملية الإرسال كما في شكل (١٢.١٤).



شكل رقم (١٢.١٤) تعديل بمجال جانبي واحد مع قمع الموجة الحاملة.

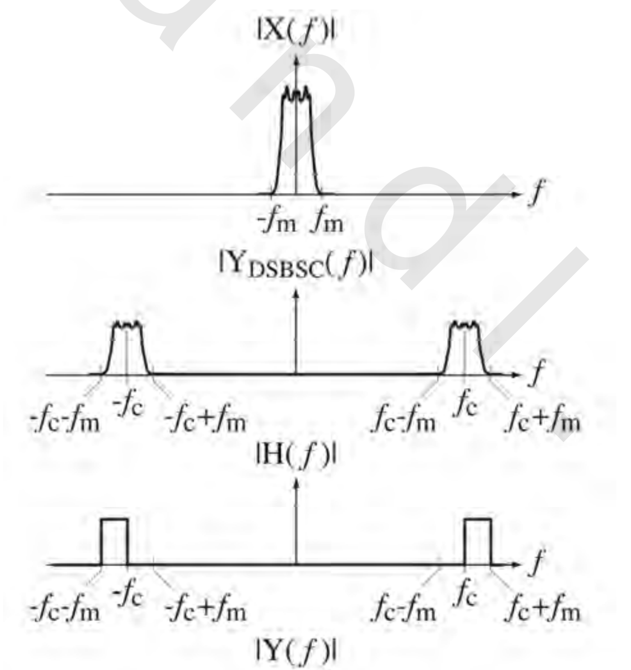
الاستجابة من الضارب هي نفسها كما كانت في حالة DSBSC فيما سبق $y_{DSBSC}(t)=x(t)\cos(2\pi f_c t)$. في النطاق الترددي يكون مقدار طيف الاستجابة يساوي $Y_{DSBSC}(f)=(1/2)[X(f-f_c)+X(f+f_c)]$. المرشح في شكل (١٢.١٤) يتخلص من المجال الجانبي الأسفل ويترك المجال الجانبي الأعلى. طيف المقدار الناتج سيكون $Y(f)=(1/2)[X(f-f_c)+X(f+f_c)]H(f)$ كما في شكل (١٢.١٥).

إذا تم ترشيح هذه الإشارة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة فإننا نحصل على الطيف الأصلي. لقد تم استرجاع الإشارة الأصلية بالكامل لأن كل المعلومات موجودة في المجال الجانبي المتبقي. هذا النوع من التعديل يمكن فهمه بسهولة باستخدام تحليل النطاق الترددي أفضل من استخدام النطاق الزمني.

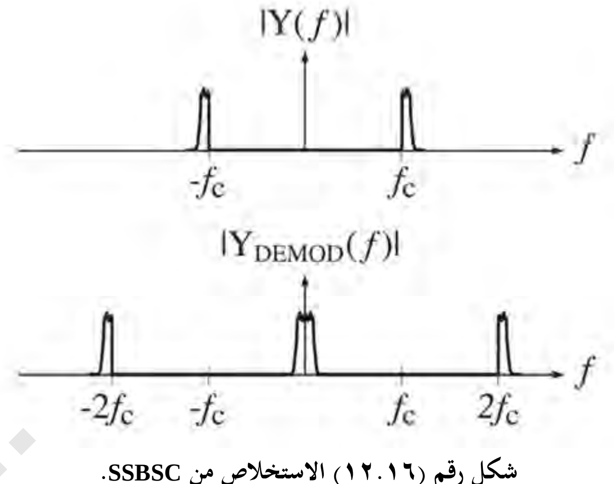
التعديل الزاوي Angle modulation

كل أفكار التعديل التي تم استعراضها مسبقا تغير من مقدار الموجة الحاملة بالتناسب مع مقدار إشارة المعلومات. التعديل الزاوي هو صورة بديلة من التعديل مع بعض المميزات على تعديل المقدار. في التعديل الزاوي بدلاً من استخدام إشارة المعلومات في تعديل مقدار الموجة الحاملة، فإنها تستخدم في تعديل زاوية طور الموجة الحاملة. أفترض أن الموجة الحاملة ستكون على الصورة:

$$A_c\cos(\omega_c t)$$



شكل رقم (١٢.١٥) طريقة عمل تعديل ال SSBSC



شكل رقم (١٢.١٦) الاستخلاص من SSBSC.

وافترض أن الموجة الحاملة المعدلة ستكون على الصورة:

$$y(t) = A_c\cos(\theta_c(t))$$

أو:

$$y(t) = A_c\cos(\omega_c t + \Delta\theta(t))$$

حيث $\theta_c(t)=\omega_c t+\Delta\theta(t)$ و $\omega_c(t)=2\pi f_c$. هناك جزءان في طور هذه الإشارة، طور الموجة الحاملة غير المعدلة $\omega_c t$ والتباعد من هذا الطور وهو $\Delta\theta(t)$. إذا افترضنا أن $\Delta\theta(t)=k_p x(t)$ حيث $x(t)$ هي إشارة المعلومات، تعديل الطور يسمى تعديل الزاوية phase modulation, PM.

في الموجة الحاملة غير المعدلة يكون التردد الزاوي هو w_c راديان. إذا قمنا بتفاضل المعامل الجيبي $\omega_c t$ للموجة الحاملة غير المعدلة بالنسبة للزمن، سنحصل على الثابت w_c. ولذلك فإن أحد طرق تعريف التردد الزاوي للدالة الجيبية هو تفاضل معامل هذه الدالة الجيبية بالنسبة للزمن. بالطريقة نفسها يمكننا تعريف التردد الدوري بأنه تفاضل معامل الدالة الجيبية بالنسبة للزمن مقسوما على 2π. إذا طبقنا هذا التعريف على الزاوية المعدلة $\theta_c(t)=\omega_c t+\Delta\theta(t)$، فإننا سنحصل على دالة زمنية تعرف بأنها الترددي الفوري أو اللحظي.

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}(\theta_c(t)) = \omega_c + \frac{d}{dt}(\Delta\theta(t))$$

أو:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(\theta_c(t)) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}(\Delta\theta(t))$$

في حالة التعديل الزاوي يكون التردد الزاوي اللحظي هو:

$$\omega(t) = \omega_c + k_p\frac{d}{dt}(X(t))$$

إذا كان بدلاً من التحكم التناسبي في تباعد الطور باستخدام إشارة المعلومات، نقوم بالتحكم التناسبي في تفاضل هذا الطور باستخدام إشارة المعلومات، وبالتالي:

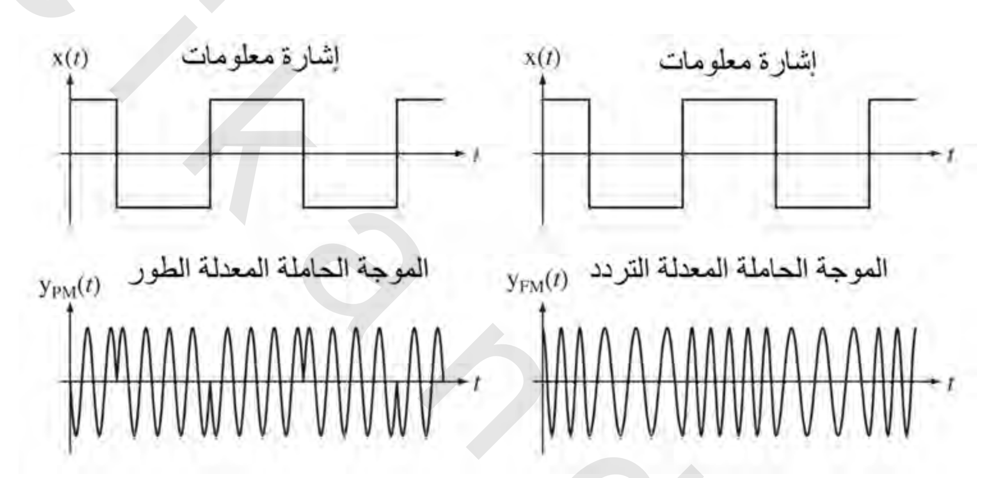
$$\frac{d}{dt}\big(\Delta\theta(\mathrm{t})\big) = K_f X(\mathrm{t})$$

وسيكون التردد الزاوي والتردد الدوري اللحظيين كما يلي:

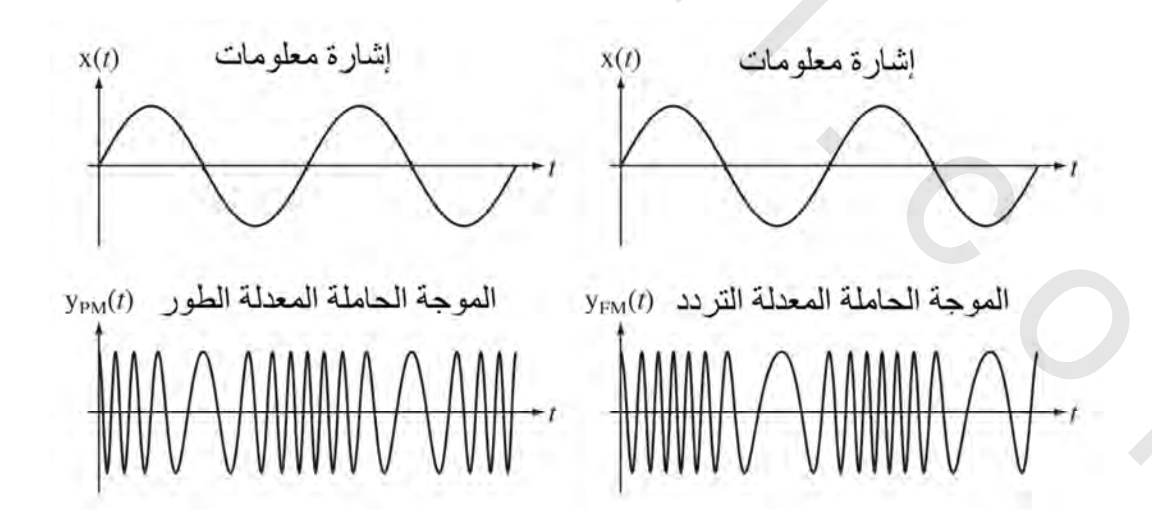
$$\omega(\mathrm{t}) = \omega_c + \mathrm{k}_f X(\mathrm{t}) \quad \text{و} \quad f(\mathrm{t}) = f_c + \frac{\mathrm{k}_f}{2\pi} X(\mathrm{t})$$

هذا النوع من التعديل الزاوي يسمى التعديل الترددي frequency modulation, FM؛ لأن إشارة المعلومات تتحكم تناسبياً في التردد اللحظي للموجة الحاملة.

لكي نفهم التعديل الزاوي من المفيد أن نرى أشكالاً لإشارات المعلومات والموجة الحاملة المعدلة الناتجة من هذا التعديل على نمط التدريج الزمني بغرض المقارنة كما في شكل (١٢.٧) وشكل (١٢.٨).



شكل رقم (١٢.١٧) التعديل الزاوي بموجة مربعة والتعديل الترددي للموجة الحاملة.



شكل رقم (١٢.١٨) التعديل الزاوي بموجة جيبية والتعديل الترددي للموجة الحاملة.

الهدف التالي هو إيجاد طيف كل من الإشارتين PM و FM. عندما وجدنا طيف الإشارة AM كانت نسخاً مزاحة وموزونة من طيف إشارة المعلومات. ولقد حدث ذلك نتيجة أن التعديل المقداري AM يشتمل على عمليات الضرب و/أو الالتفاف و/أو الجمع. الضرب في النطاق الزمني يقابله التفاف في النطاق الترددي، والالتفاف في النطاق الزمني يقابله ضرب في النطاق الترددي، وأما الجمع فلا يتغير في كلا النطاقين. طيف الإشارتين PM و FM ليسا ببساطة طيف الـ AM لأنه في هذه المرة لا يحدث التعديل نتيجة الضرب، أو الالتفاف أو الجمع. بالنسبة للتعديل الزاوي أو الطوري لدينا ما يلي:

$$y_{PM}(\mathrm{t}) = A_c\cos\left(\omega_c\mathrm{t} + \mathrm{k}_p\ \mathrm{x(t)}\right)$$

وسيكون التعديل الترددي كما يلي:

$$y_{FM}(\mathrm{t}) = A_c\cos\left(\omega_c\mathrm{t} + \mathrm{k}_f\ \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{x(T)\ d_\tau}\right)$$

ليس هناك تعبير مبسط للـ CTFT لهذه الإشارات في الحالة العامة. باستخدام العلاقة المثلثية التالية:

$$\cos(x+y) = cos\ (\mathrm{x})cos\ (\mathrm{y}) - \sin(x)sin\ (\mathrm{y})$$

يمكننا التعبير عن الإشارة المعدلة كما يلي:

$$y_{PM}(\mathrm{t}) = A_c\left[\cos(\ \omega_c\mathrm{t})cos\ \left(\mathrm{k}_p\ \mathrm{x(t)}\right) - \sin(\ \omega_c\mathrm{t})sin\ \left(\mathrm{k}_p\ \mathrm{x(t)}\right)\right]$$

وأيضاً:

$$y_{FM}(\mathrm{t}) = A_c\left[\cos(\ \omega_c\mathrm{t})cos\ \left(\mathrm{k}_f\ \int_{t_0}^{t} X\ (T)dt\right) - \sin(\ \omega_c\mathrm{t})sin\ \left(\mathrm{k}_f\ \int_{t_0}^{t} X\ (T)dt\right)\right]$$

إذا كان كل من $\mathrm{k_p}$ و $\mathrm{k_f}$ صغيرين بما فيه الكفاية، فإن:

$$cos\ \left(\mathrm{k}_p\ \mathrm{x(t)}\right) \cong \quad \text{و} \quad sin\ \left(\mathrm{k}_p\ \mathrm{x(t)}\right) \cong \mathrm{k}_p\ \mathrm{x(t)}$$

وبالتالي:

$$\cos\left(\mathrm{k}_f\ \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{x(T)\ dT}\right) \cong 1\ and\ \ sin\left(\mathrm{k}_f\ \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{x(T)\ d_\tau}\right) \cong \mathrm{k}_f\ \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{x(T)\ dT}$$

وعلى ذلك فإن:

$$y_{PM}(\mathrm{t}) \cong A_c[\cos(\ \omega_c\mathrm{t}) - \mathrm{k}_p\ \mathrm{x(t)}\sin(\ \omega_c\mathrm{t})]$$

وأيضاً:

$$y_{FM}(\mathrm{t}) \cong A_c\left[\cos(\ \omega_c\mathrm{t}) - \ sin(\ \omega_c\mathrm{t})\ \mathrm{k}_f\ \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{x(T)\ dT}\right]$$

هذه التقريبات تسمى التعديل الطوري PM الضيق المجال narrowband، والتعديل الترددي FM الضيق المجال. يمكننا إيجاد تحويلات فورير لهذه التقريبات:

$$Y_{PM}(\mathrm{j}\omega) \cong (A_c/2)\{2\pi[\delta(\omega-\ \omega_c) + \delta(\omega+\ \omega_c)] -\ jk_P\ \ [X\big(j(\omega+\ \omega_c)\big) - X\big(j(\omega-\ \omega_c)\big)]\}$$

وأيضاً:

$$Y_{FM}(\mathrm{j}\omega) \cong (A_c/2)\left\{2\pi[\delta(\omega-\ \omega_c) + \delta(\omega+\ \omega_c)] -\ \mathrm{k}_f\ \ \left[\frac{X(j(\omega+\omega_c))}{\omega+\omega_c} - \frac{X(j(\omega-\omega_c))}{\omega-\omega_c}\right]\right\}$$

أو في الصورة الترددية:

$$Y_{PM}(f) \cong (A_c/2)\{[\delta(f-\ f_c) + \delta(f+\ f_c)] -\ jk_P\ \ [X(f+\ f_c) - X(f-\ f_c)]\}$$

وأيضاً :

$$Y_{FM}(f) \cong (A_c/2)\left\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] - \frac{k_f}{2\pi}\left[\frac{X(f+f_c)}{f+f_c} - \frac{X(f-f_c)}{f-f_c}\right]\right\}$$

باستخدام خاصية التكامل في تحويل فورير (حيث تم افتراض أن القيمة المتوسطة ل x(t) تساوي صفراً).

إذا كانت إشارة المعلومات هي إشارة جيبية على الصورة :

$$X(t) = A_m\, cos(\omega_m\, t) = A_m\, cos(2\pi f_m\, t)$$

فإن :

$$X(f) = (A_m/2)[\delta(f-f_m) + \delta(f+f_m)]$$

وأيضاً :

$$Y_{PM}(f) \cong (A_c/2)\left\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] - \frac{jA_m k_p}{2}\begin{bmatrix}\delta(f+f_c-f_m)+\delta(f+f_c+f_m)\\ -\delta(f-f_c-f_m)-\delta(f-f_c+f_m)\end{bmatrix}\right\}$$

و :

$$Y_{PM}(f) \cong (A_c/2)\left\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] - \frac{A_m k_f}{4\pi}\begin{bmatrix}\frac{\delta(f+f_c-f_m)}{f+f_c}+\frac{\delta(f+f_c+f_m)}{f+f_c}\\ -\frac{\delta(f-f_c-f_m)}{f-f_c}-\frac{\delta(f-f_c+f_m)}{f-f_c}\end{bmatrix}\right\}$$

أو باستخدام خاصية التكافؤ للصدمة :

$$Y_{FM}(f) \cong (A_c/2)\left\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] - \frac{A_m k_f}{4\pi f_m}\begin{bmatrix}\delta(f+f_c-f_m)-\delta(f+f_c+f_m)\\ -\delta(f-f_c-f_m)+\delta(f-f_c+f_m)\end{bmatrix}\right\}$$

أنظر شكل (١٢.١٩).

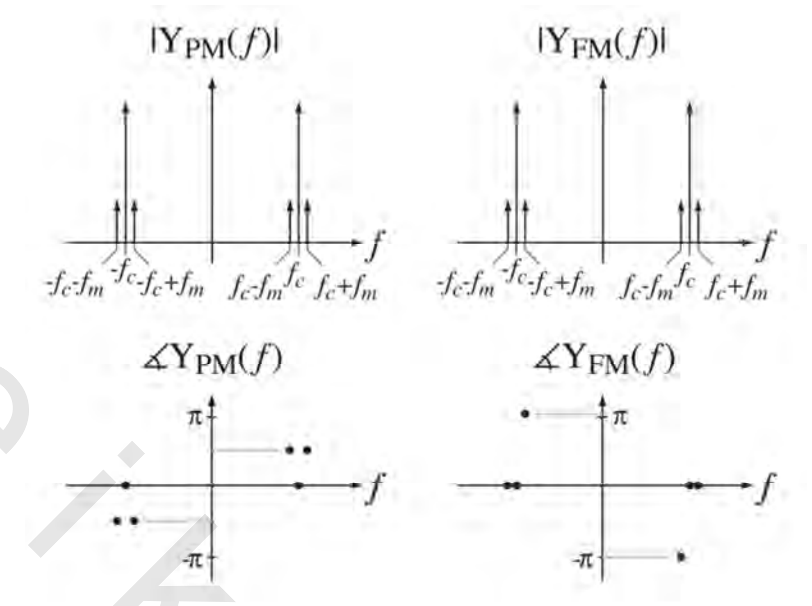
إذا كانت $x(t)=2f_m sinc(2f_m t)$ ، فإن $X(f)=rect(f/2f_m)$ ، التي تمثل طيفاً مسطحاً محدود المجال لنطاق القاعدة

وبالتالي فإن :

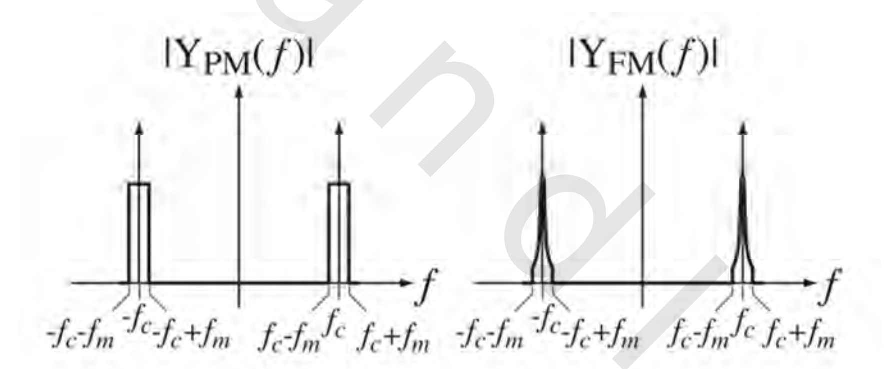
$$Y_{PM}(f) \cong (A_c/2)\left\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] - jk_p\left[rect\left(\frac{f+f_c}{2f_m}\right) - rect\left(\frac{f-f_c}{2f_m}\right)\right]\right\}$$

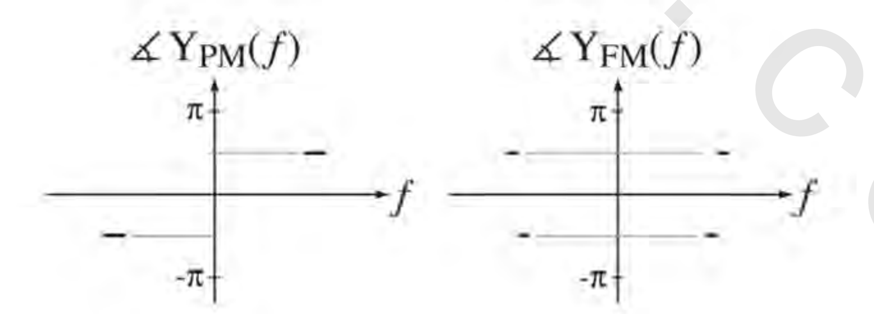
وأيضاً :

$$Y_{FM}(f) \cong (A_c/2)\left\{[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] - \frac{k_f}{2\pi}\left[\frac{rect\left(\frac{f+f_c}{2f_m}\right)}{f+f_c} - \frac{rect\left(\frac{f-f_c}{2f_m}\right)}{f-f_c}\right]\right\}$$



شكل رقم (١٢.١٩) طيف الموجات الحاملة المعدلة الطور والتردد بإشارة جيب تمام cosine.





شكل رقم (١٢.٢٠) طيف الموجات الحاملة المعدلة الطور والتردد بإشارة سنك sinc

انظر شكل (١٢.٢٠). للمرة الثانية ، ففي تعديل FM يكون المجالان الأعلى والأسفل بينهما إزاحة زاوية مقدارها 180 درجة.

إذا كان التقريبان PM و FM ذوا المجال الضيق غير مناسبين ، فإنه يمكننا استخدام الحالات الأكثر دقة ولكنها أكثر تعقيداً وهي حالات المجال العريض. من أجل الاختصار والتوضيح ، فإن هذا الشرح سيقتصر على FM فقط ، وحالات PM ستكون مشابهة بدرجة كبيرة. سنفترض أن التردد اللحظي سيكون $k_f x(t)$. بالتالي يمكن كتابة ما يلي :

$$y_{FM}(\mathrm{t}) = A_c\left[\cos(\omega_c \mathrm{t})cos\left(\mathrm{k}_f \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{x(T)dT}\right) - \sin(\omega_c \mathrm{t})sin\left(\mathrm{k}_f \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{x(T)dT}\right)\right]$$

إذا كانت إشارة التعدبل هي $x(t)=A_m\cos(\omega_m t)$ ، بالتالي مع فرض أن ثابت التكامل يساوي صفر فإنه يمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي :

$$y_{FM}(\mathrm{t}) = A_c\left[cos(\omega_c t)\cos\left(\frac{k_f A_m}{\omega_m}\sin(\omega_m \mathrm{t})\right) - \sin(\omega_c \mathrm{t})sin\left(\frac{k_f A_m}{\omega_m}\sin(\omega_m \mathrm{t})\right)\right]$$

سنفترض أن معامل أو مؤشر التعديل هو $m=k_f A_m/\omega_m$. بالتالي سنحصل على :

$$y_{FM}(t) = A_c\left[cos(\omega_c t)cos\big(m\, sin(\omega_m t)\big) - sin(\omega_c t)sin\big(m\, sin(\omega_m t)\big)\right]$$

وكل من الكميتين :

$$cos\big(m\, sin(\omega_m t)\big) \quad \text{و} \quad sin\big(m\, sin(\omega_m t)\big)$$

ستكون دورية في الزمن مع دورة مقدارها $2\pi/\omega_m$. ولذلك يمكن التعبير عن كل منهما كتتابع فورير. وبالتالي ، فإن تتابع فورير للتعبير السابق سيكون :

$$y_{FM}(t) = A_c\left[cos(\omega_c t)cos\big(m\, sin(\omega_m t)\big) - sin(\omega_c t)sin\big(m\, sin(\omega_m t)\big)\right]$$

وهو تجميع خطي لتتابع فورير للدالتين :

$$\cos\big(\mathrm{m}\sin(\omega_\mathrm{m}\mathrm{t})\big) \quad \text{و} \quad \sin\big(\mathrm{m}\sin(\omega_\mathrm{m}\mathrm{t})\big)$$

فيما عدا وزنهما وإزاحتهما ليتمركزا عند $\pm\omega_c$. دالة CTFS التوافقية للدالتين :

$$cos\big(m\, sin(\omega_m t)\big) \quad \text{و} \quad sin\big(m\, sin(\omega_m t)\big)$$

يمكن إيجادها باستخدام التعريف التالي :

$$C_y[k] = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \mathrm{y(t)e}^{-j2\pi kt/T_0}\, dt = \frac{\omega_m}{2\pi}\int_{2\pi/\omega_m} \mathrm{y(t)e}^{-jk\omega_m t}\, dt$$

حيث $y(t)$ هي واحدة من هذه الدوال. مثلاً :

$$cos\big(m\, sin(\omega_m t)\big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_c\,[k] e^{jk\omega_m t}$$

وأيضاً :

$$cos(\omega_m t)\, cos\big(m\, sin(\omega_m t)\big) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_c\,[k]\left[e^{j(k\omega_m+\omega_c)t} + e^{j(k\omega_m-\omega_c)t}\right]$$

حيث :

$$C_c[k] = \frac{\omega_m}{2\pi}\int_{2\pi/\omega_m} \cos(m\sin(\omega_m t))e^{-jk\omega_m t}\,dt$$

$$C_c[k] = \frac{\omega_m}{4\pi}\int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m}\left[e^{jm\sin(\omega_m t)} + e^{-jm\sin(\omega_m t)}\right]e^{-jk\omega_m t}\,dt$$

$$C_c[k] = \frac{\omega_m}{4\pi}\int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m}\left[e^{j[m\sin(\omega_m t)-k\omega_m t]} + e^{j[-m\sin(\omega_m t)-k\omega_m t]}\right]dt$$

يمكن إجراء هذا التكامل باستخدام العلاقة :

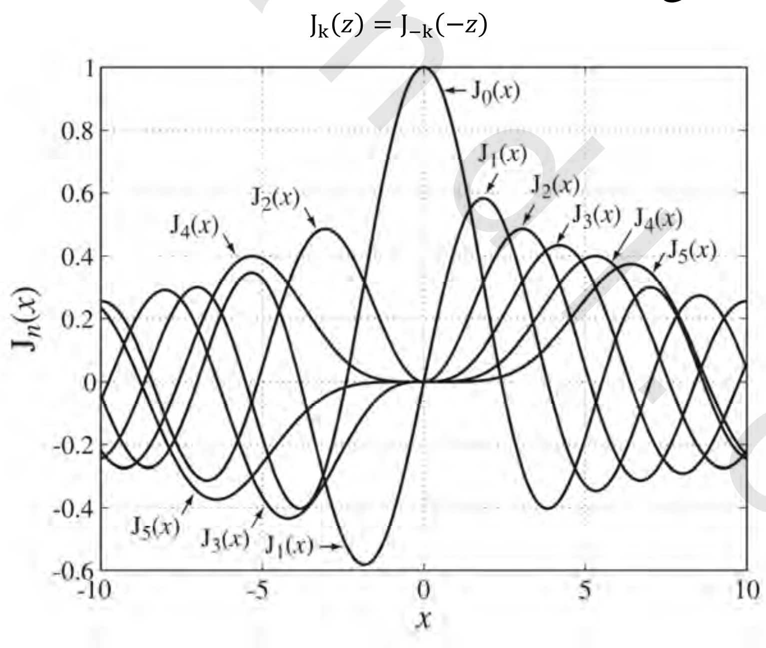
$$J_k(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(z\sin(\lambda)-k\lambda)}\,d\lambda$$

حيث $J_k(.)$ هي دالة بيسيل Bessel function من النوع الأول، من الدرجة k كما في شكل (١٢.٢١). إن هناك خاصيتين مهمتين لدالة بيسيل، هما :

$$J_{-k}(z) = (-1)^k J_k(z),\ \ J_k(z) = (-1)^k J_k(-z),\ \ \text{k ثابت صحيح}$$

ومنهما يمكننا أن نستنتج أن :

$$J_k(z) = J_{-k}(-z)$$



شكل رقم (١٢.٢١) دوال بيسيل من النوع الأول والرتب من 0 حتى 5

في المعادلة التالية :

$$C_c[k] = \frac{\omega_m}{4\pi}\int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m}\left[e^{j[m\sin(\omega_m t)-k\omega_m t]} + e^{j[-m\sin(\omega_m t)-k\omega_m t]}\right]dt$$

سنضع :

$$\omega_m t = \lambda \Rightarrow \omega_m \mathrm{d}t = d\boldsymbol{\lambda}$$

وبالتالي نحصل على:

$$\mathrm{C_c[k]} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j[m\,sin(\lambda)-k\lambda]}} + \mathrm{e}^{\mathrm{j[-m\,sin(\lambda)-k\lambda]}}\right]\mathrm{d\lambda}$$
$$C_c[k] = (1/2)[\mathrm{J_k}(m) + \mathrm{J_k}(-m)] = (1/2)[\mathrm{J_k}(m) + \mathrm{J_{-k}}(m)]$$

بالمثل:

$$\mathrm{sin\big(m\,sin(\omega_m t)\big)} = \sum_{\mathrm{k=-\infty}}^{\infty}\mathrm{c_s\,[k]e^{jk\omega_m t}}$$

وبالتالي:

$$\mathrm{sin(\omega_c t)\,sin\big(m\,sin(\omega_m t)\big)} = \frac{1}{\mathrm{j2}}\sum_{\mathrm{k=-\infty}}^{\infty}\mathrm{c_s\,[k]e^{j(k\omega_m+\omega_c)t} - e^{j(k\omega_m-\omega_c)t}}$$

حيث:

$$C_s[k] = (1/j2)[\mathrm{J_k}(m) - \mathrm{J_k}(-m)] = (1/j2)[\mathrm{J_k}(m) - \mathrm{J_{-k}}(m)]$$

تذكر من إشارة FM أن:

$$y_{FM}(t) = A_c\big[cos(\omega_c t)\,cos\big(m\,sin(\omega_m t)\big) - sin(\omega_c t)\,sin\big(m\,sin(\omega_m t)\big)\big]$$

وبالتالي:

$$y_{FM}(t) = A_c\sum_{\mathrm{k=-\infty}}^{\infty}\begin{Bmatrix}(1/2)(1/2)[\mathrm{J_k}(m) + \mathrm{J_k}(-m)]\left[e^{j(k\omega_m+\omega_c)t} + e^{j(k\omega_m-\omega_c)t}\right]\\ -(1/j2)(1/j2)[\mathrm{J_k}(m) - \mathrm{J_k}(-m)]\left[e^{j(k\omega_m+\omega_c)t} - e^{j(k\omega_m-\omega_c)t}\right]\end{Bmatrix}$$

$$y_{FM}(t) = \frac{A_c}{2}\sum_{\mathrm{k=-\infty}}^{\infty}\left[\mathrm{J_k}(m)e^{j(k\omega_m+\omega_c)t} + \mathrm{J_{-k}}(m)e^{j(k\omega_m-\omega_c)t}\right]$$

أو:

$$y_{FM}(t) = \frac{A_c}{2}\sum_{\mathrm{k=-\infty}}^{\infty}\left[\mathrm{J_k}(m)e^{j2\pi(kf_m+f_c)t} + \mathrm{J_{-k}}(m)e^{j2\pi(kf_m-f_c)t}\right]$$

وتحويل CTFT في الصورة الدورية سيكون:

$$Y_{FM}(f) = \frac{A_c}{2}\sum_{\mathrm{k=-\infty}}^{\infty}\left[\mathrm{J_k}(m)\delta\big(f - (kf_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{c}})\big) + \mathrm{J_{-k}}(m)\delta\big(f - (kf_{\mathrm{m}} - f_{\mathrm{c}})\big)\right]$$

$$Y_{FM}(f) = \frac{A_c}{2}\left\{\mathrm{J_0}(m)[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \sum_{k=1}^{\infty}\begin{bmatrix}\mathrm{J_k}(m)\delta\big(f - (kf_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{c}})\big) + \mathrm{J_{-k}}(m)\delta\big(f - (kf_{\mathrm{m}} - f_{\mathrm{c}})\big)\\ +\mathrm{J_{-k}}(m)\delta\big(f - (-kf_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{c}})\big) + \mathrm{J_k}(m)\delta\big(f - (-kf_{\mathrm{m}} - f_{\mathrm{c}})\big)\end{bmatrix}\right\}$$

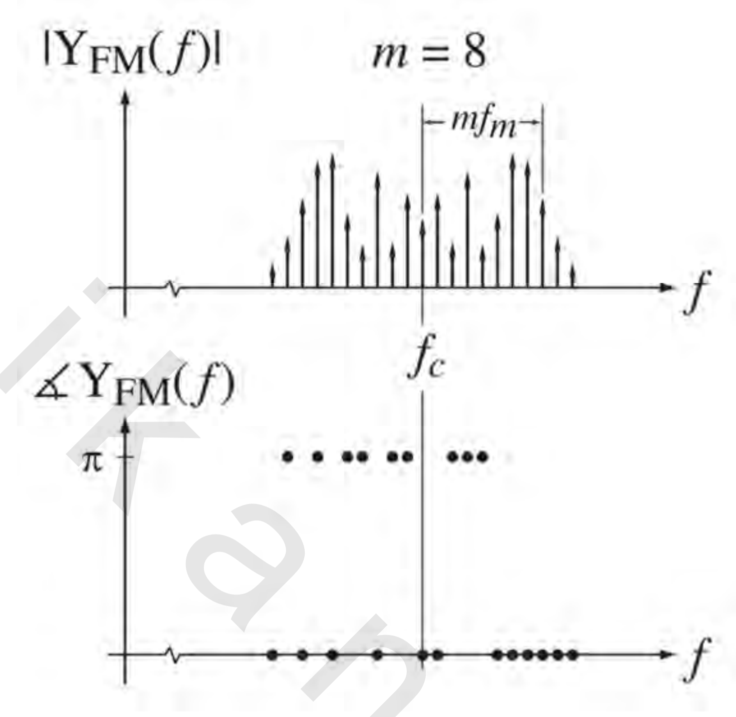
وهذا يمثل طيف FM الواسع المجال للتعديل الترددي للموجة الجيبية. التعبير المقابل في النطاق الزمني سيكون:

$$y_{FM}(t) = A_c\{\mathrm{J_0}(m)cos(2\pi F_c t) + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{J_k}(m)cos(2\pi(f_c + kf_{\mathrm{m}})t) + \mathrm{J_{-k}}(m)cos(2\pi(f_c - kf_{\mathrm{m}})t)\}$$

ولذلك فهناك العديد من الصدمات غير المحدودة في هذا الطيف وكلها مفصولة عن بعضها بعضاً بالتردد الأساسي للتعديل. إنها قد تعني عرض مجال لا نهائي. ولكن إذا رسمنا هذه الصدمات لقيمة مثالية لمعامل التعديل، سنجد أنه على الرغم من هذه الصدمات تمتد إلى الما لانهاية، إلا أن شدتها تضمحل بسرعة مع تزايد التردد حتى فيما بعد mf_m كما في شكل (١٢.٢٢). لذلك فإن عرض المجال للتعديل الترددي FM المتسع المجال بموجة جيبية ذات تردد f_m سيكون تقريباً $2mf_m$.

عند القيم الصغيرة جداً للـ m ، يمكننا كتابة ما يلي :

$$\mathrm{J}_0(m) \to 1,\ \mathrm{J}_1(m) \to m/2\,,\ \mathrm{J}_{-1}(m) \to -m/2 \quad and \quad \mathrm{J}_\mathrm{n}(m) \to 0, n > 1$$



شكل رقم (١٢.٢٢) مثال على طيف تعديل FM المتسع المجال بتعديل دالة جيبية

بالتالي فبالنسبة لقيم m الصغيرة :

$$Y_{FM}(f) \cong \frac{A_c}{2}\left\{\begin{matrix}\delta(f-f_\mathrm{c})+\delta(f+f_\mathrm{c})+(m/2)[\delta(f-f_\mathrm{m}-f_\mathrm{c})-\delta(f-f_\mathrm{m}+f_\mathrm{c})] \\ -(m/2)[\delta(f+f_\mathrm{m}-f_\mathrm{c})-\delta(f+f_\mathrm{m}+f_\mathrm{c})]\end{matrix}\right\}$$

وأيضاً :

$$y_{FM}(t) = A_c\{cos(2\pi F_c t) + (m/2)[cos(2\pi(f_c+f_\mathrm{m})t) + cos(2\pi(f_c-f_\mathrm{m})t)]\}$$

وهذه التعبيرات هي نفسها كما تم استنتاجها مسبقاً مع تقريب FM الضيق المجال.

(١٢.٣) الموجة الحاملة الجيبية المتقطعة زمنياً

تعديل المقدار

يمكن استخدام التعديل أيضاً في الأنظمة المتقطعة زمنياً بطريقة مشابهة للطريقة المستخدمة في الأنظمة المستمرة زمنياً. أبسط صور التعديل المتقطع زمنياً هو تعديل DSBSC والذي يتم فيه ضرب الإشارة الحاملة c[n] في إشارة التعديل x[n]. افترض أن الموجة الحاملة هي الموجة الجيبية التالية :

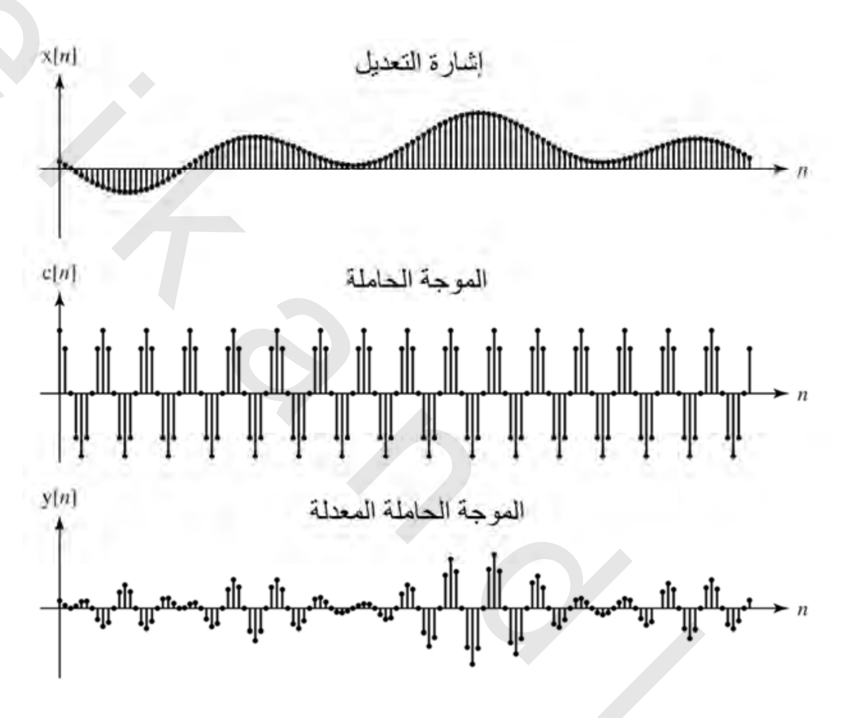
$$c[n] = cos(2\pi F_0 n)$$

حيث $F_0=1/N_0$ و N_0 هي الدورة (وهي رقم صحيح). وبالتالي فإن استجابة نظام التعديل ستكون كما يلي وكما في شكل (١٢.٢٣).

$$y[n] = x[n]c[n] = x[n]cos(2\pi F_0 n)$$

الضرب في الزمن المتقطع يقابل الالتفاف الدوري في التردد المتقطع زمنياً:

$$Y(F) = X(F)\Theta C(F) = X(F)\Theta\{(1/2)[\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)] * \delta_1(F)\}$$



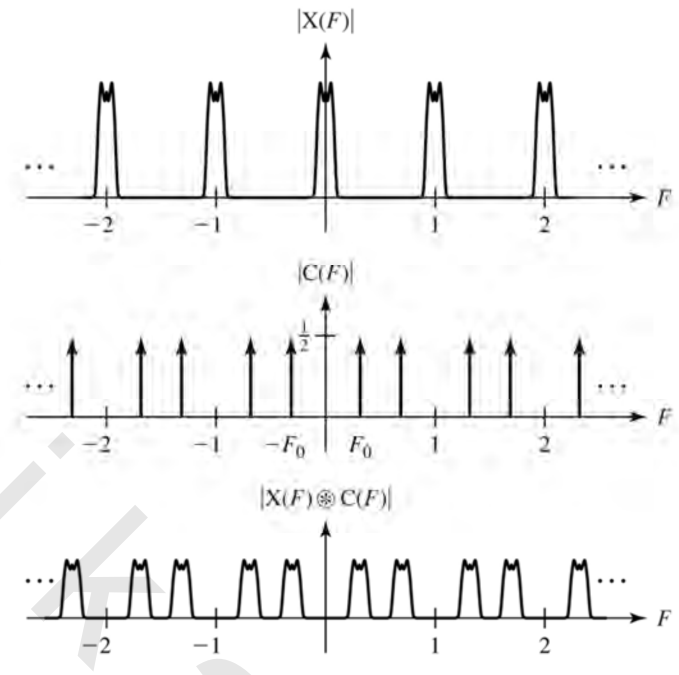
شكل رقم (١٢.٢٣) التعديل، والموجة الحاملة، والموجة الحاملة المعدلة في نظام التعديل DSBSC المتقطع زمنياً

أو كما في شكل (١٢.٢٤):

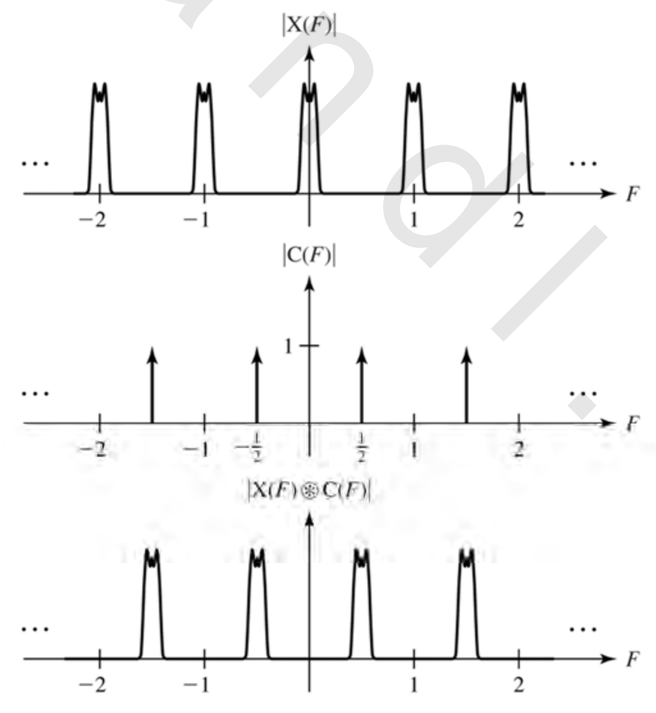
$$Y(F) = (1/2)[X(F - F_0) + X(F + F_0)]$$

التي تشابه النتيجة المقابلة في تعديل DSBSC المستمرة زمنياً:

$$Y(f) = (1/2)[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$



شكل رقم (١٢.٢٤) DTFT لإشارة التعديل، والموجة الحاملة، والموجة الحاملة المعدلة.



شكل رقم (١٢.٢٥) DTFT لإشارة التعديل، والموجة الحاملة، والموجة الحاملة المعدلة.

إذا كان هذا النوع من التعديل هو المراد استخدامه للحصول على التعدد الترددي، فإن مجموع عروض المجال (في F) لكل الإشارات يجب أن يكون أقل من نصف.

واحد من الأنواع المثيرة والبسيطة من تعديل DSBSC المتقطع زمنياً هو استخدام الموجة الحاملة $c[n]=\cos(\pi n)$، وهو جيب تمام متقطع زمنياً تم تشكيله عن طريق أخذ عينات من جيب تمام مستمر زمنياً بمعدل عينات يساوي تماماً ضعف تردده. إنه بسيط بالذات لأنه تتابع من ال ... ,1- ,1 ,1- ,1 ,1- ,1 ,1- ,1 .... عند استخدام هذه الموجة الحاملة، فإن DTFT الناتج سيكون كما هو موضح في شكل (١٢.٢٥).

هذا النوع من التعديل يعكس الطيف الترددي لإشارة التعديل، بحيث إذا كانت عبارة طيف في الترددات المنخفضة، فإنها تصبح في الترددات العالية والعكس. هذا النوع من التعديل سهل جداً في بنائه لأنه ببساطة يغير الإشارة عند كل قيمة من إشارة التعديل. عملية الاستخلاص لاسترجاع الإشارة الأصلية هي أن نقوم تماما بالعملية نفسه مرة أخرى، لوضع كل المكونات الترددية مرة أخرى في أماكنها الأصلية.

أحد الاستخدامات لهذا المثيرة لهذا النوع من العديل هو تحويل المرشح المتقطع زمنياً المنفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح متقطع زمنياً منفذ للترددات العالية. إذا قمنا بتعديل هذه الموجة الحاملة بإشارة معينة وبعد ذلك مررناها من خلال مرشح منفذ للترددات المنخفضة، فإن الترددات التي كانت في الأصل منخفضة تصبح ترددات عالية ولن تمر من خلال المرشح، وأما الترددات التي كانت مرتفعة في الأصل ستصبح منخفضة وستمر من خلال المرشح. وبالتالي يمكننا استخلاص خرج المرشح بنفس نوع التعديل تماما، تحويل الترددات العالية (الترددات المنخفضة أصلا) مرة ثانية إلى ترددات منخفضة. باستخدام هذه الطريقة فإنه يمكننا استخدام نوع واحد من المرشحات المتقطعة زمنياً لترشيح كل من الترددات المنخفضة والعالية.

(١٢.٤) ملخص النقاط المهمة

١- أنظمة الاتصالات التي تستخدم التعدد الترددي يمكن عادة تحليلها باستخدام طرق تحويلات فورير.

٢- في التعديل المقداري، تتحكم إشارة المعلومات مباشرة في مقدار الموجة الحاملة.

٣- تعديل المقدار والاستخلاص المتزامن عمليتان متشابهتان.

٤- التعديل المقداري مع إرسال الموجة الحاملة يمكن إجراء الاستخلاص عليها باستخدام دائرة بسيطة ورخيصة مع تجنب الحاجة للاستخلاص المتزامن.

٥- التعديل أحادي المجال الجانبي يستخدم نصف عرض المجال الذي كان في حالة التعديل المزدوج المجال، وهذا يتيح استخدام عرض المجال بكفاءة أكثر ولكنه يتطلب استخلاصاً متزامناً.

٦- الصورتان المتاحتان لتعديل الزاوية هما تعديل الطور، والتعديل الترددي وبينهما العديد من التشابهات. التعديل الترددي يتم استخدامه عملياً أكثر.

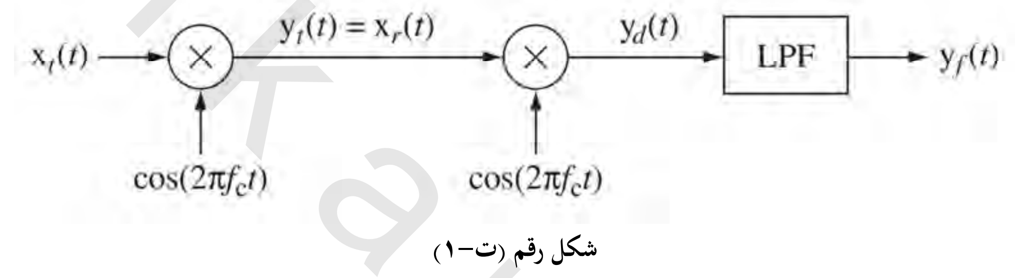
٧- طرق تعديل المقدار المستخدمة في الزمن المستمر لها مناظر مباشر في التعديل في الزمن المتقطع.

تمارين مع الإجابات

(في كل تمرين، تكون الإجابات مدونة بطريقة عشوائية)

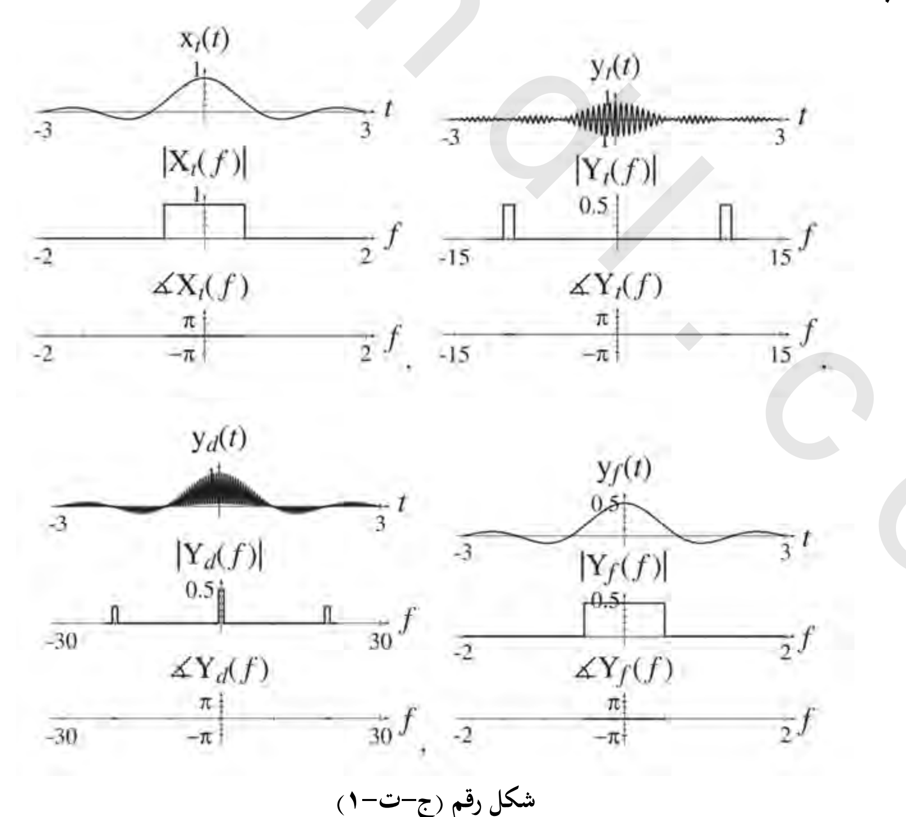
تعديل المقدار

١- في النظام الموجود في شكل (ت- ١)، x(t)=sinc(t)، و $f_c=10$، وتردد القطع للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة هو 1Hz. ارسم الإشارات $x_t(t)$، و $y_t(t)$، و $y_d(t)$، و $y_f(t)$ ومقدار وزاوية تحويل CTFT لكل منها.



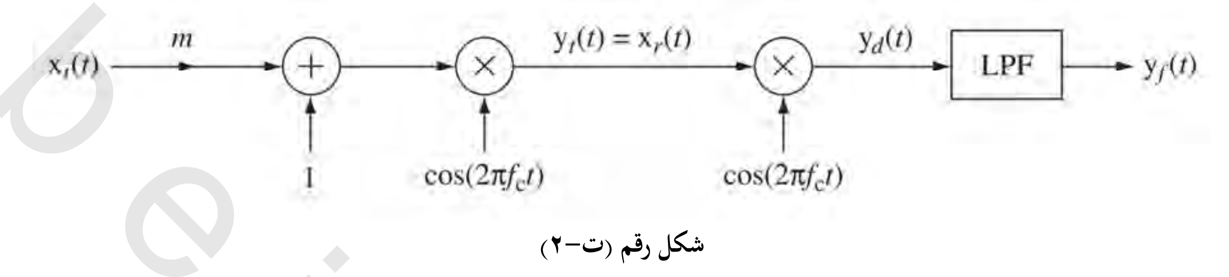
شكل رقم (ت-١)

الإجابة:



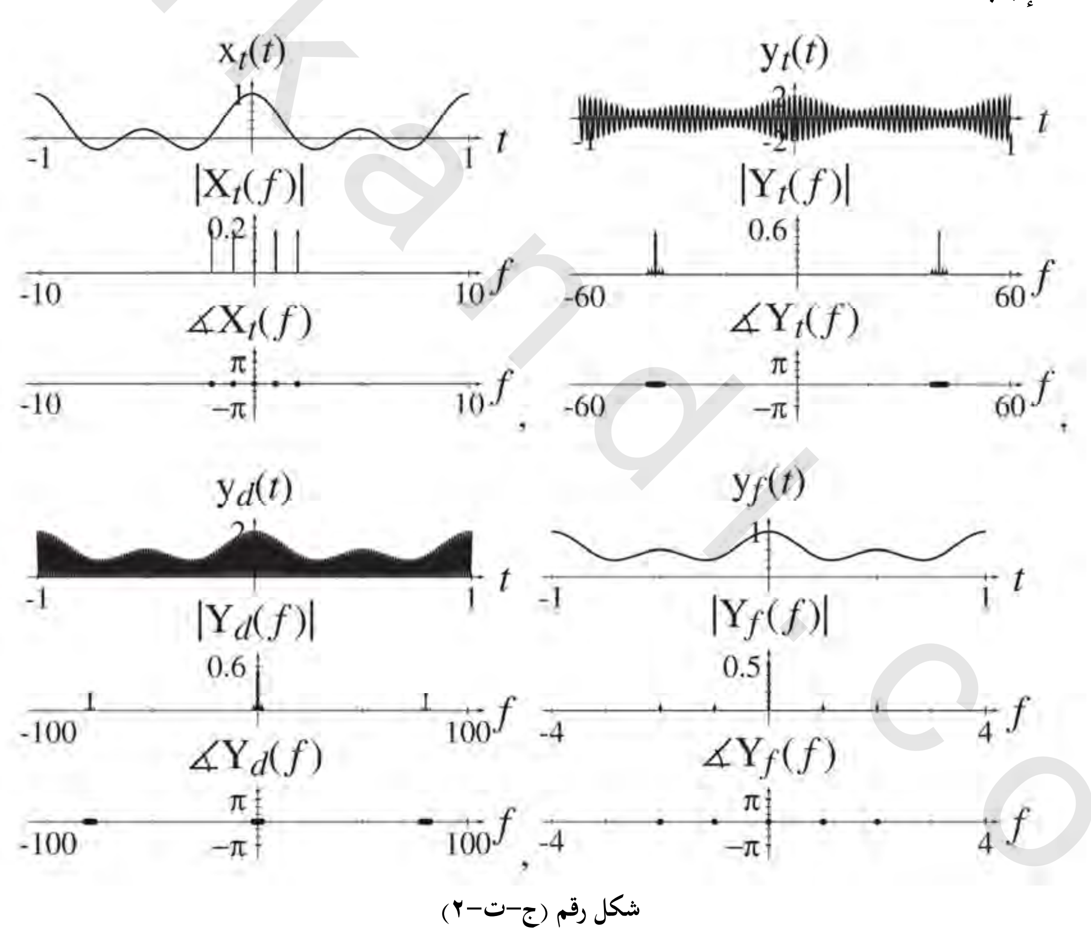
شكل رقم (ج-ت-١)

٢- للنظام الموجود في شكل (ت- ٢)، $x(t)=sinc(5t)*\delta_1(t)$، و $m=1$، و $f_c=40$، وتردد القطع للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة يساوي 4Hz. ارسم الإشارات $x_t(t)$، و $y_t(t)$، و $y_d(t)$، و $y_f(t)$ ومقدار وزاوية تحويل الـ CTFT لكل منها.



شكل رقم (ت-٢)

الإجابة:



شكل رقم (ج-ت-٢)

٣- محطة راديو AM تذيع موسيقى بعرض مجال مطلق مقداره 5kHz. تستخدم المحطة تعديل المجال المزدوج مع إرسال الموجة الحاملة، وتردد الموجة الحاملة يساوي 1MHz.

(أ) ما هي الحدود الترددية الصغرى والعظمى f_{low}، و f_{high} لعرض المجال في فراغ الترددات الموجبة المشغول بالموجة الحاملة المعدلة التي تنشرها هذه المحطة ؟

(ب) إذا تغير تردد الموجة الحاملة إلى 1.5MHz ، ما هي الحدود الترددية الصغرى والعظمى f_{low}، و f_{high} الجديدة لعرض المجال في فراغ الترددات الموجبة المشغول بالموجة الحاملة المعدلة التي تنشرها هذه المحطة ؟

(ت) إذا تغيرت المحطة إلى طريقة تعديل المجال الواحد مع قمع الموجة الحاملة، مع نشر المجال الأعلى فقط (على الفراغ الترددي الموجب) وكان تردد الموجة الحاملة هو التردد الأصلي 1MHz ، فما هي الحدود الترددية الصغرى والعظمى f_{low}، و f_{high} الجديدة لعرض المجال في فراغ الترددات الموجبة المشغول بالموجة الحاملة المعدلة التي تنشرها هذه المحطة ؟

الإجابة: 1.005MHz ، و 0.995MHz ، و 1MHz ، و 1.495MHz ، و 1.005MHz ، و 1.505MHz.

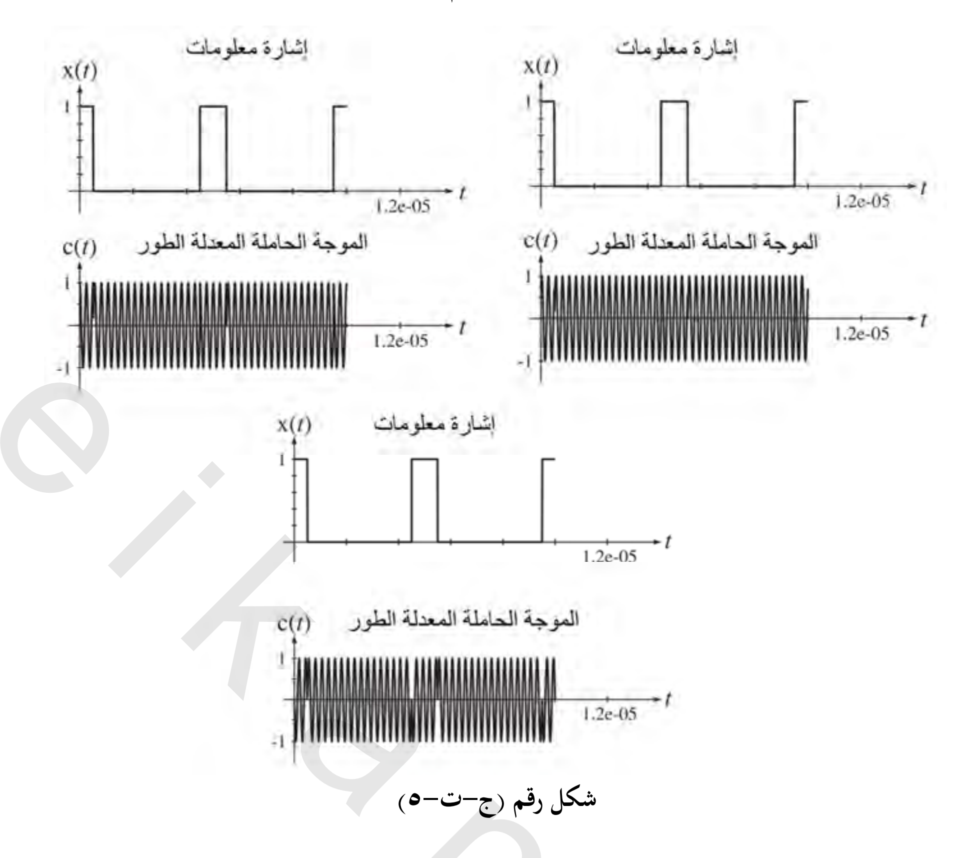
٤- إشارة $x(t)=4\text{sinc}(10t)$ هي إشارة دخل إلى نظام تعديل أحادي المجال، مع قمع الموجة الحاملة SSBSC والموجة الحاملة لهذا النظام هي $10\cos(2000\pi t)$. النظام يولد حاصل ضرب الإشارة $x(t)$ والموجة الحاملة لتكوين إشارة DSBSC وهي $y_{DSBSC}(t)$. النظام بعد ذلك يرسل المجال الجانبي العلوي ويقمع المجال الجانبي الأسفل في الإشارة $y_{DSBSC}(t)$ باستخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المرتفعة لتشكيل الإشارة المرسلة $y(t)$. الإشارة المرسلة $y(t)$ يمكن التعبير عنها على الصورة $y(t)=A\text{sinc}(bt)\cos(ct)$. أوجد القيم العددية لكل من A و b و c.

الإجابة: 2005π ، و 20 ، و 5.

التعديل الزاوي

٥- في نظام تعديل PM افترض أن الإشارة $x(t)=\text{rect}(10^6t)*\delta_{5\mu s}(t)$ وافترض أن الموجة الحاملة هي $\sin(8\pi 10^6 t)$. ارسم إشارة خرج هذا النظام في الفترة الزمنية $0<t<10\mu s$ لثلاث قيم مختلفة لمعامل التعديل $k_p=\pi/4$ ، و $k_p=\pi/2$ و $k_p=\pi$.

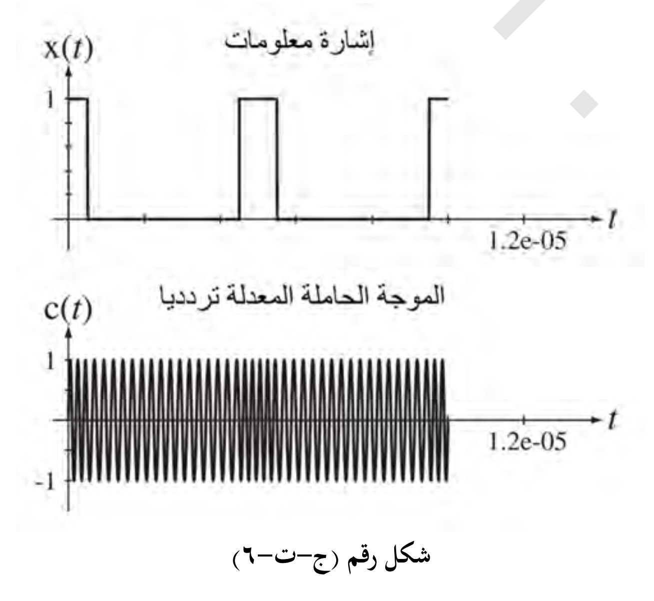
الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٥)

٦- في نظام تعديل FM افترض أن الإشارة $x(t)=rect(10^6t)*\delta_{5\mu s}(t)$ وافترض أن الموجة الحاملة هي $\sin(8\pi 10^6 t)$. ارسم إشارة خرج هذا النظام في الفترة الزمنية $0<t<10\mu s$ لثلاث قيم مختلفة لمعامل التعديل $k_f=2\pi x10^6$ ، $k_f=4\pi x10^6$ و $k_f=8\pi x10^6$.

الإجابة:



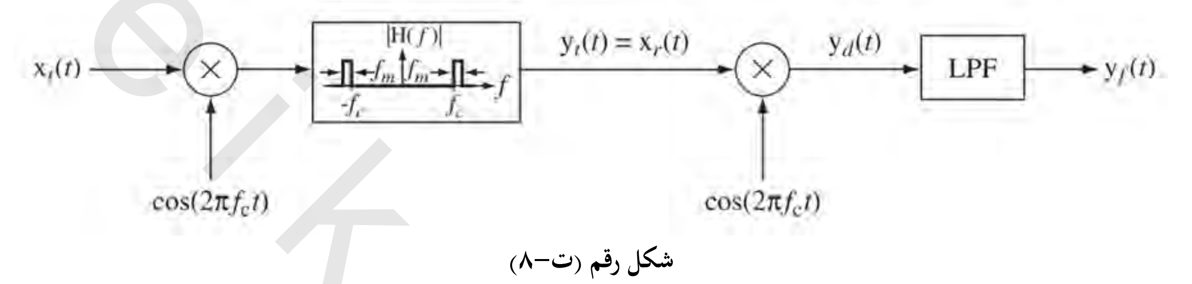
شكل رقم (ج–ت–٦)

تمارين بدون إجابات

تعديل المقدار

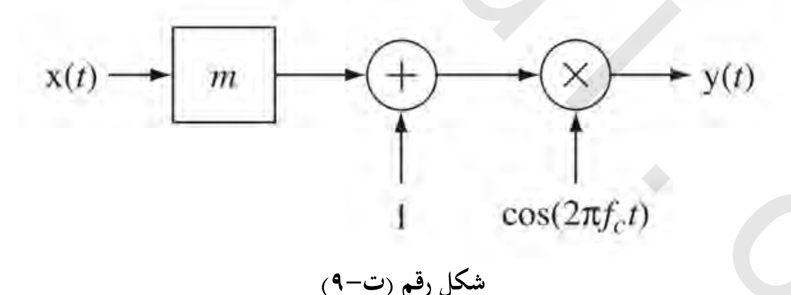
٧- أعد تمرين ١ ولكن مع استبدال الدالة الثانية $\cos(2\pi f_c t)$ بالدالة $\sin(2\pi f_c t)$.

٨- في النظام الموضح في شكل (ت- ٨)، $x_t(t)=\text{sinc}(t)$، و $f_c=10$ وتردد القطع للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة تساوي 1Hz. ارسم الإشارات $x_t(t)$، و $y_t(t)$، و $y_d(t)$، و $y_f(t)$ ومقدار وزاوية تحويل CTFT لكل منها.



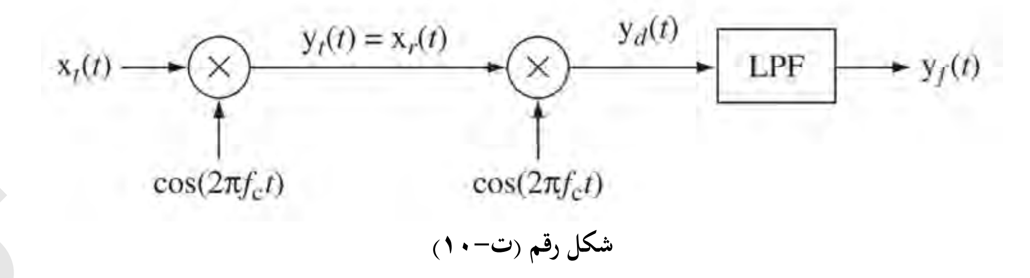
شكل رقم (ت-٨)

٩- الدالة الجيبية $x(t)=A_m\cos(2\pi f_m t)$ تقوم بتعديل الموجة الحاملة $A_c\cos(2\pi f_c t)$ في نظام مزدوج المجال مع إرسال الموجة الحاملة DSBTC من النوع الموضح في شكل (ت- ٩). إذا كانت Am=1، و $f_m=10$، و $A_c=4$، و fc=1000، و m=1، أوجد القيمة العددية لكل طاقة الإشارة في y(t) عند تردد الموجة الحاملة Pc والقيمة العددية لكل طاقة الإشارة في y(t) في مجالاتها الجانبية Ps.



شكل رقم (ت-٩)

١٠- للنظام الموجود في شكل (ت- ١٠) افترض أن $x_t(t)=3\sin(1000\pi t)$، وأن $f_c=5000$ وافترض أن المرشح المنفذ للترددات المنخفضة (LPF) مثالي بمقدار استجابة ترددية تساوي واحداً في مجال المرور أو السماح له.



شكل رقم (ت-١٠)

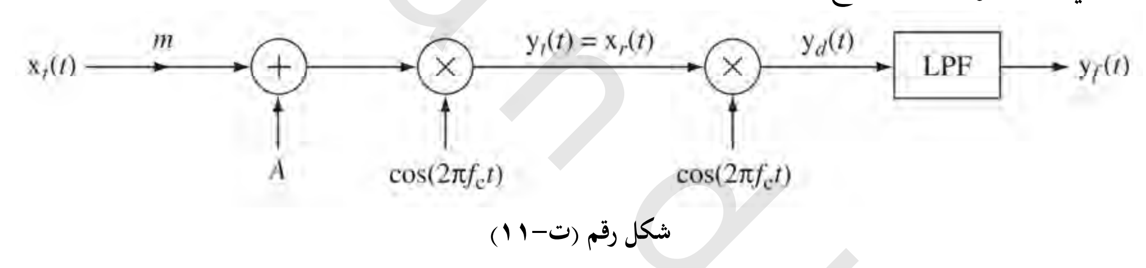
(أ) أوجد طاقة الإشارة $y_t(t)$.

(ب) أوجد طاقة الإشارة $y_d(t)$

(ج) أوجد طاقة الإشارة $y_f(t)$ إذا كان تردد القطع للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة يساوي 1kHz.

(د) أوجد طاقة الإشارة $y_f(t)$ إذا كان تردد القطع للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة يساوي 100Hz.

١١- للنظام الموجود في شكل (ت- ١١) إفترض أن $x_t(t)=3\sin(1000\pi t)$، وأن m=1 وأن A=3، وأن $f_c=5000$ وافترض أن المرشح المنفذ للترددات المنخفضة (LPF) مثالي بمقدار استجابة ترددية تساوي واحداً في مجال المرور أو السماح له.



شكل رقم (ت-١١)

(أ) أوجد طاقة الإشارة $y_t(t)$.

(ب) أوجد طاقة الإشارة $y_d(t)$

(ج) أوجد طاقة الإشارة $y_f(t)$ إذا كان تردد القطع للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة يساوي 1kHz.

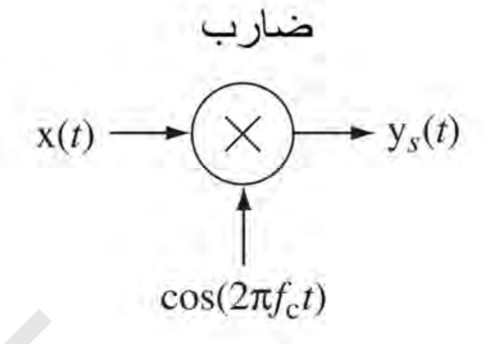
(د) أوجد طاقة الإشارة $y_f(t)$ إذا كان تردد القطع للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة يساوي 100Hz.

١٢- إشارة $x(t)$ ليس لها أي طاقة خارج المدى الترددي $-f_c/100<f<f_c/100$ تم ضربها في الموجة الحاملة $\cos(2\pi f_c t)$ لتكوين الإشارة $y_t(t)$. بعد ذلك تم ضرب $y_t(t)$ في $\cos(2\pi f_c t)$ لتكوين الإشارة $y_r(t)$. بعد ذلك تم ترشيح $y_r(t)$ باستخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة له الاستجابة الترددية $H(f)=6\text{rect}(f/2f_c)$ لتكوين الإشارة $y_f(t)$. ما هي نسبة طاقة الإشارة $y_f(t)$ إلى طاقة الإشارة في $x(t)$، بمعنى P_{yf}/P_x ؟

١٣- في النظام الموضح في شكل (ت- ١٣) إفترض أن CTFT لإشارة الدخل هو $X(f)=\text{tri}(f/f_c)$. هذا النظام يسمى أحياناً بنظام التشويش ؛ لأنه ينقل مكونات الإشارة إلى مواضع جديدة لجعلها غير مفهومة.

(أ) باستخدام ضارب تناظري فقط ومرشح مثالي، صمم "مستخلص تشويش" يقوم باستخلاص الإشارة الأصلية من الإشارة التي تم تشويشها.

(ب) ارسم مقدار الطيف لكل إشارة في نظام التشويش والاستخلاص من التشويش.



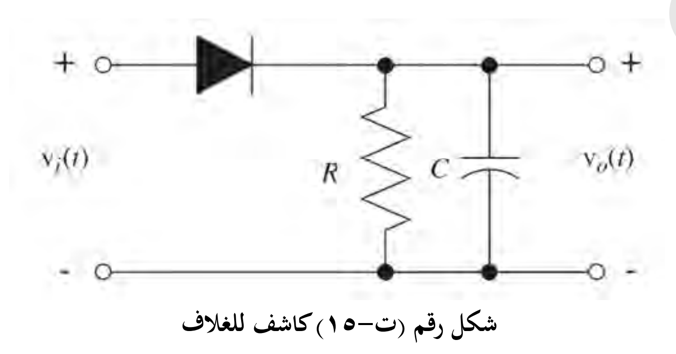
شكل رقم (ت–١٣) نظام تشويش

تعديل الزاوية

١٤- في تعديل PM افترض أن إشارة المعلومات هي $x(t)=\sin(10^5 t)$، وافترض أن الموجة الحاملة هي $\cos(2\pi 10^6 t)$ وافترض أن معاملات التعديل هي $k_p=\pi/5$ و $k_f=k_p 10^6/5$. ارسم إشارة خرج هذا المعدل في المدى الزمني $0<t<20\mu s$. احسب خرج المعدل بطريقتين، (١) مباشرة كإشارة معدلة، (٢) باستخدام تقريبات الـ PM والـ FM الضيق المجال. قارن بين هذه المخططات.

كاشف الغلاف

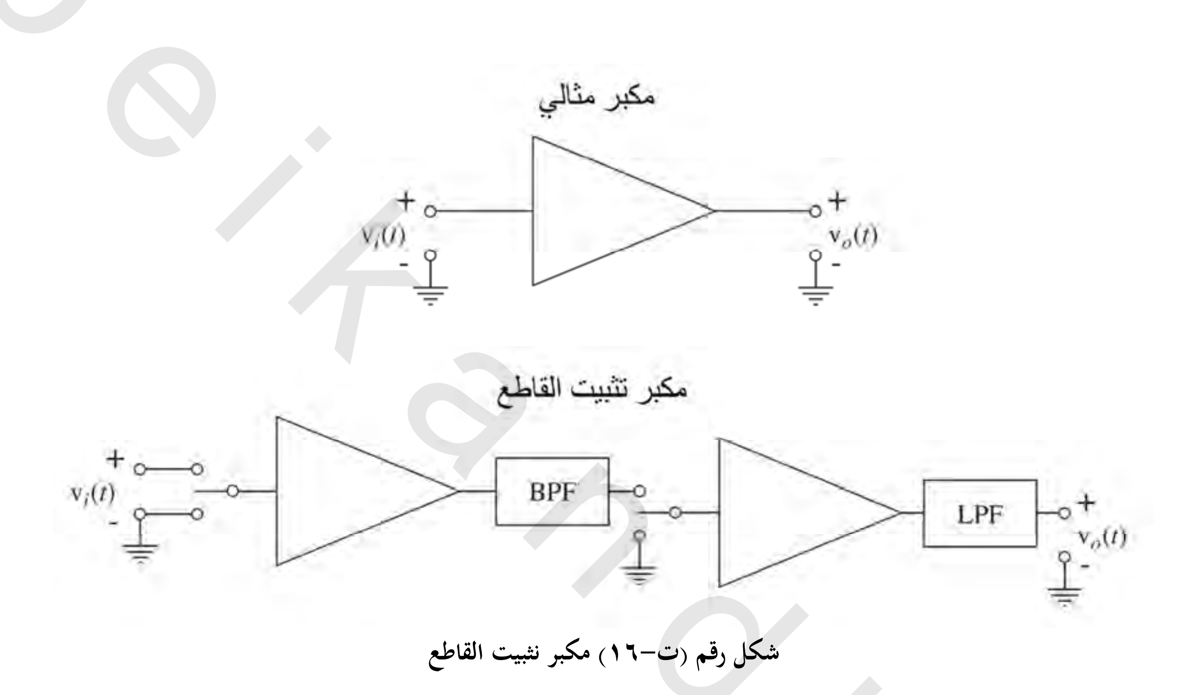
١٥- في شكل (ت– ١٥) مخطط دائرة للكشف عن الغلاف. افترض أن الدايود مثالي وأن جهد إشارة الدخل هو جيب تمام عند التردد 100kHz بمقدار يساوي 200mV. افترض أن الثابت الزمني RC يساوي ٦٠ ميكروثانية. أوجد وارسم مقدار CTFT لإشارة جهد الخرج.



شكل رقم (ت–١٥) كاشف للغلاف

مكبر تثبيت القاطع

١٦- المكبرات الإلكترونية التي تتعامل مع الإشارات المنخفضة التردد جداً يكون من الصعب تصميمها نتيجة أن الانحراف الحراري لجهد الانحياز لا يمكن تفريقه من الإشارات. لهذا السبب فإن أحد الطرق الشهيرة لتصميم المكبرات للترددات المنخفضة هو ما يسمى مكبرات "تثبيت القاطع" كما في شكل (ت- ١٦).



شكل رقم (ت-١٦) مكبر نثبيت القاطع

مكبر تثبيت القاطع يقوم بتقطيع إشارة الدخل عن طريق فتحها وغلقها دورياً. هذا التأثير يكافئ تعديل مقدار النبضة الذي يتم فيه تعديل طابور من النبضات عن طريق إشارة الدخل التي تكون موجة مربعة بدورة إشغال 50% تتبدل بين الصفر والواحد. بعد ذلك يتم ترشيح هذه الإشارة المقطعة بمرشح منفذ لمجال من الترددات للتخلص من إشارة انحراف حراري بطيء من المكبر الأول. بعد ذلك يتم تقطيع الإشارة المكبرة مرة أخرى عند المعدل نفسه تماما وفي الطور نفسه مع إشارة التقطيع المستخدمة عند دخل المكبر الأول. يمكن بعد ذلك تكبير هذه الإشارة. الخطوة الأخيرة هي ترشيح الإشارة الخارجة من المكبر الأخير بمرشح منفذ للترددات المنخفضة لاسترجاع نسخة مكبرة من الإشارة الأصلية. (إن هذا يعتبر نموذجا مبسطا ولكنه يبين الخواص الأساسية لمكبر تثبيت القاطع).

افترض المعاملات التالية لمكبر تثبيت القاطع :

تردد القطع	500Hz
معامل التكبير لأول مكبر	100V/V
المرشح المنفذ لمجال من الترددات	تكبير وحدة، مثالي، زاوية تساوي صفر
مجال المرور أو السماح	250<f<750
معامل تكبير المكبر الثاني	10V/V
المرشح المنفذ للترددات المنخفضة	تكبير وحدة، مثالي، زاوية تساوي صفر
عرض المجال	100Hz

افترض أن إشارة الدخل لها عرض مجال 100Hz. ما هو معامل التكبير DC لمكبر تثبيت القاطع ؟

تعدد المسارات

١٧- مشكلة شائعة في إرسال إشارات التليفزيون الهوائية هي تشويه المسارات المتعددة في الإشارة التي يتم استقبالها نتيجة تأرجح الإشارة المرسلة حول الهياكل البنائية. في العادة تصل إشارة أساسية قوية عند زمن معين وإشارة شبح ضعيفة تصل في وقت متأخر عن ذلك. وعلى ذلك فإذا كانت الإشارة المرسلة هي $x_t(t)$ ، فإن الإشارة المستقبلة ستكون :

$$X_r(t) = K_m\, X_t(t - t_m) + K_g\, X_t(t - t_g)$$

حيث $K_m >> K_g$ و $t_g > t_m$ ،

(أ) ما هي الاستجابة الترددية لنظام الاتصالات هذا ؟

(ب) كيف يمكن أن تكون الاستجابة الترددية لنظام تسوية أو معادلة يمكنه أن يعوض تأثيرات المسارات المتعددة ؟



تحليل أنظمة لابلاس

(١٣.١) المقدمة والأهداف

لقد اخترع بيير لابلاس Pierre Laplace تحويل لابلاس كطريقة لحل المعادلات التفاضلية الخطية الثابتة المعاملات. معظم الأنظمة LTI يتم وصفها، على الأقل تقريباً، بمعادلات تفاضلية من هذا النوع. تحويل لابلاس يصف أيضاً استجابة الصدمة للأنظمة LTI كمجموع خطي من الدوال المميزة للمعادلات التفاضلية التي تصف هذه الأنظمة. نتيجة لذلك فإن تحويل لابلاس يغلف خواص أي نظام بطريقة قوية وفعالة. العديد من طرق تحليل وتصميم الأنظمة تعتمد على استخدام محول لابلاس بدون أي رجوع مباشر إلى المعادلات التفاضلية التي تصف هذه الأنظمة. سنستكشف في هذا الفصل بعضاً من التطبيقات الأكثر شيوعا لتحويل لابلاس في تحليل الأنظمة.

أهداف الفصل

١- تطبيق تحويل لابلاس على التحليل العام للأنظمة LTI، بما في ذلك أنظمة التغذية العكسية، بغرض دراسة الاستقرار، والاستجابة في النطاق الزمني للإشارات القياسية، والاستجابة الترددية.

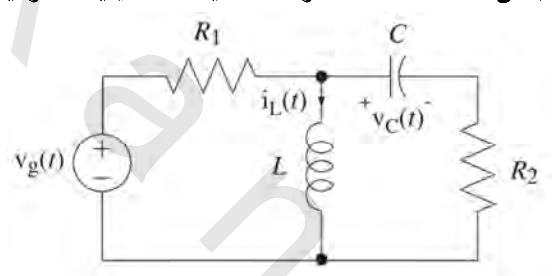
٢- تطوير طرق لبناء الأنظمة في صور مختلفة.

(١٣.٢) التعبير عن النظام

تشتمل قواعد الأنظمة على أنظمة من أنواع متعددة منها، الكهربية، والهيدروليكية، والنيوماتية، والكيميائية، وهكذا. أنظمة LTI يمكن وصفها عن طريق المعادلات التفاضلية أو المخططات الصندوقية. يمكن تحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات جبرية باستخدام تحويل لابلاس وهذه المعادلات المحولة تمثل طريقة بديلة لوصف الأنظمة.

يمكن وصف الأنظمة الكهربية عن طريق مخططات الدوائر. يمكن تحليل هذه الدوائر في النطاق الزمني، ولكن ذلك يحدث عادة في النطاق الترددي نتيجة قوة الجبر الخطي في التعبير عن علاقات الأنظمة بدلالة المعادلات الجبرية بدلاً من التفاضلية. الدوائر الكهربية هي توصيلات بينية بين عناصر هذه الدوائر مثل المقاومات، والمكثفات، والملفات، والترانستورات، والدايودات، والمحولات، ومصادر الجهد، ومصادر التيار، وهكذا. على مدى إمكانية توصيف هذه المكونات بعلاقات خطية في النطاق الترددي الخطي، فإن الدائرة الكهربية يمكن تحليلها بطرق في النطاق الترددي. العناصر غير الخطية مثل الترانستورات والدايودات (الصمامات الثنائية) والمحولات يمكن في العادة نمذجتها تقريبياً على مدى الإشارات الصغيرة كعناصر خطية. تتكون هذه النماذج من مقاومات، ومكثفات، ومحولات، زائد مصادر جهد وتيار معتمدة، وكلها يمكن وصفها بدوال عبور لأنظمة LTI.

كمثال على تحليل الدوائر باستخدام طرق لابلاس، افترض الدائرة التي في شكل (١٣.١)، التي تبين وصف لدائرة في النطاق الزمني. يمكن وصف هذه الدائرة بمعادلتين تفاضليتين مقترنتين كما يلي:



شكل (١٣.١) مخطط دائرة RLC في النطاق الزمني

$$-V_g(t) + R_1\left[i_L + C\frac{d}{dt}\big(V_C(t)\big)\right] + L\frac{d}{dt}\big(i_L(t)\big) = 0$$
$$-\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big(\mathrm{i_L(t)}\big) + \mathrm{V_C(t)} + \mathrm{R_2C}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big(\mathrm{V_C(t)}\big) = 0$$

إذا تم إجراء تحويل لابلاس على المعادلتين السابقتين نحصل على ما يلي:

$$-V_g(t) + R_1\{I_L(s) + C[sV_C(s) - V_C(0^+)]\} + sLI_L(s) - i_L(0^+) = 0$$
$$-[sLI_L(s) - i_L(0^+)] + V_c(s) + R_2C[sV_C(s) - V_C(0^+)] = 0$$

إذا افترضنا أنه ليست هناك أى طاقة ابتدائية مخزنة على المكثفات (أى أنها في حالتها الصفرية)، فإن هذه المعادلات يمكن تبسيطها كما يلي:

$$-V_g(s) + R_1I_L(s) + sR_1CV_C(s) + sLI_L(s) = 0$$
$$-\mathrm{sLI_L(s)} + \mathrm{V_C(s)} + \mathrm{sR_2CV_C(s)} = 0$$

من الشائع أن نكتب مثل هذه المعادلات على الصورة التالية :

$$\begin{bmatrix} R_1 + sL & sR_1C \\ -sL & 1 + sR_2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو :

$$\begin{bmatrix} Z_{R_1}(s) + Z_L(s) & Z_{R_1}(s)/Z_C(s) \\ -Z_L(s) & 1 + Z_{R_2}(s)/Z_C(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

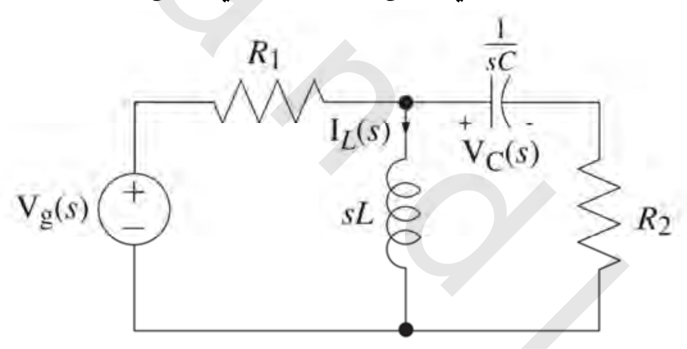
حيث :

$$Z_{R_1}(s) = R_1, \quad Z_{R_2}(s) = R_2, \quad Z_L(s) = sL, \quad Z_C(s) = 1/sC$$

لقد تمت كتابة هذه المعادلات على هذه الصورة لكى نؤكد على مفهوم المعاوقة في تحليل الدوائر. الكميات sL و 1/sC تمثل معاوقة الملف والمكثف، على التوالى. المعاوقة هي تعميم لمفهوم المقاومة. باستخدام هذا المفهوم يمكن كتابة المعادلات مباشرة من مخطط الدائرة باستخدام علاقات مشابهة لقانون أوم للمقاومات.

$$V_R(s) = Z_R I(s) = RI(s), \quad V_L(s) = Z_L I(s) = sLI(s), \quad V_C(s) = Z_C I(s) = (1/sC)I(s)$$

والآن يمكن أن ننظر للدائرة الموجودة في شكل (١٣.١) كما في شكل (١٣.٢).



شكل رقم (١٣.٢) مخطط دائرة RLC في النطاق الترددي

معادلات الدائرة يمكن كتابتها الآن مباشرة من شكل (١٣.٢) كمعادلتين في النطاق الترددي المركب بدون أى كتابة لمعادلات النطاق الزمنى (للمرة الثانية بفرض عدم وجود طاقة ابتدائية مخزنة في الدائرة) كما يلي :

$$-V_g(s) + R_1[I_L(s) + sCV_C(s)] + sL\, I_L(s) = 0$$
$$-\mathrm{sL}\, \mathrm{I_L}(s) + \mathrm{V_C}(s) + \mathrm{sR_2CV_C}(s) = 0$$

هذه المعادلات يمكن تفسيرها بمفهوم الأنظمة كتفاضل، و/أو ضرب في ثابت وتجميع إشارات، لـ $I_L(s)$ و $V_c(s)$ في هذه الحالة :

$$\underbrace{\underbrace{R_1 I_L(s)}_{\text{الضرب في ثابت}} + \underbrace{sR_1CV_C(s)}_{\text{التفاضل و الضرب في ثابت}} + \underbrace{sLI_L(s)}_{\text{التفاضل و الضرب في ثابت}}}_{\text{المجموع}} = V_g(s)$$

$$\underbrace{-\underbrace{sLI_L(s)}_{\text{التفاضل و الضرب في ثابت}} + V_C(s) + \underbrace{sR_2CV_C(s)}_{\text{التفاضل و الضرب في ثابت}}}_{\text{المجموع}} = V_g(s)$$

يمكن رسم مخطط صندوقى لهذا النظام باستخدام المكاملات، والمكبرات، ونقاط التجميع.

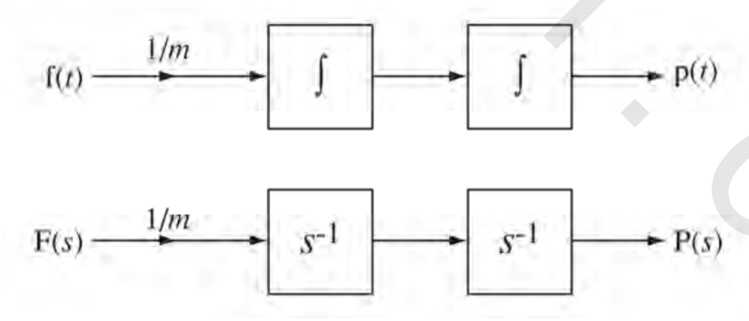
أنواع أخرى من الأنظمة يمكن نمذجتها أيضاً عن طريق الاتصالات البينية للمكاملات، والمكبرات، ونقاط التجميع. هذه العناصر يمكنها أن تمثل أنظمة طبيعية مختلفة يكون لها العلاقات الرياضية نفسها بين الإثارة والاستجابة أو الدخل والخرج. كمثال بسيط جداً، افترض أن كتلة m تم التأثير عليها بقوة f(t) (تمثل الإثارة)، حيث تستجيب هذه الكتلة بالحركة. إن الاستجابة من الممكن أن تكون الموضع p(t) للكتلة على أى نظام محاور مناسب. تبعا لقوانين نيوتن الكلاسيكية، فإن عجلة أى جسم تساوى القوة المطبقة على الجسم في هذا الاتجاه مقسومة على كتلة الجسم،

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(P(t)\right) = \frac{f(t)}{m}$$

يمكن التعبير عن ذلك في نطاق لابلاس (بفرض الموضع والسرعة الابتدائية تساوى صفراً) كما يلي:

$$s^2 P(s) = \frac{F(t)}{m}$$

وعلى ذلك فهذا النظام البسيط جداً يمكن نمذجته عن طريق الضرب في ثابت واثنين من المكاملات كما في شكل (١٣.٣).



شكل رقم (١٣.٣) مخطط صندوقى للمعادلة:

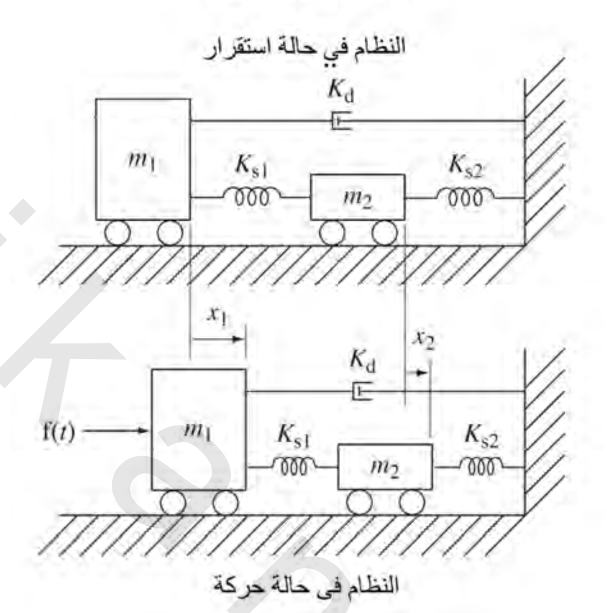
يمكننا أيضاً أن نمثل أنظمة أكثر تعقيداً باستخدام المخططات الصندوقية مثلما في شكل (١٣.٤). في هذا الشكل تمثل $x_1(t)$ و $x_2(t)$ المسافات من نقطة الاستقرار للكتل m_1 و m_2 على التوالى. بتجميع القوى على الكتلة m_1، نحصل على:

$$d^2P(t)/dt = f(t)/m \ and \ s^2P(s) = F(s)/m$$
$$f(t) - K_dX'_1 - \mathrm{K_{S1}}[x_1(t) - x_2(t)] = m_1X"_1(t)$$

وبتجميع القوى على الكتلة m_2، نحصل على:

$$\mathrm{K_{S1}}[x_1(t) - x_2(t)] - \mathrm{K_{S2}}\, \mathrm{x_2}(t) \ = m_2X"_2(t)$$

f(t) هى إشارة الإثارة للنظام



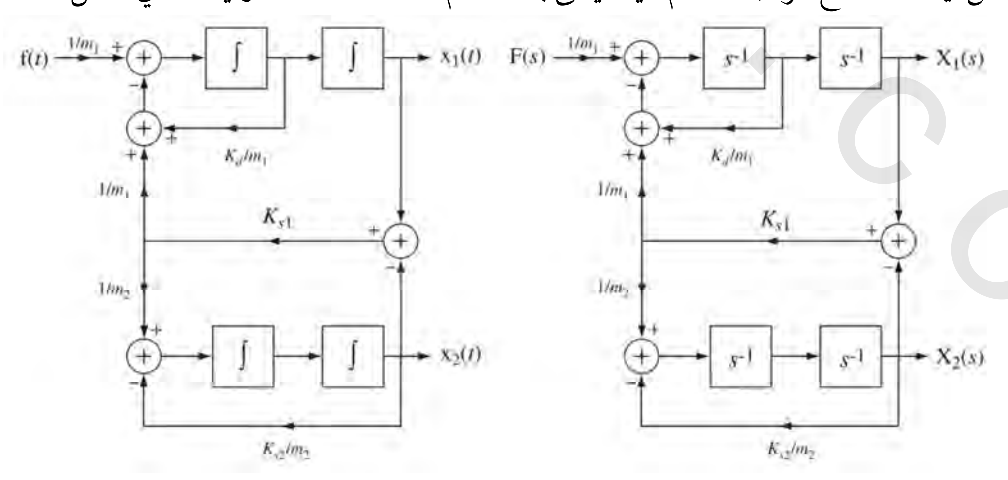
شكل رقم (١٣.٤) نظام ميكانيكى

بإجراء تحويل لابلاس للمعادلتين:

$$F(s) = K_dsX_1(s) - K_{d1}[X_1(s) - X_2(s)] = m_1s^2X_1(s)$$

$$K_{s1}[X_1(s) - X_2(s)] - K_{s2}X_2(s) = m_2s^2X_2(s)$$

يمكن أيضاً أن نضع نموذجاً للنظام الميكانيكى باستخدام المخططات الصندوقية كما في شكل (١٣.٥).



شكل رقم (١٣.٥) مخطط صندوقى للنطاق الترددي والنطاق الزمنى للنظام الميكانيكى في شكل (١٣.٤)

(١٣.٣) استقرار النظام

استقرار الأنظمة من الاعتبارات المهمة جداً في تحليل الأنظمة. كما أوضحنا في الفصل ٥، فإن النظام المستمر زمنياً يكون مستقراً محدود الدخل محدود الخرج BIBO إذا كانت استجابة الصدمة يمكن تكاملها إطلاقيا. تحويل لابلاس لاستجابة الصدمة هو دالة العبور. بالنسبة للأنظمة التي يمكن وصفها بمعادلات تفاضلية على الصورة التالية:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k}\big(y(t)\big) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k}\big(x(t)\big)$$

حيث $a_N=1$، وبدون فقد في العمومية فإن دالة العبور ستكون على الصورة التالية:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

في العادة يمكن تحليل المقام (عدديا إذا كان ضروريا)، بحيث إن دالة العبور يمكن كتابتها أيضاً على الصورة التالية:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}$$

إذا كان هناك أى أزواج من الأقطاب والأصفار التي تقع تماماً عند الموضع نفسه في المستوى s، فإنها تتلاشى في دالة العبور ويجب التخلص منها قبل فحص دالة العبور بغرض الاستقرار. إذا كان $M<N$، ولا يوجد أقطاب متكررة، فإن دالة العبور يمكن التعبير عنها في صورة كسور جزيئية كما يلي:

$$H(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_N}{s-p_N}$$

وبالتالى ستكون استجابة الصدمة على الصورة التالية:

$$h(s) = (K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_N e^{p_N t})u(t)$$

حيث الرموز p تمثل أقطاب دالة العبور. لكي تكون h(t) قابلة للتكامل المطلق، فإن كل واحد من هذه الكميات يجب أن يكون بنفسه قابلاً للتكامل المطلق. إن تكامل أى واحد من هذه الكميات سيكون على الصورة التالية:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |K e^{Pt} u(t)|\, dt = |K| \int_0^{\infty} \left| e^{Re(p)t} e^{jIm(p)t} \right| dt$$

$$I = |K| \int_0^{\infty} \left| e^{Re(p)t} \right| \Bigg| \underbrace{e^{jIm(p)t}}_{=1} \Bigg| dt = |K| \int_0^{\infty} \left| e^{Re(p)t} \right| dt$$

في التكامل السابق تكون الكمية $e^{Re(p)t}$ تكون موجبة على مدى التكامل. لذلك فإن:

$$I = |K| e^{Re(p)t} dt$$

لكي يتقارب هذا التكامل، فإن الجزء الحقيقي من القطب p يجب أن يكون سالباً.

لكي يكون النظام مستقراً BIBO، فإن كل أقطاب دالة العبور للنظام LTI يجب أن تقع في النصف الأيسر من المستوى s المفتوح.

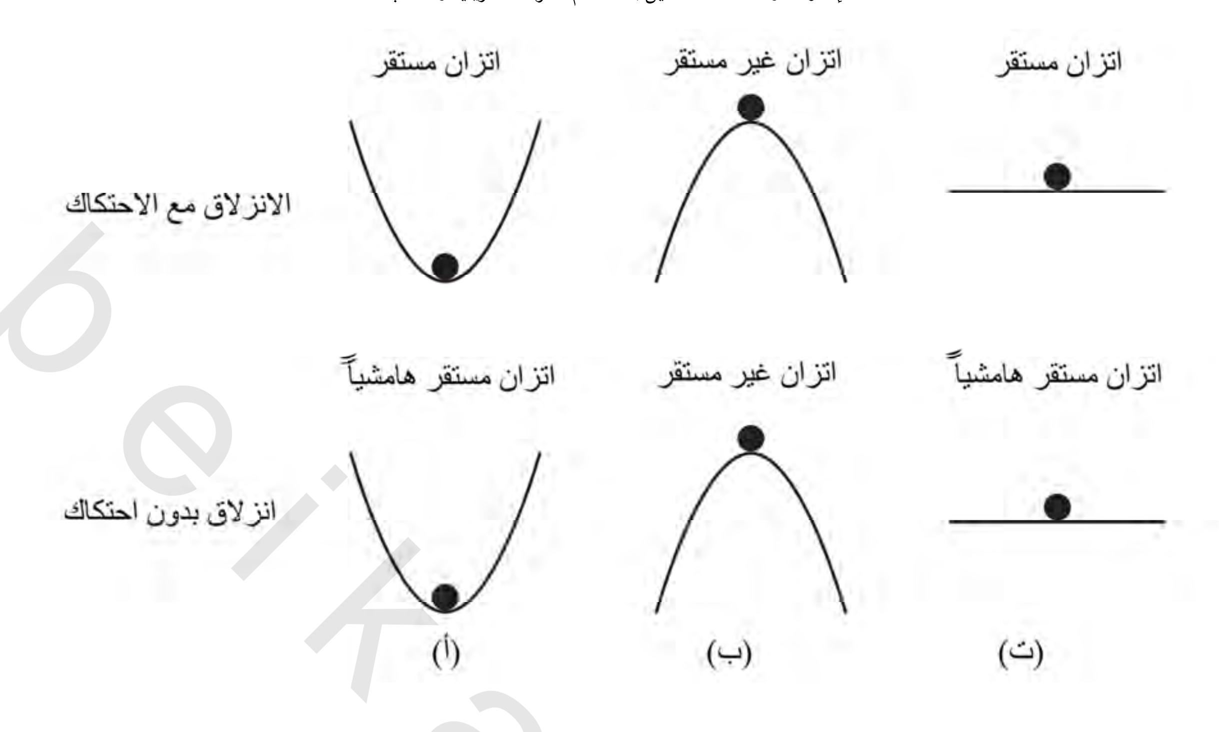
إن تعبير النصف الأيسر من المستوى s يعني النصف الأيسر من هذا المستوى، الذي لا يشتمل على المحور w. إذا كانت هناك أقطاب بسيطة (غير متكررة) على المحور w ولا يوجد أقطاب في النصف الأيمن من المستوى s، فإن النظام يسمى نظاماً مستقراً هامشياً؛ لأنه على الرغم من أن استجابة الصدمة لا تتناقص مع الزمن، إلا أنها لا تتزايد. الاستقرار الهامشي يعتبر حالة خاصة من عدم الاستقرار BIBO؛ لأنه في هذه الحالات من الممكن أن نجد إشارة دخل محدودة، يمكنها أن تعطى إشارة خرج غير محدودة. (على الرغم من أن ذلك قد يبدو غريبا، فإن النظام المستقر هامشيا يكون أيضاً غير مستقر BIBO).

إذا كان هناك قطب متكرر من الدرجة n في دالة العبور، فإن استجابة الصدمة سيكون بها كميات على الصورة العامة التالية $t^{n-1}e^{pt}$ حيث p هي موضع القطب المتكرر. إذا كان الجزء الحقيقي من p ليس سالباً، فإن الكميات التي من هذا النوع ستنمو بدون حدود في النطاق الزمنى الموجب، مما يعنى استجابة غير محدودة لإثارة محدودة وأن النظام سيكون غير مستقر BIBO. لذلك، إذا كانت دالة العبور لأى نظام لها أقطاب متكررة فإن القانون لا يتغير. يجب أن تكون جميع الأقطاب في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s لكي يكون النظام مستقراً. إذا كان هناك أقطاب متكررة على المحور ω ولا يوجد أقطاب في النصف الأيمن، فإن النظام لن يكون مستقراً هامشياً، إنه ببساطة سيكون غير مستقر. هذه الشروط ملخصة في جدول ١٣.١.

جدول رقم ١٣.١ شروط الاستقرار، أوالاستقرار الهامشي، أو عدم الاستقرار للنظام (والتي تشتمل على استقرار هامشي كحالة خاصة).

الاستقرار	الاستقرار الهامشى	عدم الاستقرار
جميع الأقطاب تكون في النصف الأيسر من المستوى s المفتوح	وأحد أو أكثر من الأقطاب البسيطة على المحور w ولكن لا يوجد أقطاب متكررة على المحور ω ولا يوجد أقطاب في النصف الأيمن من المستوى.	واحد أو أكثر من الأقطاب في النصف الأيمن من المستوى s أو على المحور ω (بما في ذلك الاستقرار الهامشى)

هناك تشابه قد يكون مفيداً أحياناً في تذكر الأوصاف المختلفة لاستقرار أو عدم استقرار النظام هي افتراض حركة كرة موضوعة على أنواع مختلفة من الأسطح، كما في شكل (١٣.٦).



شكل رقم (١٣.٦) توضيح لثلاثة أنواع من الاستقرار.

إذا قمنا بإثارة النظام في شكل (١٣.٦أ) بتطبيق صدمة من القوة الأفقية على الكرة، فإنها ستتحرك وبعد ذلك تنزلق للأمام والخلف. إذا كان هناك أي كمية من الاحتكاك ولو قليلة جداً (أو أي آلية أخرى لفقد الحركة مثل مقاومة الهواء)، فإن الكرة بالطبع سترجع إلى موضع استقرارها الأصلي وهذا يعتبر مثالا على الأنظمة المستقرة. إذا لم يكن هناك أي احتكاك (أو أي آلية فقد أخرى)، فإن الكرة ستتذبذب للأمام والخلف دائماً ولكنها ستظل حول نقطة الاستقرار السفلي. هذه الاستجابة لا تنمو مع الزمن، ولكنها أيضاً لا تتناقص. في هذه الحالة يكون النظام مستقرا هامشيا.

إذا قمنا بإثارة الكرة التي في شكل (١٣.٦ب) بأضعف ما يمكن من إثارة، فإن الكرة ستنزلق لأسفل ولن تعود لموضعها الأصلي. إذا كان التل الذي تسقط الكرة من فوقه عالي جداً ويقترب من المالانهاية، فإن سرعة الكرة ستقترب من المالانهاية، مما يمثل استجابة غير محدودة لإثارة محدودة. وهذا يمثل نظام غير مستقر. في شكل (١٣.٦ت) إذا أثرنا الكرة بوحدة صدمة عبارة عن قوة أفقية، فإنها تستجيب بالانزلاق. إذا كان هناك أي آلية للفقد، فإن الكرة ستؤول إلى استقرار ولكن عند موضع غير موضعها الأصلي. إن ذلك يعتبر استجابة محددة لإثارة محددة والنظام يعتبر مستقراً. إذا لم تكن هناك آلية للفقد، فإن الكرة ستنزلق إلى ما لانهاية بدون عجلة، وذلك يعتبر استقراراً هامشياً.

مثال ١٣.١

قطب متكرر على المحور ω

من أبسط الأمثلة على نظام له قطب متكرر على المحور ω هو المكامل المزدوج الذي له دالة عبور كالتالي : $H(s)=A/S^2$ حيث A ثابت. أوجد استجابة الصدمة لهذا النظام.

باستخدام تحويل لابلاس التالي :

$$t^n u(t) \overset{l}{\leftrightarrow} n!/s^{n+1}$$

يمكننا أن نحصل زوج التحويل التالي :

$$Atu(t) \overset{l}{\leftrightarrow} A/s^2$$

وهي دالة متزايدة بدون حدود على المحور الزمني الموجب مما يعني أن النظام غير مستقر (وليس مستقراً هامشياً).

(١٣.٤) توصيلات الأنظمة

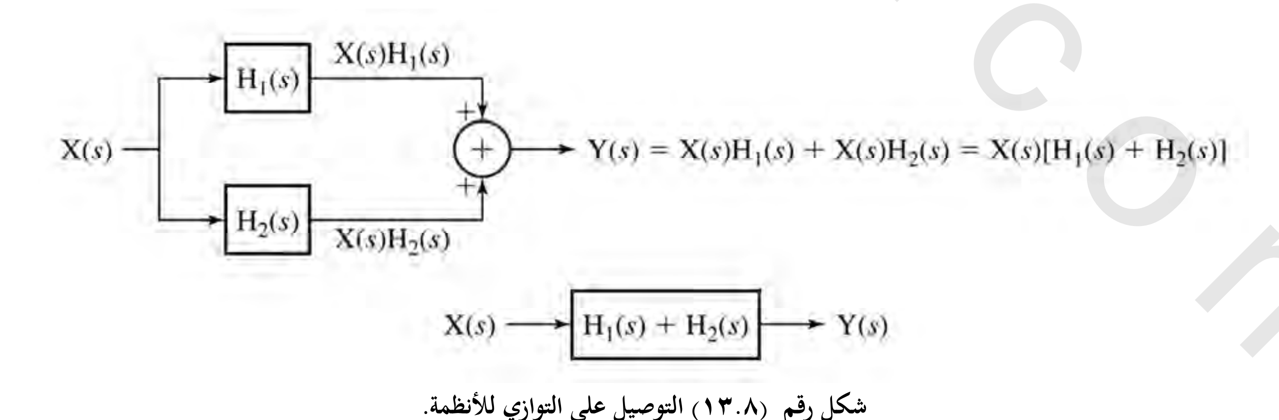
التوصيلات على التوالي وعلى التوازي

لقد رأينا فيما سبق استجابة الصدمة والاستجابة الترددية لتوصيلات من الأنظمة على التوالي وعلى التوازي. نتائج هذه الأنواع من الأنظمة تكون هي نفسها بالنسبة لدوال العبور كما كانت بالنسبة للاستجابات الترددية كما في شكل (١٣.٧) وشكل (١٣.٨).

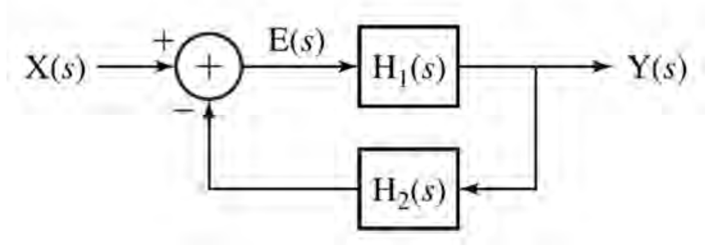
$X(s) \rightarrow [H_1(s)] \rightarrow X(s)H_1(s) \rightarrow [H_2(s)] \rightarrow Y(s) = X(s)H_1(s)H_2(s)$

$X(s) \rightarrow [H_1(s)H_2(s)] \rightarrow Y(s)$

شكل رقم (١٣.٧) التوصيل على التوالي للأنظمة.



شكل رقم (١٣.٨) التوصيل على التوازي للأنظمة.



شكل رقم (١٣.٩) توصيلات التغذية المرتدة للأنظمة.

توصيلات التغذية العكسية

المصطلحات والعلاقات الأساسية

نوع آخر من التوصيلات المهمة جداً في تحليل الأنظمة هي توصيلات التغذية العكسية، كما في شكل (١٣.٩). دالة العبور $H_1(s)$ توجد في المسار الأمامي ودالة العبور $H_2(s)$ توجد في المسار العكسي أو المرتد. في مطبوعات أنظمة التحكم من الشائع أن نسمي دالة العبور في المسار الأمامي $H_1(s)$ المصنع أو المحطة plant لأنها تكون عادة نظاماً مصمماً لإنتاج شيء، وتسمى دالة العبور في المسار العكسي أو المرتد $H_2(s)$ بأنها المستشعر أو الحساس؛ لأنها عادة تكون نظاماً مضافاً للمصنع للمساعدة في التحكم فيه أو تثبيته عن طريق استشعار استجابة المصنع وتغذيتها عكسيا إلى نقطة التجميع عند دخل المصنع. الآن أصبحت الإثارة أو الدخل إلى المصنع تسمى إشارة الخطأ وهي تساوي $E(s)=X(s)-H_2(s)Y(s)$ واستجابة ال $H_1(s)$، وهي $Y(s)=H_1(s)E(s)$، تمثل الإثارة للحساس أو المستشعر $H_2(s)$. بتجميع هذه المعادلات والحل لدالة العبور الكلية نحصل على ما يلي:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}$$ المعادلة رقم (١٣.١)

في المخطط الصندوقي الذي يوضح التغذية العكسية في شكل (١٣.٩) تم طرح إشارة التغذية العكسية من إشارة الدخل. إن ذلك يعتبر تقليداً شائعاً في تحليل أنظمة التغذية العكسية والذي ينبع من تاريخ استخدام التغذية العكسية السالبة في تثبيت النظام. الفكرة الأساسية وراء كلمة "سالبة" هي أنه إذا كانت إشارة خرج المصنع ستذهب بعيدا في اتجاه معين، فإن المستشعر سيغذي إشارة عكسية تتناسب مع إشارة خرج المصنع، ويتم طرحها من إشارة الدخل وبالتالي تحاول إرجاع إشارة خرج المصنع في الاتجاه المعاكس، وبالتالي تعديلها. إن ذلك بالطبع يفترض أن الإشارة المغذاة عكسياً عن طريق المستشعر تكون لها الجودة الكافية لتثبيت النظام. سواء كانت إشارة المستشعر ستثبت النظام في الحقيقة أم لا سيعتمد على استجابة هذا الحساس الديناميكية واستجابة المصنع الديناميكية.

من المعتاد في تحليل الأنظمة أن يتم إعطاء حاصل ضرب دالتي العبور في المسار الأمامي والمسار العكسي الاسم الخاص وهو دالة عبور الحلقة $T(s)=H_1(s)H_2(s)$، لأنها توضح الكثير جداً في تحليل أنظمة التغذية العكسية. في

تصميم مكبرات التغذية العكسية الإلكترونية يكون هذا الإسم هو حلقة الانتقال. إنها تسمى دالة عبور الحلقة أو حلقة الانتظام، لأنها تمثل ما يحدث للإشارة أثناء عبورها عند أي نقطة في الحلقة، وحول الحلقة عند زمن معين والعودة مرة ثانية إلى نقطة البداية (فيما عدا تأثير الإشارة السالبة عند نقطة التجميع). لذلك فإن دالة العبور لنظام التغذية العكسية تساوي دالة العبور الأمامية $H_1(s)$ مقسومة على واحد زائد دالة عبور الحلقة أو:

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1+T(s)}$$

لاحظ أنه عندما تكون $H_2(s)$ تساوي صفراً (مما يعني عدم وجود تغذية مرتدة) فإن $T(s)$ أيضاً تساوي صفراً وتصبح دالة عبور النظام $H(s)$ هي نفسها مثل دالة العبور الأمامية $H_1(s)$.

تأثيرات التغذية العكسية على الاستقرار

من المهم جداً أن نفهم أن التغذية العكسية من الممكن أن يكون لها تأثير سيء جداً على استجابة النظام، بحيث تحوله من نظام بطيء إلى سريع، أو سريع إلى بطيء، أو مستقر إلى غير مستقر، أو غير مستقر إلى مستقر. أبسط نوع من التغذية العكسية هو التغذية العكسية لإشارة تتناسب مباشرة مع إشارة الخرج، وهذا يعني أن $H_2(s)=K$ حيث K ثابت. في هذه الحالة تصبح دالة العبور الكلية كما يلي:

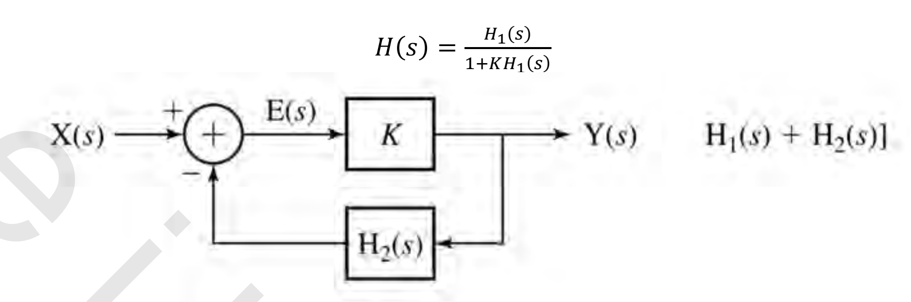
$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1+KH_1(s)}$$

افترض أن النظام الموجود في المسار الأمامي يحتوي مكامل له دالة العبور التالية: $H_1(s)=1/s$، وهذا النظام مستقر هامشيا. بالتالي فإن $H(s) = \frac{1/s}{1+K/s} = \frac{1}{s+K}$. دالة العبور في المسار الأمامي $H_1(s)$ لها قطب عند $s=0$، ولكن $H(s)$ أصبح لها الآن قطب عند $s=-K$. إذا كانت K موجبة فإن نظام التغذية العكسية الكلي أصبح مستقرا، له قطب واحد في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s. إذا كانت K سالبة فإن نظام التغذية العكسية الكلي سيكون غير مستقر وله قطب واحد في النصف الأيمن من المستوى s. مع جعل K قيمة موجبة وكبيرة فإن القطب يتحرك أكثر بعيداً عن نقطة الأصل في داخل المستوى s ويستجيب النظام بسرعة أكبر لإشارة الدخل. إن ذلك يعتبر توضيحاً بسيطاً لتأثير التغذية العكسية. هناك الكثير مما يمكن أن نتعلمه عن التغذية العكسية وعادة يحتاج الأمر لمقرر على مدار فصل دراسي كامل لتدريس تأثيرات التغذية العكسية على ديناميكية النظام.

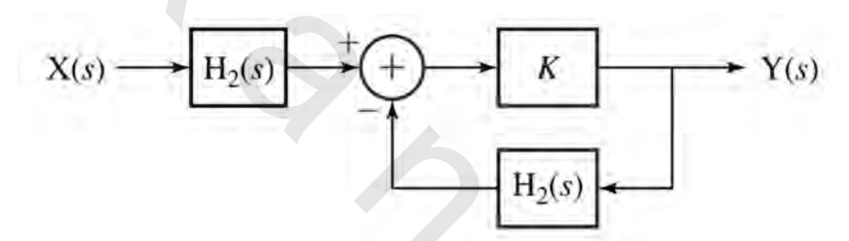
إن تغذية خرج المسار الأمامي عكسياً لتغير من دخله يسمى عادة "إغلاق أو قفل الحلقة" كما هو واضح، وإذا لم يكن هناك مساراً للتغذية العكسية فإن مثل هذا النظام يسمى نظام "مفتوح الحلقة". إن السياسيين ورجال الأعمال وآخرين من المحركين لشئوون المجتمع يريدون دائما أن يكونوا داخل الحلقة. هذا المصطلح ربما يكون قد جاء من مفهوم حلقة التغذية العكسية؛ لأن الشخص الموجود داخل الحلقة تكون لديه الفرصة دائماً في التأثير في أداء النظام وبالتالي تكون لديه القوة والفعالية في التأثير السياسي والاقتصادي والاجتماعي.

التأثيرات المفيدة للتغذية العكسية

تستخدم التغذية العكسية في الكثير من الأغراض. واحد من هذه التأثيرات الممتعة للتغذية العكسية يمكن رؤيته في نظام كالموضح في شكل (١٣.١٠). دالة العبور الكلية لهذا النظام ستكون كما يلي:



شكل رقم (١٣.١٠) نظام تغذية مرتدة.



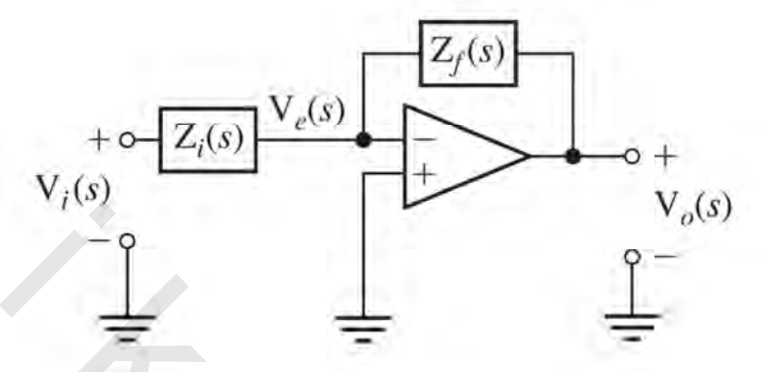
شكل رقم (١٣.١١) نظام متبوع بنظام آخر مصمم ليكون النظام العكسي له تقريباً.

إذا كانت K كبيرة بما فيه الكفاية، فإن بعض قيم s ستجعل $KH_2(s)>>1$ وبالتالي يصبح $H(s)\approx 1/H_2(s)$ وبالتالي فإن دالة العبور الكلية لنظام التغذية العكسية تؤدي تقريباً دور العملية نفسه العكسية لمسار التغذية العكسية تقريباً. إن ذلك يعني أننا إذا كنا سنوصل على التوالي نظاماً له دالة العبور $H_2(s)$ لهذا النظام ذو التغذية العكسية، فإن دالة العبور الكلية ستساوي واحداً تقريباً على مدى بعض القيم لـ s كما هو موضح في شكل (١٣.١١).

إنه من الطبيعي أن نتعجب عند هذه النقطة عن ما حققه هذا النظام الموجود في شكل (١٣.١١) لأنه يبدو أنه ليس له أي تأثير عام أو كلي. هناك بعض المواقف الحقيقية التي قد تتغير فيها الإشارة بسبب تأثير نظام لا يمكن تجنبه، ونحن نريد استرجاع هذه الإشارة الحقيقية. وهذا شائع جداً في أنظمة الاتصالات التي يتم فيها إرسال الإشارة على إحدى قنوات الاتصالات التي قد لا تغير من طبيعة الإشارة مثالياً، ولكن في الواقع يحدث هذا التغيير للإشارة لأسباب تكون خارج تحكم مصمم هذه القناة. يمكن استخدام مرشح معادل لاسترجاع هذه الإشارة الأصلية. هذا المرشح يتم تصميمه ليكون له التأثير العكسي لتأثير القناة على الإشارة بقدر الإمكان. بعض الأنظمة التي يتم تصميمها لقياس الظواهر الطبيعية تستخدم الحساسات التي تكون لها دالة عبور ضمنية لتمرير الترددات المنخفضة، ويكون ذلك عادة بسبب خواص ميكانيكية وحرارية لا يمكن تجنبها في هذه الحساسات. يمكن تصميم نظام القياس

لتكون له سرعة استجابة عالية عن طريق التوصيل على التوالي مع الحساس نظام معالجة إلكتروني للإشارة له دالة عبور تكون تقريباً لها التأثير العكسي لدالة عبور الحساس.

تأثير آخر مفيد للتغذية العكسية هو تقليل حساسية النظام للتغيرات في معاملاته. مثال شائع جداً لهذه الفائدة هو استخدام التغذية العكسية في مكبر العمليات كما هو موضح في شكل (١٣.١٢).



شكل (١٣.١٢) مكبر عاكس للجهد باستخدام مكبر عمليات مع التغذية المرتدة .

التعبير التقريبي لمعامل تكبير مكبر العمليات الذي تم توصيل الدخل غير العاكس فيه إلى الأرضي ($H_1(s)$ في مخطط التغذية العكسية الصندوقي) سيكون :

$$H_1(s) = \frac{V_0(s)}{V_e(s)} = -\frac{A_0}{1-s/p}$$

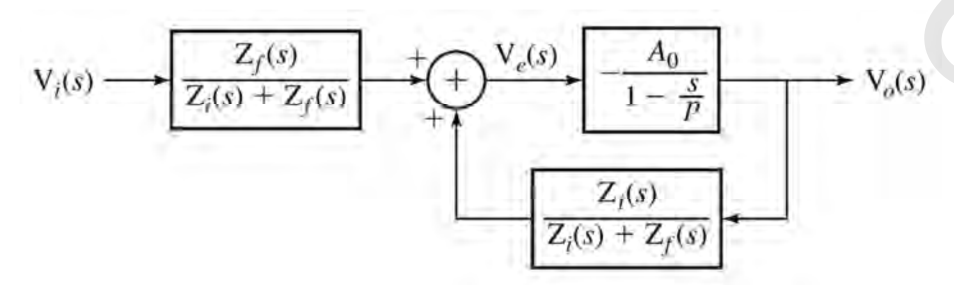
حيث A_0 هو مقدار معامل تكبير الجهد لمكبر العمليات عند الترددات المنخفضة و p هو قطب وحيد على المحور الحقيقي السالب للمستوى s. يمكن إيجاد دالة العبور الكلية باستخدام طرق تحليل الدوائر القياسية، ويمكن إيجادها أيضاً باستخدام مفاهيم التغذية العكسية. جهد الخطأ $V_e(s)$ دالة في $V_i(s)$ و $V_0(s)$. حيث إن معاوقة الدخل لمكبر العمليات تكون كبيرة جداً بالمقارنة مع المعاوقتين الخارجيتين $Z_i(s)$ و $Z_f(s)$، فإن جهد الخطأ سيكون :

$$V_e(s) = V_0(s) + [V_i(s) - V_0(s)]\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)+Z_f(s)}$$

أو :

$$V_e(s) = V_0(s)\frac{Z_i(s)}{Z_i(s)+Z_f(s)} - V_i(s)\left[\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)+Z_f(s)}\right]$$

وبالتالي يمكننا نمذجة هذا النظام باستخدام المخطط الصندوقي الموضح في شكل (١٣.١٣).



شكل (١٣.١٣) مخطط صندوقي لمكبر عاكس للجهد باستخدام تغذية مرتدة على مكبر العمليات.

تبعاً لدالة العبور العامة لنظم التغذية العكسية :

$$X(s) \qquad 1 + H_1(s)H_2(s)$$

فإن دالة العبور للمكبر يجب أن تكون على الصورة التالية :

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)+Z_f(s)}} = \frac{-A_0}{1+\left(-\frac{A_0}{1-S/P}\right)\left(-\frac{Z_i(s)}{Z_i(s)+Z_f(s)}\right)}$$

بتبسيط هذه المعادلة وحساب النسبة $V_0(s)$ إلى $V_i(s)$ كدالة عبور كلية للنظام :

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{-A_0 Z_f(s)}{(1-S/P+A_0)Z_i(s)+(1-S/P)Z_f(s)}$$

إذا كان مقدار معامل التكبير عند الترددات المنخفضة A_0 كبيراً جداً (وهو في العادة كذلك)، فإنه يمكن تقريب دالة العبور عند الترددات المنخفضة كما يلي :

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} \cong -\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}$$

وهذه هي المعادلة المعروفة لمعامل تكبير المكبر العاكس للجهد باستخدام مكبر العمليات المثالي. في هذه الحالة لفظة كبير تعني أن A_0 كبير بما فيه الكفاية بحيث يكون المقام لدالة العبور يساوي $A_0Z_i(s)$، وهذا يعني أن :

$$|A_0| \gg \left|1-\frac{s}{p}\right| \quad \text{و} \quad |A_0| \gg \left|1-\frac{s}{p}\right|\left|\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}\right|$$

قيمة هذا التكبير الحقيقية ليست مهمة طالما أنها كبيرة جداً وأنها تمثل حقيقة تقليل حساسية النظام للتغيرات في قيم المعاملات التي تؤثر في A_0 و p.

لتوضيح تأثيرات التغذية العكسية على أداء المكبر سنفترض الآتي :

$A_0=10^7$ و

$p=-100$

سنفترض أيضاً أن $Z_f(s)$ ستكون مقاومة تساوي $10\text{k}\Omega$ و $Z_i(s)$ مقاومة تساوي $1\text{k}\Omega$. بالتالي فإن دالة العبور الكلية للنظام ستكون :

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{-10^8}{11(1+s/100)+10^7}$$

القيمة العددية لدالة العبور عند التردد الزاوي $\omega=100$ (تساوي تردد دوري $f=100/2\pi\cong15.9\text{Hz}$) ستكون :

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{-10^8}{11+j11+10^7} = -9.999989 + j0.000011$$

الآن سنفترض أن معمل تكبير مكبر العمليات عند الترددات المنخفضة سيقل بمقدار المعامل 10 ليصبح $A_0=10^6$. عند إعادة حساب دالة العبور عند 15.9Hz سنحصل على ما يلي :

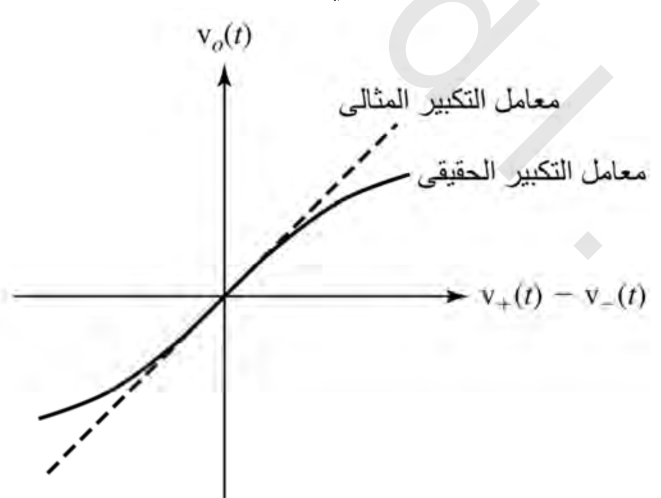
$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{-10^8}{11+j11+10^6} = -9.99989 + j0.00011$$

وهذا يمثل تغيراً يساوي 0.001% تقريباً في مقدار دالة العبور. ولذلك فإن تغير في دالة عبور المسار الأمامي بمعامل مقداره 10 سيعطي تغير في مقدار دالة العبور الكلية حوالي 0.001%. إن توصيل التغذية العكسية جعلت دالة العبور الكلية غير حساسة بدرجة جيدة للتغيرات في معامل تكبير مكبر العمليات، حتى التغيرات الكبيرة. هذه النتيجة تعتبر مفيدة جداً في تصميم المكبرات لأن المقاومات، وبالذات نسبة المقاومات يمكن جعلها غير حساسة للمعاملات المحيطة ويمكنها أن تجعل دالة عبور النظام ثابتة تقريباً، حتى لو تغيرت المكونات في مكبر العمليات بنسبة كبيرة من قيمها الأسمية.

نتيجة أخرى لعدم الحساسية النسبية لدالة عبور النظام للتغيرات في معامل التكبير A_0 لمكبر العمليات هي أنه إذا كان A_0 دالة في مستوى الإشارة، مما يجعل معامل تكبير المكبر غير خطي، فإنه طالما أن A_0 كبيراً، فإن دالة عبور النظام ستظل دقيقة وخطية عمليا كما في شكل (١٣.١٤).

تأثير آخر مفيد للتغذية العكسية يمكن رؤيته عن طريق حساب عرض المجال لمكبر العمليات نفسه ومقارنة ذلك مع عرض المجال للمكبر العاكس مع التغذية العكسية. التردد الركني لمكبر العمليات نفسه في هذا المثال كان 15.9Hz. التردد الركني للمكبر العاكس مع التغذية العكسية هو التردد الذي يتساوي عنده مقدار الجزء الحقيقي والجزء التخيلي في مقام دالة العبور الكلية.

إن ذلك يحدث عند التردد الدوري $f \cong 14.5MHz$، وذلك يعتبر زيادة هائلة في عرض المجال تقارب 910000. من الصعب أن نبالغ في أهمية أساسيات التغذية العكسية في تحسين أداء الأنظمة بالعديد من الطرق.



شكل رقم (١٣.١٤) معامل تكبير مكبر العمليات الخطي وغير الخطي

دالة العبور لمكبر العمليات تكون رقم كبير جداً عند الترددات المنخفضة، وبالتالي فإن مكبر العمليات يكون له معامل تكبير جهدي كبير جداً عند الترددات المنخفضة. معامل التكبير الجهدي لمكبر التغذية العكسية يكون

أصغر كثيراً. وبالتالي فإنه باستخدام التغذية العكسية، نفقد جزءاً كبيراً جداً من معامل التكبير الجهدي ولكننا كسبنا استقرار معامل التكبير وعرض المجال (بالإضافة إلى مميزات أخرى). فعليا، نحن قايضنا معامل التكبير مع التحسن في خواص المكبر الأخرى.

يمكن استخدام التغذية العكسية في استقرار الأنظمة غير المستقرة. طائرة التسلل F-117 تعتبر ضمنياً غير مستقرة. إنها تستطيع الطيران تحت تحكم القائد فقط مع المساعدة من نظام تغذية مرتدة يتحكم فيها الحاسب تقوم باستشعار موضع الطائرة، وسرعتها وارتفاعها وتقوم باستمرار بتعويض هذه المتغيرات كلما بدأت في الانحراف في اتجاه عدم الاستقرار. مثال بسيط جداً على استقرار نظام يكون غير مستقر، وباستخدام التغذية العكسية من الممكن أن يكون نظاماً مستقر، نفترض نظام كالذي له دالة العبور التالية:

$$H_1(s) = \frac{1}{s-p}, p > 0$$

مع وجود القطب في النصف الأيمن من المستوى s فإن النظام يكون غير مستقر. إذا استخدمنا مسار تغذية مرتدة له دالة عبور هي الثابت K سنحصل على دالة العبور الكلية التالية:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s-p}}{1+\frac{K}{s-p}} = \frac{1}{\mathrm{s-p+K}}$$

ومنها نجد أنه لأي قيمة للثابت K تحقق K>p، فإن نظام التغذية العكسية سيكون مستقراً.

عدم الاستقرار بسبب التغذية العكسية

على الرغم من أن التغذية العكسية من الممكن أن يكون لها العديد من التأثيرات المهمة، إلا أن هناك تأثيرات أخرى للتغذية العكسية على الأنظمة تكون غاية في الأهمية ومن الممكن أن تسبب مشاكل بدلا من أن تتسبب في فوائد للنظام. إن إضافة تغذية مرتدة لنظام مستقر من الممكن أن تتسبب في عدم استقراره. دالة العبور الكلية لأي نظام تغذية مرتدة هي:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

على الرغم من أن أقطاب كل من $H_1(s)$ و $H_2(s)$ من الممكن أن يقع في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s، إلا أن أقطاب $H(s)$ من الممكن ألا تحقق ذلك. افترض أن دالة العبور الأمامية والعكسية ستكون على الصورة التالية:

$$H_1(s) = \frac{K}{(s+3)(s+5)} \quad \text{و} \quad H_2(s) = \frac{1}{s+4}$$

حيث كل من $H_1(s)$ و $H_2(s)$ مستقر BIBO. ولكن إذا وضعناهما في نظام تغذية مرتدة كالتالي:

$$H(s) = \frac{K(s+4)}{(s+3)(s+4)(s+5)+K} = \frac{K(s+4)}{s^3+12s^2+47s+60+K}$$

هل سيكون هذا النظام مستقراً أم لا، سيعتمد ذلك على قيم K. إذا كانت K تساوي 5، فإن الأقطاب ستقع عند 5.904- و 3.048±j1.311-، وكلها تقع في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s وبالتالي فإن نظام التغذية العكسية سيكون مستقراً. ولكن إذا كانت K تساوي 700، فإن الأقطاب ستقع عند 12.917- و 0.4583±j7.657، مما يعني أن قطبين سيكونين في النصف الأيمن من المستوى s وبالتالي سيكون النظام غير مستقر.

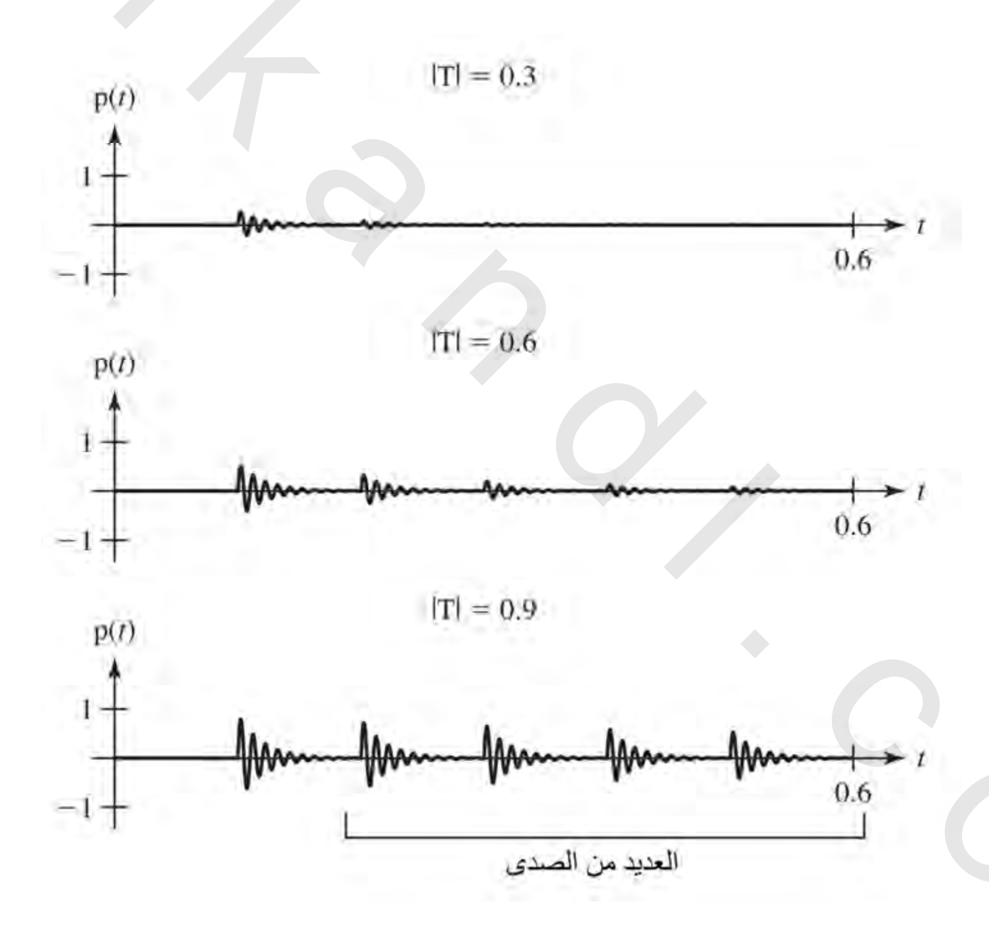
تقريباً كل واحد منا قد تعامل مع نظام أصبح غير مستقر بسبب التغذية العكسية. في العادة عندما يكون هناك زحام كبير للاستماع إلى أحد المتكلمين، فإنه يتم استخدام نظام صوتي عام. في هذا النظام يستخدم المتكلم الميكروفون، يتم تكبير الصوت وتغذيته إلى واحد أو أكثر من مكبرات الصوت بحيث يستطيع كل الحضور السماع إلى الصوت. بالطبع فإن الصوت الذي تم تكبيره وخرج من هذه السماعات سيتم استشعاره مرة ثانية عن طريق الميكروفون وتكبيره ثم توزيعة على مكبرات الصوت، وهذا مثال على التغذية العكسية، لأن إشارة الخرج من مكبرات الصوت تغذي مرة ثانية إلى الدخل من خلال الميكروفون. أي واحد لن ينسى أبداً عندما يصبح هذا النظام غير مستقر، حيث يتم سماع صفارة عالية جداً. وربما نحن نعلم الحل المعتاد لذلك، إنه تقليل معامل التكبير للمكبر. إن هذه الصفارة من الممكن أن تحدث حتى لو لم يكن هناك متحدث في الميكروفون. إذن لماذا يصبح النظام غير مستقر بدون أي إشارة للدخل، ولماذا عندما نقلل معامل التكبير للمكبر، فإن الصفارة لا تقل فقط، بل ربما تتلاشي ؟

يمكننا أن نفهم ظاهرة التغذية العكسية من خلال تجربة للتفكير. تخيل أن لدينا ميكروفوناً، ومكبراً، وسماعة في وسط الصحراء ولا يوجد هناك أي شخص ولا يوجد هناك أي ريح أو أي مؤثرات صوتية وأن معامل تكبير المكبر تم وضعه يساوي صفراً في البداية. إذا نقرنا الآن على الميكروفون، فإننا سنسمع فقط صوت النقر المباشر ولن نسمع أي شيء من السماعة. الآن سنفتح المكبر ونزيد معامل التكبير قليلاً. ابدأ الآن في النقر على الميكروفون حيث سنسمع صوت النقر المباشر ولكن بعض الصوت القليل من السماعة، متأخر قليلاً نتيجة المسافة التي يقطعها الصوت للانتقال من السماعة للأذن (بفرض أن السماعة بعيدة من الأذن كثيراً عن الميكروفون). مع زيادة معامل التكبير أكثر وأكثر، فإننا نزيد دالة عبور الحلقة T، وسيرتفع صوت النقر من السماعة كما في شكل (١٣.١٥). (في شكل (١٣.١٥)، p(t) تمثل الضغط الصوتي كدالة في الزمن).

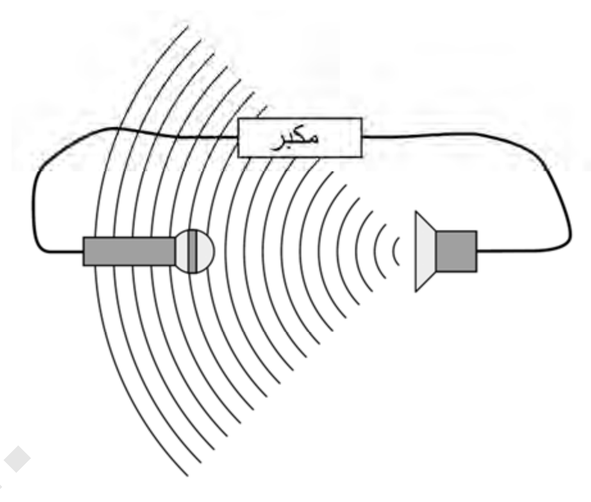
مع زيادة مقدار دالة عبور الحلقة T عن طريق زيادة معامل التكبير، فإنه مع النقر على الميكروفون نلاحظ تغيراً تدريجياً، ليس فقط في درجة الصوت، ولكن أيضاً في طبيعة الصوت الصادر من السماعة. إننا لانسمع فقط صوت النقر ولكننا نسمع أيضاً ما يسمى بالصدى، أو تعدد صدى النقر. هذا الصدى المتعدد يكون سببه صوت النقر الذي يأتي من السماعة للميكروفون، حيث يتم تكبيره ليذهب للسماعة مرة أخرى، ثم يرجع للميكروفون مرة ثانية وهكذا العديد من المرات. مع زيادة معامل التكبير تتضح هذه الظاهرة أكثر وأكثر، وعند قيمة معينة للتكبير

يبدا سماع صفارة عالية ومستمرة بدون النقر على الميكروفون وبدون أي مصدر آخر للصوت عند الميكروفون، حتى نقلل معامل التكبير مرة أخرى.

عند مستوى معين لمعامل تكبير المكبر، فإن أي إشارة تأتي من الميكروفون، مهما كانت ضعيفة، يتم تكبيرها، ثم تغذيتها للسماعة، ثم تعود مرة ثانية للميكروفون فتكون بمثابة إشارة دخل جديدة، تكون لها الشدة نفسها مثل الإشارة الأصلية. عند هذا التكبير، فإن الإشارة لن تموت أبداً، بل إنها ستظل تدور. إذا تم زيادة معامل التكبير قليلا، فإن الإشارة ستنمو مع كل دورة من الميكروفون للسماعة والعكس. إذا كان هذا النظام خطي حقاً، فإن الإشارة ستزداد بدون حدود. ولكن لا يوجد نظام صوتي حقيقي خطي، وعند مستوى معين، فإن المكبر سيدفع السماعات بقوة بقدر الإمكان حتى يصل الصوت إلى مستوى معين لا يرتفع عنه.



شكل رقم (١٣.١٥) صوت من نظام صوتي عام نتيجة النقر على الميكروفون عند ثلاث قيم مختلفة لدالة عبور الحلقة للنظام.



شكل رقم (١٣.١٦) نظام صوتي عام

من الطبيعي أن نتعجب كيف تبدأ هذه العملية بدون أي دخل صوتي للميكروفون. أولاً ، من الناحية العملية من غير الممكن أن نعتقد أنه لا توجد أصوات محيطة على الإطلاق تدخل إلى الميكروفون. ثانياً، حتى لو كان ذلك ممكناً فإن المكبر تكون به ضوضاء ضمنية تسبب إشارة صوتية من السماعات تكون كافية لبدء حلقة التغذية العكسية.

الآن سننتقل بالتجربة السابقة إلى مرحلة أخرى. سنترك معامل التكبير عالياً بدرجة كافية تتسبب في وجود الصفارة ونتحرك بالسماعة بعيداً أكثر من الميكروفون. مع تحريك السماعة بعيداً عن الميكروفون ، فإن نغمة الصوت الناتج تتغير ، وعند مسافة معينة ستتوقف الصفارة. إن نغمة الصوت تتغير نتيجة أن تردد الصفارة يعتمد على الزمن الذي يأخذه الصوت من السماعة إلى الميكروفون. أيضاً فإن الصفارة ستتوقف عند مسافة معينة ؛ لأن شدة الصوت من السماعة تتناقص مع إبعادها عن الميكروفون ، وبالتالي فإن الإشارة الراجعة نتيجة التغذية العكسية تكون أقل من الإشارة الأساسية ، وبالتالي فإن قدرة الإشارة تبدأ في التلاشي بدلاً الزيادة.

الآن سنضع نموذجاً رياضياً للنظام الصوتي العام السابق باستخدام الأدوات التي تعلمناها وسنرى تماماً كيف يحدث عدم الاستقرار نتيجة التغذية العكسية كما في شكل (١٣.١٦). لكي نحافظ على النموذج بسيطاً، وتوضيحياً في الوقت نفسه ، سنفترض أن دوال العبور للميكروفون ، والمكبر ، والسماعة كلها مقادير ثابتة وهي K_m ، و K_A ، و K_S. وسنفترض أن انتشار الصوت من السماعة للميكروفون سيكون تأخيراً زمنياً بسيطاً مع معامل تكبير يتناسب عكسياً مع مربع المسافة d من السماعة للميكروفون كما يلي :

$$p_m(t) = K\frac{p_s\left(t-\frac{d}{v}\right)}{d^2} \qquad \text{(١٣.٢) المعادلة رقم}$$

حيث $P_s(t)$ هي ضغط الصوت من السماعة ، و $p_m(t)$ هي الصوت الواصل إلى الميكروفون ، و v هي سرعة الصوت في الهواء و K ثابت. بإجراء تحويل لابلاس على طرفي المعادلة (١٣.٢) :

$$p_m(s) = \frac{K}{d^2} P_s(s) e^{-ds/v}$$

بالتالي يمكننا أن نفترض نموذج النظام الصوتي العام كنظام تغذية مرتدة له دالة العبور الأمامية التالية:

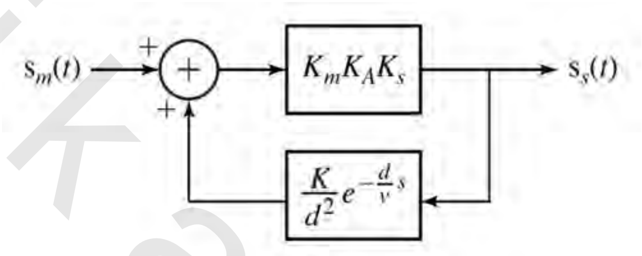
$$H_1(s) = K_m K_A K_s$$

ودالة عبور مسار التغذية العكسية ستكون كما يلي وكما في شكل (١٣.١٧):

$$H_2(s) = \frac{K}{d^2} e^{-ds/v}$$

دالة العبور الكلية للنظام ستكون كما يلي:

$$H_1(s) = \frac{K_m K_A K_s}{1 - \frac{K_m K_A K_s K}{d^2} e^{-ds/v}}$$



شكل رقم (١٣.١٧) مخطط صندوقي للنظام الصوتي العام.

الأقطاب p لدالة العبور لهذا النظام تقع عند أصفار المعالدة التالية:

$$1 - (K_m K_A K_s K/d^2) e^{-dp/v}$$

بمكننا أن نحل هذه المعادلة كما يلي:

$$1 - \frac{K_m K_A K_s K}{d^2} e^{-dp/v} = 0 \qquad \text{المعادلة رقم (١٣.٣)}$$

أو:

$$e^{-dp/v} = \frac{d^2}{K_m K_A K_s K}$$

أي قيمة لـ p تحل هذه المعادلة ستعتبر موضعاً لقطب. إذا أخذنا لوغاريتم طرفي المعادلة السابقة ونحل المعادلة لإيجاد قيمة p سنحصل على:

$$p = -\frac{v}{d} In\left(\frac{d^2}{K_m K_A K_s K}\right)$$

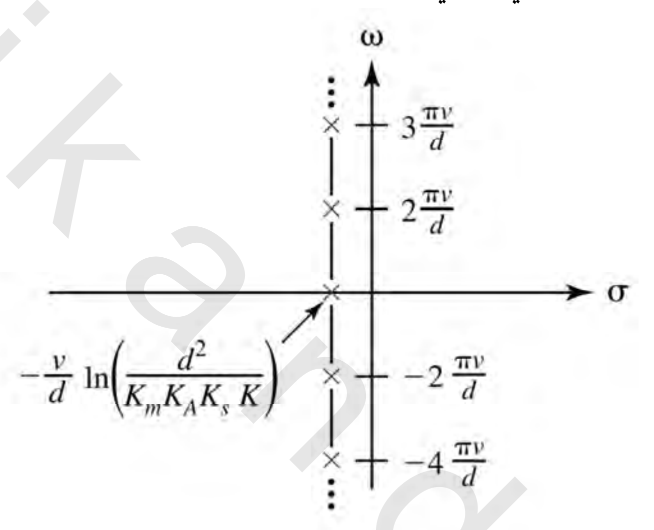
وبالتالي فإن ذلك يعتبر حلاً للمعادلة (١٣.٣)، ولكنه ليس الحل الوحيد. إنه فقط الحل ذو القيم الحقيقية. إذا أضفنا أي مضاعف صحيح للكمية j2πv/d على p سنحصل على حل آخر؛ لأن:

$$e^{-d(p+j2n\pi v/d)/v} = e^{-dp/v} \underbrace{e^{-j2n\pi}}_{=1} = e^{-dp/v}$$

حيث n هي أي رقم صحيح. إن ذلك يعني أن هناك عدداً من الأقطاب غير محدود، وكلها لها الجزء الحقيقي التالي نفسه كما في شكل (١٣.١٨):

$$-\frac{v}{d} In\left(\frac{d^2}{K_m K_A K_s K}\right)$$

إن هذا النظام يختلف قليلاً من الأنظمة التي قمنا بتحليلها؛ لأن هذا النظام له العديد من الأقطاب غير المحدودة، واحد لكل قيمة لـ n. ولكن هذا لا يمثل مشكلة في هذا التحليل؛ لأننا نحاول فقط الوصول إلى الشروط التي عندها سيكون النظام مستقراً. كما رأينا مسبقاً، فإن الاستقرار يتطلب أن تكون كل الأقطاب واقعة في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s. وهذا يعني ما يلي:



شكل رقم (١٣.١٨) مخطط الأقطاب والأصفار للنظام الصوتي المفتوح

$$-\frac{v}{d} In\left(\frac{d^2}{K_m K_A K_s K}\right) < 0$$

أو:

$$In\left(\frac{d^2}{K_m K_A K_s K}\right) > 0$$

$$\frac{K_m K_A K_s K}{d^2} < 1 \qquad \text{المعادلة رقم (١٣.٤)}$$

نصا، فإن حاصل ضرب مقادير كل دوال العبور حول حلقة التغذية العكسية يجب أن تكون أقل من الواحد. إن ذلك يكون طبيعيا جداً لأنه إذا كان حاصل الضرب لكل هذه المقادير يزيد على الواحد، فإن ذلك يعني أنه عندما تقوم الإشارة بدورة كاملة خلال حلقة التغذية العكسية، فإنها ستتزايد باستمرار وبدون حدود. ولذلك فعندما نقلل معامل تكبير المكبر K_A لوقف الصفارة الحادثة بسبب التغذية العكسية، فإننا في الحقيقة نحقق المعادلة (١٣.٤).

افترض أننا رفعنا من مقدار دالة عبور الحلقة $K_mK_AK_SK/d^2$ عن طريق زيادة معامل تكبير المكبر K_A، في هذه الحالة ستتحرك الأقطاب ناحية اليمين، بالتوازي مع المحور σ الحقيقي للمستوى s، وعند قيمة معينة لهذا التكبير، ستصل الأقطاب إلى المحور w. الآن افترض أننا بدلاً من ذلك رفعنا من مقدار دالة عبور الحلقة عن طريق تحريك الميكروفون والسماعة ليكونا بالقرب من بعضهما بعضا. إن ذلك سيحرك الأقطاب ناحية اليمين ولكن أيضاً مع الابتعاد عن المحور σ بحيث عندما نصل إلى الاستقرار الهامشي فإن الأقطاب كلها ستكون عند تردد زاوي عالي.

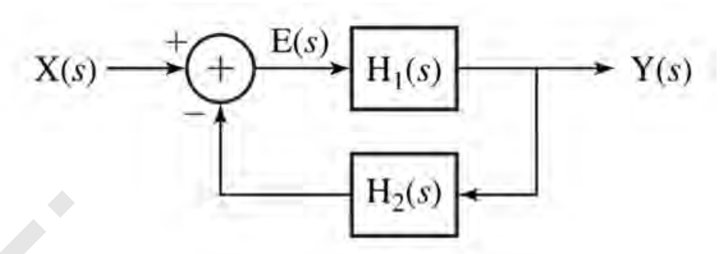
أي نظام يتوافق مع هذا النموذج من الممكن أن يدخل في حالة رنينية عند العديد من الترددات في الوقت نفسه ، ولكن في الحقيقة فإن ذلك نادر الحدوث. إن النظام الصوتي العام المكون من ميكروفون، ومكبر، وسماعة من الممكن أن يكون له دوال عبور تكون دالة في التردد ومن الممكن أن تغير من مواضع الأقطاب بحيث أن يكون زوج واحد فقط من الأقطاب هو الواقع على المحور ω عند الاستقرار الهامشي. إذا ارتفع معامل التكبير أكثر من معامل التكبير عند الاستقرار الهامشي فإن النظام سيندفع في حالة عدم خطية من التشغيل وتصبح الطرق الخطية لتحليل الأنظمة فاشلة في التوقع الدقيق لكيفية تصرف هذه الأنظمة. ولكن الطرق الخطية للأنظمة ستتوقع بدقة بأنها ستكون في حالة رنين وهذا في حد ذاته مهم جداً.

الذبذبات المستقرة باستخدام التغذية العكسية

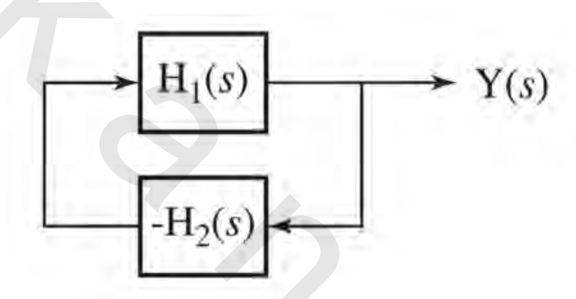
لقد كان الذبذبات في النظام الصوتي العام في الجزء السابق استجابة غير مرغوبة للنظام، ولكن بعض الأنظمة يتم تصميمها لكي تكون رنينية أو متذبذبة. من أمثلة ذلك مولدات الدوال المعملية، ساعة الحاسب، المذبذبات المحلية في أجهزة استقبال الراديو، بللورات الكوارتز في ساعات اليد، البندول في بعض ساعات الحائط، وهكذا. يتم تصميم بعض الأنظمة لتتذبذب في حالة غير خطية يتردد فيها النظام بين اثنين أو أكثر من الحالات غير المستقرة وإشارات الخرج لهذه الأنظمة ليست بالضرورة أن تكون جيبية، وساعة الحاسب تعتبر مثالاً جيداً على ذلك. ولكن بعض الأنظمة يتم تصميمها كأنظمة LTI تعمل في حالة الاستقرار الهامشي وتعطي تذبذبات جيبية حقيقية. حيث أن الاستقرار الهامشي يتطلب أن تكون أقطاب النظام على المحور ω في المستوى s، فإن هذه الحالة من التشغيل تكون غاية في الصرامة. إن أي تحرك ولو كان قليلاً لأقطاب النظام نتيجة أي تغير في أي واحد من المعاملات سيتسبب في أن هذه الذبذبات إما أن تتزايد أو تتناقص مع الزمن. ولذلك فإن الأنظمة التي تعمل في هذه الحالة يجب أن تكون بها آلية للحفاظ على هذه الأقطاب على المحور ω.

النموذج المبدئي لمخطط التغذية العكسية في شكل (١٣.١٩) له إثارة واستجابة. إن النظام المصمم ليتذبذب لا يكون له دخل ظاهري، بمعنى $X(s)=0$ كما في شكل (١٣.٢٠). (لقد تم تغيير الإشارة في $H_2(s)$ لجعل النظام في شكل (١٣.٢٠) يكون مثل النظام في شكل (١٣.١٩) مع $X(s)=0$). كيف سنحصل على استجابة أو خرج إذا لم

يكن هناك إثارة أو دخل ؟ الإجابة السريعة على ذلك هي لا يمكن. على الرغم من ذلك، فإنه من المهم أن نفهم أن كل نظام يكون له إثارة دائمة، سواء رضينا بذلك أم لم نرضَ. كل نظام يكون له عملية ضوضاء عشوائية تتسبب في تأرجح أو تقلب في الإشارة، والنظام يستجيب لهذه التأرجحات الضوضائية كما لو كانت إشارة دخل متعمدة.



شكل رقم (١٣.١٩) نموذج أولي لنظام تغذية مرتدة



شكل رقم (١٣.٢٠) نظام مذبذب بالتغذية المرتدة

المفتاح للحصول على تذبذبات مستقرة هو الحصول على دالة عبور تكون أقطابها على المحور ω على الصورة التالية:

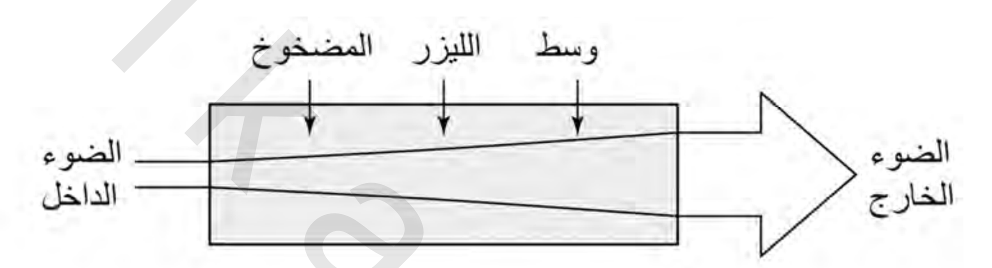
$$H(s) = \frac{A}{s^2 + \omega_0^2}$$

بالتالي سيكون معامل التكبير عند التردد الزاوي $\omega_0(s=\pm j\omega_0)$ لا نهائي، مما يعني أن الاستجابة تكون كبيرة جداً عن الإثارة. إن ذلك قد يعني أن الإثارةالمحددة تنتج استجابة غير محدودة، أو أن إثارة صفرية تنتج استجابة محدودة. لذلك فإن أي نظام تكون أقطابه على المحور ω يمكنها أن تعطي استجابة غير صفرية وبدون إثارة.

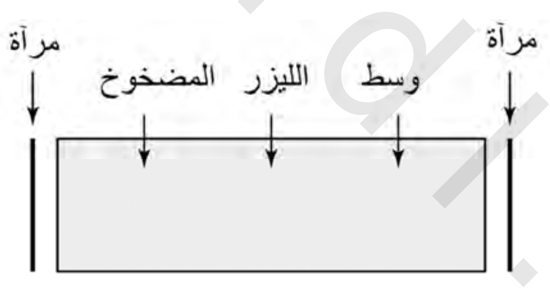
أحد الأمثلة المهمة لنظام مصمم ليتذبذب في الحالة الهامشية المستقرة هي الليزر. إن اللفظ LASER يعني التضخيم الضوئي عن طريق الانبعاث المثار light amplification by stimulated emission of radiation. الليزر ليست في الحقيقة مكبراً ضوئياً (على الرغم من حدوث التكبير الضوئي داخلياً)، إنها مذبذب ضوئي.

على الرغم من أن الليزر هو مذبذب، فإن التكبير الضوئي يكون عملية ضمنية في تشغيلها. الليزر يكون مملوءاً بوسط يتم ضخه عن طريق مصدر طاقة بحيث ينتشر الضوء الذي له الطول الموجي المناسب عبر الوسط متأثراً بزيادة في طاقته أثناء انتشاره كما في شكل (١٣.٢١).

الجهاز الموضح في شكل (١٣.٢١) عبارة عن مرور- أحادي، أو مضخم ضوئي للموجة العابرة، وليس الليزر. إن التذبذب الضوئي في الليزر يحدث عن طريق وضع مرايا في المكبر الضوئي ذي الموجة العابر أحادية المرور على كل نهاية بحيث تقوم بعكس بعض أو كل الضوء الساقط عليها. عند كل مرآة يتم عكس بعض أو كل الضوء في وسط الليزر للتكبير مرة أخرى كما في شكل (١٣.٢٢).



شكل رقم (١٣.٢١) مكبر ضوئي لموجة عابرة ذات المرور الواحد



شكل رقم (١٣.٢٢) الليزر

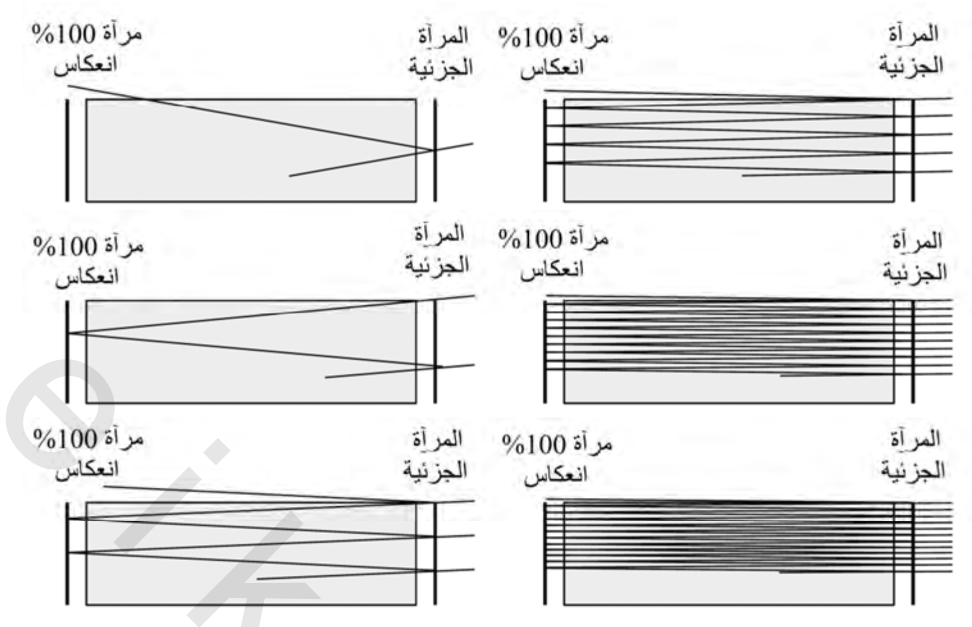
قد يكون من الممكن أساساً أن ندخل الضوء عند إحدى النهايات لهذا الجهاز من خلال مرآة جزئية وتكبيره. مثل هذا الجهاز يسمى مضخم ضوء الموجة العابرة المتجددة. من الشائع جداً أن يتم وضع المرآة عند إحدى النهايات بحيث تعكس بقدر الإمكان، وفعلياً تعكس كل الضوء الساقط عليها، وجعل المرآة عند الطرف الآخر مرآة عاكسة جزئياً، تعكس بعض الضوء الساقط عليها وتسمح بمرور الباقي.

يعمل الليزر بدون أي مصدر ضوئي خارجي كدخل. الضوء المنبعث يبدأ في وسط الليزر المضخوخ نفسه. هناك ظاهرة تسمى الانبعاث العفوي أو التلقائي تتسبب في انبعاث الضوء عند أزمنة عشوائية وفي اتجاهات عشوائية

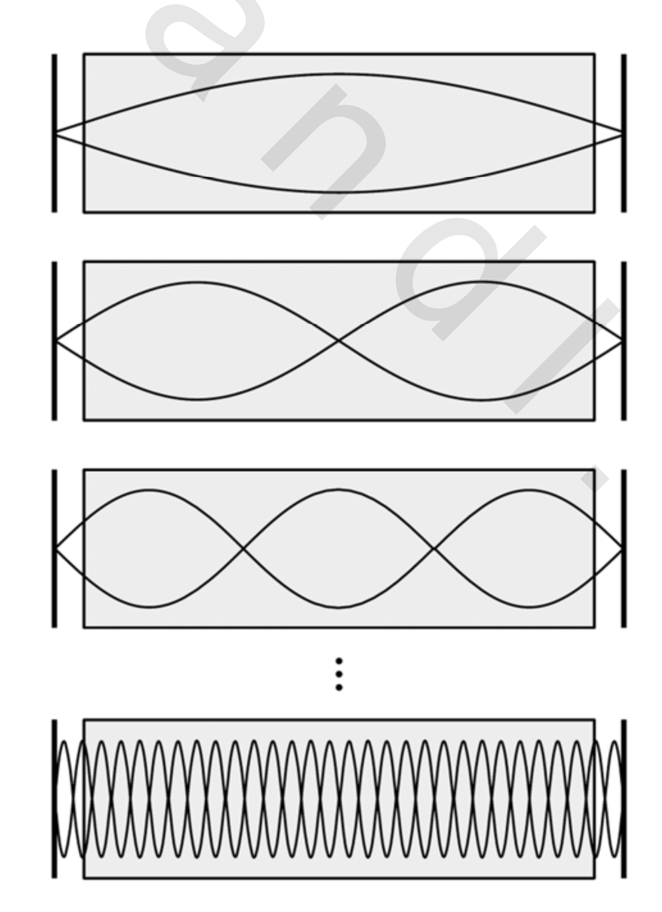
في وسط الليزر. أي ضوء من هذا ينتشر عمودياً على المرايا يتم تكبيره وهو في طريقه إلى المرآة، ثم ينعكس ويتم تكبيره مرة أخرى مع تأرجحه بين المرايا. كلما كان الانتشار عمودياً على المرايا، فإنه سيتأرجح أكثر وأكثر ويتم تكبيره أكبر وأكبر بالمرور المتعدد في الوسط الليزري بين المرايا. في حالة الاستقرار، يكون الضوء العمودي على المرايا له الطاقة الأكبر في كل الضوء المنتشر داخل حجرة الليزر؛ لأنه يكون له ميزة معامل التكبير الأكبر. إحدي المرايا تكون مرآة جزئية بحيث تبعث بعض الضوء مع انعكاسة من هذه المرآة، وهذا يمثل الشعاع الضوئي الخارج من حجرة الليزر كما في شكل (١٣.٢٣).

لكي تكون هذه الذبذبات الضوئية مستمرة، فإن دالة عبور الحلقة للنظام يجب أن تكون حقيقية وتساوي -1 مع افتراض إشارة التغذية العكسية في نظام النموذج الأولي للتغذية العكسية كما في شكل (١٣.١٩) أو يجب أن تكون رقماً حقيقياً يساوي +1 مع افتراض نظام الذبذبة كما في شكل (١٣.٢٠). مع أي واحد من هذين الافتراضيين، وللحصول على ذبذبة مستقرة، فإن الضوء ومع انتقاله من نقطة البداية إلى أحد المرايا ثم الانعكاس للمرآة الأخرى ثم العودة لنقطة البداية، يجب أن يكون مقدار معامل تكبيره يساوي وإحدى والإزاحة الطورية تكون عدد صحيح من ال 2π. إن ذلك يعني ببساطة أن الطول الموجي للضوء يجب أن يتناسب مع طول حجرة الليزر بعدد صحيح تماماً من الموجات في مساري الذهاب والعودة.

من المهم هنا أن نفهم أن الطول الموجي للضوء في الليزر يجب أن يكون في المدى من 100nm حتى العديد من الميكرونات (الفوق بنفسجي حت تحت الحمراء)، والطول المثالي لحجرة الليزر يكون في المدى من 100μm بالنسبة لدايود الليزر إلى أكثر من المتر في بعض الأحوال. ولذلك، مع انتشار الضوء بين المرايا، فإن الإزاحة الطورية المصاحبة قد تكون أكثر من مليون راديان، حتى في أقصر الحجرات الليزرية، فإن الإزاحة الطورية تكون عدداً صحيحاً كبيراً من الـ 2π راديان. لذلك ففي الليزر يكون الطول الموجي للتذبذبات محدد بواحد من الأطوال الموجية المرئية التي يجب أ تتناسب مع طول مسار رحلة الذهاب والعودة بعدد صحيح من الموجات. هناك العديد من الأطوال الموجية اللانهائية التي تحقق هذا الشرط، وهي الموجات المتناسبة مع مسار رحلة الذهاب والعودة تماماً زائد كل توافقاتها كما في شكل (١٣.٢٤).

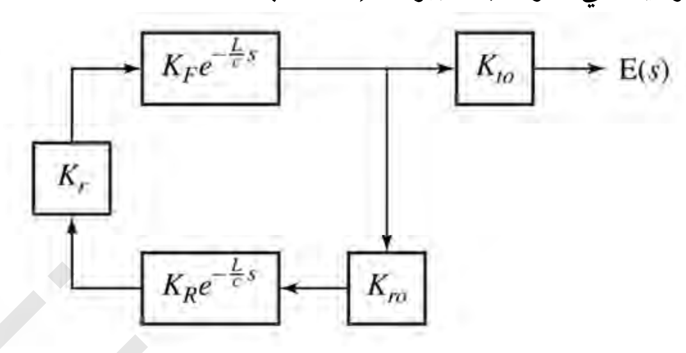


شكل رقم (١٣.٢٣) العديد من الانعكاسات الضوئية عند زوايا ابتدائية مختلفة.



شكل رقم (١٣.٢٤) توضيحات للطول الموجي المتناسب مع حجرة الليزر عدد صحيح من المرات.

على الرغم من أن كل هذه الأطوال الموجية من الممكن أن تتذبذب نظرياً، إلا أن هناك آليات أخرى (الرنين الذري أو الجزيئي، المرايا المنتقية للأطوال الموجية، وهكذا) يمكن أن تحد من التذبذبات الحقيقية إلى رقم صغير من هذه الأطوال الموجية التي يكون لها تكبير كافٍ للتذبذب.



شكل رقم (١٣.٢٥) مخطط صندوقي لليزر.

يمكن نمذجة الليزر بمخطط صندوقي له مسار أمامي وآخر عكسي كما في شكل (١٣.٢٥). الثوابت K_F و K_R تمثل مقدار معامل التكبير الناتج بالمجال الكهربي للضوء مع انتشارها من إحدى المرايا للمرآة الأخرى من خلال المسارين الأمامي والعكسي على التوالي. المعاملات $e^{-(L/C)s}$ تأخذ في الحسبان الإزاحة الطورية نتيجة زمن الانتشار حيث L هي المسافة بين المرايا و c هي سرعة الضوء في حجرة الليزر. الثابت K_{t0} هو معامل انتشار المجال الكهربي للضوء الخارج من حجرة الليزر من خلال مرآة الخرج الجزيئية والثابت K_{r0} هو معامل انعكاس المجال الكهربي للضوء المنعكس عند خرج المرآة الجزئية منعكساً في اتجاه حجرة الليزر. الثابت K_r هو معامل انعكاس المجال الكهربي للضوء المنعكس من المرآة العاكسة 100% للرجوع مرة أخرى لحجرة الليزر. الثوابت K_{t0}، K_{r0}، و K_r تكون كلها في العادة ثوابت مركبة مما يبين أنه سيكون هناك إزاحة طورية للمجال الكهربي أثناء الانعكاس والانتشار. دالة عبور الحلقة ستكون (باستخدام التعريف الناتج اعتماداً على العرف الموجود في شكل (١٣.١٩)):

$$T(s) = K_F K_{ro} K_R K_r e^{-(2L/c)s}$$

قيمته تكون 1- عندما:

$$|K_F K_{ro} K_R K_r| = 1$$

و:

$$e^{-(2L/c)s} = 1$$

أو بالتكافؤ:

$$s = -j2\pi n\left(\frac{c}{2L}\right) = -j\frac{\pi c}{L}n, \qquad n \text{ رقم صحيح}$$

حيث أن الكمية c/2L هي زمن السفر ذهاباً وعودة لموجة الضوء المنتشر. إنها قيم s على المحور ω عند توافقات التردد الزاوي πc/L. حيث إن هذه هي التردد الأساسي، فإنها تكون أيضاً التباعد بين الترددات، التي تعرف عادة بأنها تباعد الحالة المحورية $\Delta\omega_{ax}$.

عند بداية تشغيل الليزر، فإنه يتم ضخ الوسط ويبدأ أي شعاع ضوئي في الانبعاث التلقائي. إنه يبدأ في التنامي لأنه، في البداية، يكون تكبير مسار الذهاب والعودة أكبر من الواحد ($|K_F K_{r0} K_R K_r|>1$). ولكن مع نموها، فإنها تسحب طاقة من وسط الضخ، وهذا يقلل التكبير K_F و K_R. يتم الوصول إلى حالة اتزان عندما تكون شدة الشعاع تساوي تماماً المقدار المناسب الذي يحافظ على مقدار دالة عبور الحلقة، $|K_F K_{r0} K_R K_r|$)، يساوي واحداً تماماً. إن آلية الضخ وآلية التكبير في الليزر كليهما يكون عملية تحديد ذاتي تعمل على استقرار مقدار دالة عبور الحلقة. وبالتالي، طالما يكون هناك طاقة ضخ كافية وانعكاس كافي للمرايا لتحقيق مقدار دالة عبور الحلقة الذي يساوي واحداً عند بعض الطاقة المنخفضة جداً، فإن الليزر سيتذبذب باستقرار.

طريقة المواضع الجذرية

أحد الطرق الشائعة في تحليل أنظمة التغذية العكسية هي الأنظمة التي يكون فيها معامل تكبير المسار الأمامي $H_1(s)$ يحتوي ثابت تكبير K يمكن ضبطه كالتالي:

$$H_1(s) = K\frac{p_1(s)}{Q_1(s)}$$

هذا المعامل القابل للضبط K (من المعروف أنه لا يكون سالبا) يكون له تأثير قوي على ديناميكية النظام. دالة عبور النظام الكلية ستكون كما يلي:

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}$$

ودالة عبور الحلقة ستكون:

$$T(s) = H_1(s)H_2(s)$$

أقطاب $H(s)$ هي أصفار ال $1+T(s)$. يمكن كتابة دالة عبور الحلقة على الصورة K مضروبة في البسط ومقسومة على المقام:

$$T(s) = K\frac{p_1(s)}{Q_1(s)}\frac{p_2(s)}{Q_2(s)} = K\frac{P(s)}{Q(s)} \qquad \text{(١٣.٥) المعادلة رقم}$$

وبالتالي فإن أقطاب $H(s)$ ستكون عندما:

$$1 + K\frac{P(s)}{Q(s)} = 0$$

والتي يمكن التعبير عنها في صورتين تبادليتين كما يلي:

$$Q(s) + KP(s) = 0 \qquad \text{(١٣.٦) لمعادلة رقم}$$

و:

$$\frac{Q(s)}{K} + P(s) = 0 \qquad \text{(١٣.٧) المعادلة رقم}$$

من المعادلة (١٣.٥)، نرى أنه إذا كانت T(s) كسراً حقيقياً (Q(s) لها درجة أعلى من P(s))، فإن أصفار Q(s) تكون كل أقطاب T(s) وأصفار P(s) تكون كلها أصفار محددة ل T(s)، ولكن حيث إن درجة P(s) أقل من درجة Q(s) سيكون هناك أيضاً أصفاراً لـ T(s) عند الما لانهاية.

المدى الكامل والممكن لضبط K يكون من الصفر إلى الما لانهاية. سنفترض أولاً أن K تقترب من الصفر، عند هذا الحد، من (١٣.٦)، ستكون أصفار 1+T(s)، والتي تمثل أقطاب H(s)، ستكون أصفاراً لـ Q(s) وستكون أصفار H(s) بالتالي أقطابا لـ T(s) لأن T(s)=KP(s)/Q(s). الآن نفترض الحالة العكسية، وهي عندما تقترب K من المالانهاية. عند هذا الحد، من المعادلة (١٣.٧)، ستكون أصفار 1+T(s) أصفارا لـ P(s) وأقطاب H(s) هي أصفار T(s) (بما في ذلك أي أصفار عند الما لانهاية). وبالتالي فإن أقطاب دالة عبور الحلقة وأصفارها تكون مهمة جداً في تحليل أنظمة التغذية العكسية.

مع تحرك معامل التكبير K من الصفر إلى المالانهاية، فإن أقطاب نظام التغذية العكسية تتحرك من أقطاب لدالة عبور الحلقة إلى أصفار لدالة عبور الحلقة (التي قد يكون بعضها عند الما لانهاية). رسم الموضع الجذري هو رسم لمواضع أقطاب نظام التغذية العكسية مع تغير معامل التكبير K من الصفر إلى الما لانهاية. إن الاسم "الموضع الجذري" يأتي من تغير مواضع جذور الـ 1+T(s) مع تغير معامل التكبير K.

سنفحص مثالين مبسطين على طريقة الموضع الجذري وبعد ذلك نضع بعض القوانين العامة لرسم الموضع الجذري لأي نظام. سنفترض أولاً نظاماً تكون له دالة عبور المسار الأمامي كما يلي:

$$H_1(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

والتي يكون لها معامل تكبير المسار العكسي $H_2(s)=1$. وبالتالي فإن:

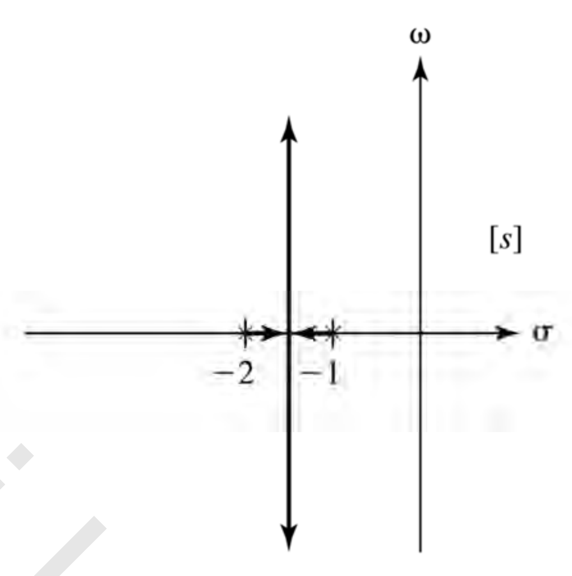
$$T(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

ويبدأ رسم الموضع الجذري عند s=-1 و s=-2، التي تمثل موضع أقطاب T(s). كل أصفار T(s) تكون عند الما لانهاية وهذه هي الأصفار التي يقترب منها الموضع الجذري مع زيادة معامل التكبير K كما في شكل (١٣.٢٦).

جذور ال 1+T(s) هي جذور المعادلة التالية:

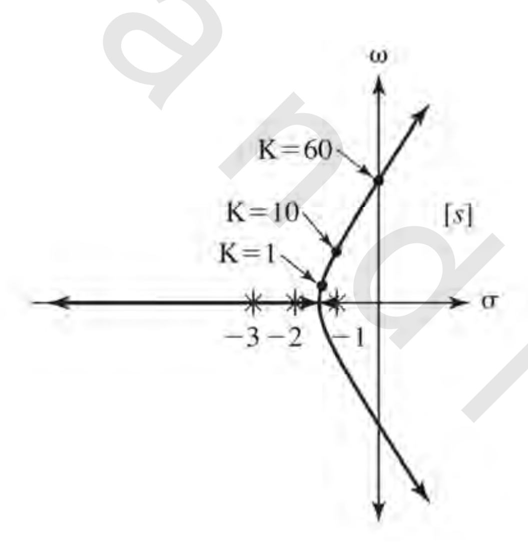
$$(s+1)(s+2) + K = S^2 + 3s + 2 + \mathrm{K} = 0$$

وباستخدام المعادلة التربيعية ستكون الجذور عند $(-3 \pm \sqrt{1-4K})/2$. عندما K=0 سنحصل على الجذور عند s=-1 و s=-2، وهي أقطاب الـ T(s). عندما K=1/4 سنحصل على قطب متكرر عند 3/2-. عندما K>1/4 سنحصل على جذور مركبة مترافقة تذهب فيها الأجزاء التخيلية إلى زائد وناقص ما لانهاية مع زيادة K ولكن أجزاءها الحقيقية تظل عند 3/2-. حيث إن هذا الموضع الجذري يمتد إلى الما لانهاية في البعد التخيلي مع جزء حقيقي يضع الجذور دائماً في النصف الأيسر من المستوى s، بالتالي فهذا النظام يكون مستقراً لأي قيمة للثابت K.



شكل رقم (١٣.٢٦) المحل الجذري للمعادلة:

$$\mathbf{1 + T(s) = 1 + \frac{K}{(s+1)(s+2)}}$$



شكل رقم (١٣.٢٧) الموضع الجذري للمعادلة:

$$\mathbf{1 + T(s) = 1 + \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}}$$

الآن بإضافة قطب في المسار الأمامي لدالة العبور لنجعلها على الصورة:

$$H_1(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

الموضع الجذري الجديد سيكون هو موضع حلول المعادلة التالية كما هو موضح في شكل (١٣.٢٧).

$$S^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K = 0$$

عند أو فوق قيمة K التي عندها سيعبر فرعا الموضع الجذري المحور w، سيكون هذا النظام غير مستقر. وعلى ذلك فهذا النظام، الذي هو نظام حلقة مفتوحة مستقرة، يمكن أن تكون غير مستقرة باستخدام التغذية العكسية. ستكون الأقطاب عند جذور المعادلة التالية:

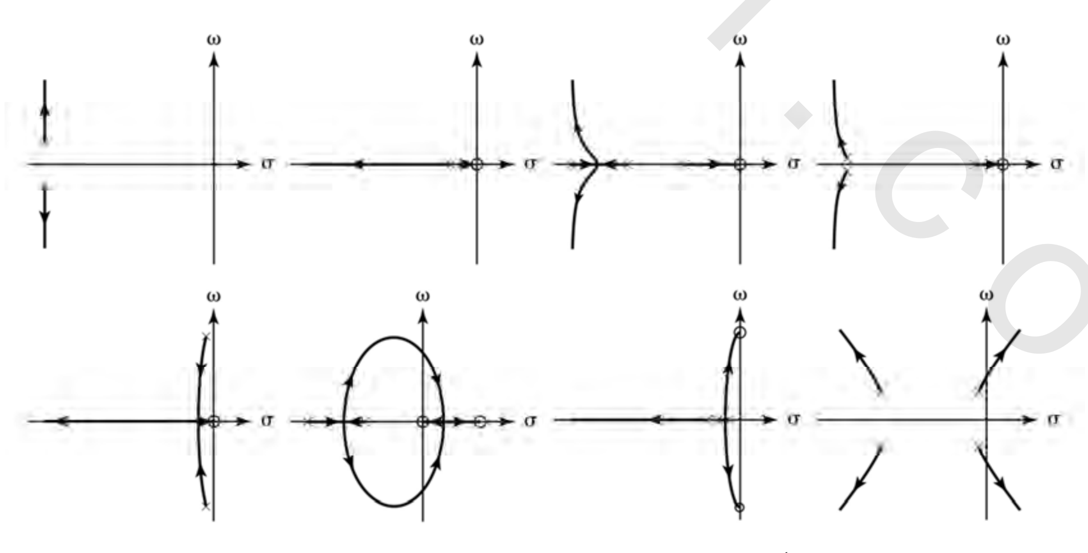
$$S^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K = 0$$

من الممكن أن نجد حل عام للمعادلة المكعبة من هذا الشكل، ولكنها تكون مملة. من السهل جداً أن نولد العديد من قيم الـ K والحل لإيجاد الجذور العددية لإيجاد قيمة K التي تتسبب في تحريك أقطاب H(s) إلى النصف الأيمن من المستوى s.

يمكننا أن نرى أن القيمة K=60 في شكل (١٣.٢٨) ستضع القطبين على المحور w تماماً. وعلى ذلك فأي قيمة للـ K أكبر من أو تساوي 60 ستجعل هذا النظام ذا التغذية العكسية غير مستقر.

K	الجذور →		
0	−3	−2	−1
0.25	−3.11	−1.73	−1.16
0.5	−3.19	$-1.4 + j0.25$	$-1.4 - j0.25$
1	−3.32	$-1.34 + j0.56$	$-1.34 - j0.56$
2	−3.52	$-1.24 + j0.86$	$-1.24 - j0.86$
10	−4.31	$-0.85 + j1.73$	$-0.85 - j1.73$
30	−5.21	$-0.39 + j2.60$	$-0.39 - j2.60$
60	−6.00	$0.00 + j3.32$	$0.00 - j3.32$
100	−6.71	$0.36 + j3.96$	$0.36 - j3.96$

شكل رقم (١٣.٢٨) جذور المعادلة $s^3 + 6s^2 + 11s + K = 0$ للعديد من قيم K.



شكل رقم (١٣.٢٩) مثال على مخططات الموضع الجذري

شكل (١٣.٢٩) توضح بعض مخططات الموضع الجذري لأعداد مختلفة ومواضع مختلفة للأقطاب والأصفار للـ T(s). هناك العديد من القوانين لرسم مخططات الموضع الجذري. هذه القوانين تأتي من القوانين الجبرية عن طريق قوانين استنتجها الرياضيون عن مواضع جذور معادلات كثيرة الحدود.

١- عدد الأفرع في الموضع الجذري يكون هو الدرجة الأعلى لكثيرة الحدود في البسط وكثيرة الحدود في المقام لـ T(s).

٢- كل فرع في الموضع الجذري يبدأ من قطب للـ T(s) وينتهي عند صفر في الـ T(s).

٣- أي منطقة على المحور الحقيقي يكون عندها مجموع عدد الأقطاب الحقيقية و/أو الأصفار الحقيقية التي تقع على يمين هذه المنطقة على المحور الحقيقي فردياً، تكون جزءاً من الموضع الجذري، وكل المناطق الأخرى على المحور الحقيقي لا تكون جزءاً من الموضع الجذري. المناطق التي تكون جزءاً من الموضع الجذري تسمى المناطق "المسموح لها".

٤- الموضع الجذري يكون متماثلاً حول المحور الجذري.

٥- عدد الأقطاب المحددة لـ T(s) لو زاد عن عدد الأصفار المحددة لها برقم صحيح m، وبالتالي فإن m من الفروع للموضع الجذري تنتهي عند أصفار لـ T(s) تقع عند الما لانهاية. كل واحد من هذه الخطوط يقترب من خط مستقيم من خطوط التقارب وزوايا هذه الخطوط التقاربية تكون $(2k+1)\pi/m$ حيث $k=0, 1, \ldots, m-1$ بالنسبة للمحور الحقيقي الموجب. هذه الخطوط التقاربية تتقاطع مع بعضها بعضاً على المحور الحقيقي عند الموضع،

$$\sigma = \frac{1}{m}\left(\sum finite\ poles - \sum finite\ zeros\right)$$

وهذا الموضع يسمى مركز الموضع الجذري. (إنها تساوي مجموع كل الأقطاب المحددة وكل الأصفار المحددة، وليس فقط التي تقع على المحور الحقيقي).

٦- نقاط الافتراق؛ أو نقاط الالتقاء التي تتقاطع عندها أفرع الموضع الجذري تحدث عند:

$$\frac{d}{ds} = \left(\frac{1}{T(s)}\right) = 0$$

مثال ١٣.٢

الموضع الجذري ١

ارسم الموضع الجذري للنظام الذي له دالة عبور الحلقة كما يلي:

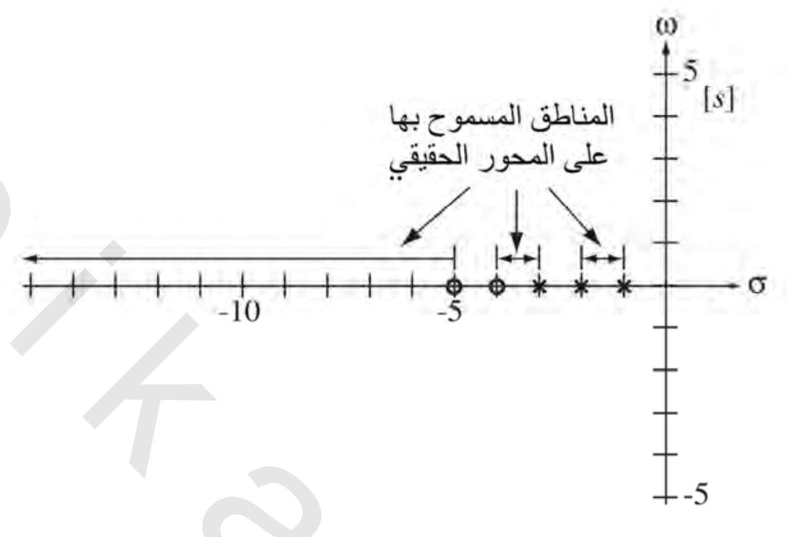
$$T(s) = \frac{(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

خطوات التفكير في معرفة أين تتفرع فروع الموضع الجذري ستكون كما يلي:

١- الدالة T(s) لها أقطاب عند $\sigma=-1$، و $\sigma=-2$، و$\sigma=-3$ ، وأصفار عند $\sigma=-4$، و$\sigma=-5$ ، و$|s|\to\infty$.

٢- عدد أفرع الموضع الجذري سيكون ٣ (القانون ١).

٣- المناطق المسموح بها على المحور الحقيقي ستكون $-2<\sigma<-1$ ، و $-4<\sigma<-3$ ، و $\sigma<-5$ كما في شكل (١٣.٣٠) (القانون ٣).



شكل رقم (١٣.٣٠) المناطق المسموح بها على المحور الحقيقي



شكل رقم (١٣.٣١) المرحلة الابتدائية لرسم الموضع الجذري

٤- أفرع الموضع الجذري يجب أن تبدأ عند $\sigma=-1$ ، و $\sigma=-2$ ، و $\sigma=-3$ (القانون ٢).

٥- اثنان من أفرع الموضع الجذري ستنتهي عند $\sigma=-4$ و $\sigma=-5$ والفرع الثالث يجب أن ينتهي عند الصفر الذي عند الما لانهاية (القانون ٢).

٦- فرعا الموضع الجذري اللذان يبدآن عند σ=-1، و σ=-2 يتحركان مبدئياً في اتجاه كل منهما للآخر ويجب أن يظلا في منطقة مسموحة (القانون ٣). عندما يتقاطعا سيصبحان مركبين وسيكون كل منهما مرافقاً للآخر (القانون ٤).

٧- فرع الموضع الجذري الثالث الذي يبدأ عند σ=-3 يجب أن يتحرك في اتجاه اليسار ناحية الصفر الذي عند σ=-4 (القانون ٣). هذا الفرع لا يمكن أن يذهب في أي اتجاه آخر، وفي الوقت نفسه يحافظ على التماثل حول المحور الحقيقي. ولذلك فإن هذا الفرع ينتهي عند الصفر الذي عند σ=-4 كما في شكل (١٣.٣١) (القانون ٢).

٨- نحن نعرف الآن أن الفروع الأخرى للموضع الجذري يجب أن تنتهي عند الصفر عند σ=-5 والصفر الذي عند |s|→∞. إنها في الأصل مركبة، لذلك فإنها يجب أن تتحرك ناحية اليسار ثم مرة أخرى لأسفل إلى المحور σ وبعد ذلك يتجه أحد ما ناحية اليمين لينتهي عند الصفر σ=-5، بينما يتجه الآخر ناحية اليسار في اتجاه الما لانهاية السالبة (القانون ٢).

٩- هناك ثلاثة أقطاب محددة وصفران محددان، وهذا يعني أن هناك فقط فرعاً واحداً للموضع الجذري سيذهب إلى صفر عند الما لانهاية كما رأينا. الزاوية التي سيتقارب بها هذا الفرع يجب أن تكون π مع المحور الحقيقي السالب (القانون ٥). إن هذا يتوافق مع الخلاصة السابقة (رقم ٨).

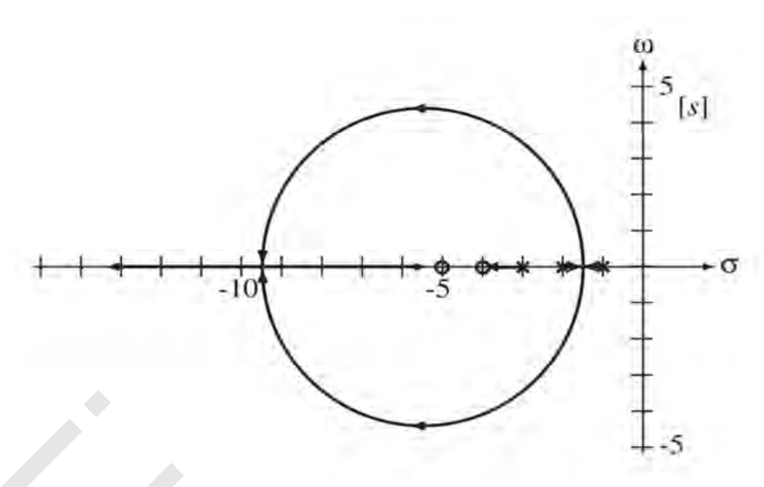
١٠- النقطة التي سيفترق عندها الفرعان على المحور الحقيقي والنقطة التي سيلتقي عندها الفرعان مرة أخرى في اتجاه المحور الحقيقي يجب أن يحدثا عند (d/ds)(1/T(s))=0 (القانون ٦).

$$\frac{d}{ds}=\left(\frac{1}{T(s)}\right)=\frac{d}{ds}\left[\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(s+4)(s+5)}\right]=0$$

بالتفاضل والمساواة للصفر نحصل على:

$$s^4+18s^3+10s^2+228s+166=0$$

جذور هذه المعادلة ستكون عند s=-9.47، و s=-4.34، و s=-2.69، و s=-1.50. وبالتالي فإن نقطة الافتراق ستكون عند σ=-1.50 ونقطة الالتقاء ستكون عند σ=-9.47. الموضع الجذري لن يدخل على الإطلاق إلى النصف الأيمن من المستوى s، وعلى ذلك فهذا النظام سيكون مستقراً لأي قيمة موجبة لمعامل التكبير K كما في شكل (١٣.٣٢).



شكل (١٣.٣٢) الموضع الجذري الكامل

الحلان الآخران للمعادلة:

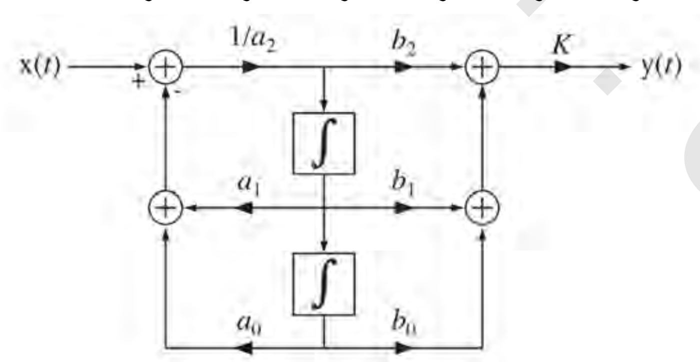
$$s^4 + 18s^3 + 10s^2 + 228s + 166 = 0,$$

هما s=-4.34 و s=-2.69 هما نقاط الافتراق والالتقاء لما يسمى الموضع الجذري المكمل. الجذر الموضعي المكمل هو تغير موضع الأقطاب لـ H(s) مع تغير K من صفر حتى سالب ما لانهاية).

مثال ١٣.٣

الموضع الجذري ٢

ارسم الموضع الجذري للنظام الذي له مساره الأمامي (المصنع) هو النظام الموضح في شكل (١٣.٣٣) حيث $a_2=1$، و $a_1=-2$، و $a_0=2$، $b_2=0$، و $b_1=1$، و $b_0=0$، والمسار العكسي له (الاستشعار) هو النظام الموضح في شكل (١٣.٣٣) حيث $a_2=1$، و $a_1=2$، و $a_0=0$، و $b_2=1$، و $b_1=1$، و $b_0=0$، و K=1.



شكل رقم (١٣.٣٣) نظام من الدرجة الثانية مع معامل تكبير K

دالة عبور المسار الأمامي $H_1(s)$ ودالة عبور المسار العكسي $H_2(s)$ ستكونان كما يلي:

$$H_1(s) = \frac{Ks}{s^2-2s+2} \quad و \quad H_2(s) = \frac{s^2+s}{s^2+2s} = \frac{s+1}{s+2}$$

دالة عبور الحلقة ستكون :

$$T(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{Ks(s+1)}{(s^2-2s+2)(s+2)}$$

أقطاب T ستكون عند $s=1\pm j$ و $s=-2$ ، والأصفار ستكون عند $s=0$ ، و $s=-1$ ، و $|s|\rightarrow\infty$. حيث إن $H_1(s)$ لها أقطاب في النصف الأيمن من المستوى s ، فإن نظام المسار الأمامي سيكون غير مستقر.

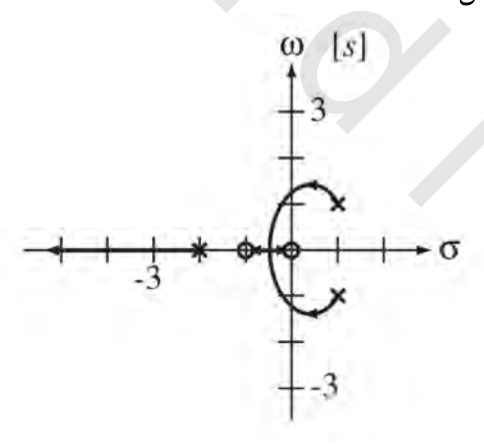
١- الموضع الجذري له ثلاث أفرع (القانون ١).

٢- المناطق المسموحة على المحور الحقيقي ستكون هي $-1<\sigma<0$ ، و $\sigma<-2$ (القانون ٣).

٣- يبدأ الموضع الجذري عند أقطاب الـ T(s). لذلك فإن الفرع الذي يبدأ عند $s=-2$ يمكنه أن يتجه فقط ناحية الشمال ويبقى في منطقة مسموحة على المحور الحقيقي. إنه لا يمكن أن يترك المحور الحقيقي نتيجة متطلبات التماثل (القانون ٤). لذلك فإن هذا المسار ينتهي عند الصفر عند الما لانهاية.

٤- الفرعان الآخران يبدآن عند القطبين المركبين المترافقين عند $s=1\pm j$. إنهما يجب أن ينتهيا عند الصفرين الباقيين عند $s=0$ ، و $s=-2$. للوصول لهذين الصفرين مع الاحتفاظ بالتماثل في الوقت نفسه حول المحور الحقيقي (القانون ٤) ، فإنهما يجب أن يتحركا لليسار ولأسفل في المنطقة المسموحة $-1<\sigma<0$.

٥- نقطة الالتقاء يمكن إيجادها عن طريق وضع $(d/ds)(1/T(s))=0$. الحل لهذه المعادلة سيعطينا نقطة الالتقاء عند $s=-0.4652$ كما في شكل (١٣.٣٤).

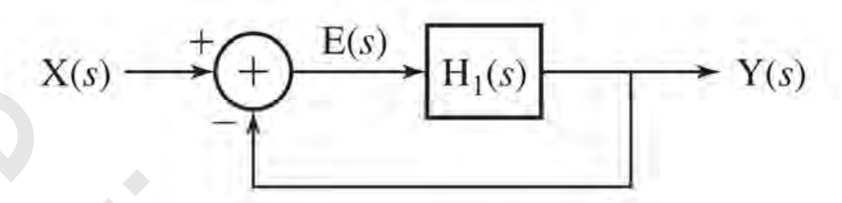


شكل رقم (١٣.٣٤) الموضع الجذري الكامل

في هذا المثال ، رأينا أن نظام التغذية العكسية بدأ غير مستقر عند قيمة منخفضة لـ K ، ولكن مع زيادة K فإن الأقطاب التي تكون في البداية في النصف الأيمن من المستوى s تتحرك إلى النصف الأيسر من المستوى s. لذلك إذا كانت K كبيرة بما فيه ، فإن نظام التغذية العكسية الكلي يصبح مستقراً ، على الرغم من أن نظام المسار الأمامي فيه غير مستقر.

تتبع الأخطاء في أنظمة التغذية العكسية التي لها معامل تكبير الوحدة

من الأنواع الشائعة جداً من أنظمة التغذية العكسية هي الأنواع التي يكون الغرض منها أن نجعل إشارة الخرج تتبع إشارة الدخل باستخدام مسار تغذية مرتدة بمعامل تكبير يساوي الواحد، بمعنى $H_2(s)=1$، كما في شكل (١٣.٣٥).



شكل رقم (١٣.٣٥) نظام تغذية عكسية بمعامل تكبير الوحدة

هذا النوع من الأنظمة يسمى "معامل تكبير الوحدة"؛ لأن إشارة الخرج تتم مقارنتها مباشرة مع إشارة الدخل، وإذا كان هناك أي فرق (إشارة خطأ)، يتم تكبيرها بواسطة معامل تكبير المسار الأمامي للنظام في محاولة لجعل إشارة الخرج أقرب ما يمكن لإشارة الدخل. إذا كان معامل تكبير المسار الأمامي للنظام كبيراً، فإن ذلك سيدفع إشارة الخطأ لأن تكون صغيرة، مما يجعل إشارتي الخرج والدخل أقرب ما يكون من بعضهما بعضاً. سواء كانت إشارة الخطأ يمكن دفعها لأن تكون صفراً أم لا سيعتمد ذلك على دالة عبور المسار الأمامي $H_1(s)$ ونوع الإثارة.

من الطبيعي أن نتعجب هنا عما هو الغرض من نظام تكون إشارة خرجه تساوي إشارة دخله. ماذا سنكسب من ذلك؟ إذا كان هذا النظام سيكون مكبراً إلكترونياً، والإشارات هي جهود، فإنه سيكون لدينا معامل تكبير يساوي واحد، ولكن معاوقة (مقاومة) الدخل ستكون مرتفعة جداً ويمكن لجهد الخرج أن يشغل معاوقة صغيرة جداً بحيث إن الطاقة الحقيقية بالوات المسحوبة عن طريق إشارة الخرج ستكون أكبر كثيراً من الطاقة الحقيقية القادمة من إشارة الدخل. في الأنظمة الأخرى من الممكن أن تكون إشارة الدخل هي جهد موضوع عن طريق مكبر منخفض القدرة أو مقسم جهد، ومن الممكن أن تكون إشارة الخرج عبارة عن جهد يبين موضع جهاز ميكانيكي كبير مثل رافعة ميكانيكية أو قطعة مدفع أو تليسكوب فلكي.

الآن سنبين طبيعة إشارة الخطأ عند حالة الاستقرار حسابياً. إن كلمة حالة الاستقرار تعني سلوك هذه الإشارة عندما يقترب الزمن من الما لانهاية. يمكن كتابة إشارة الخطأ كما يلي:

$$E(s) = X(s) - Y(s) = X(s) - H_1(s)E(s).$$

بالحل لإيجاد $E(s)$ كما يلي:

$$E(s) = \frac{X(s)}{1+H_1(s)}$$

يمكننا إيجاد قيمة حالة الاستقرار لإشارة الخطأ باستخدام نظرية القيمة النهائية كما يلي:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{X(s)}{1+H_1(s)}$$

إذا كانت إشارة الدخل هي دالة خطوة على الصورة، $x(t)=Au(t)$، وبالتالي $X(s)=A/s$ ويمكننا كتابة ما يلي:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{A}{1+H_1(s)}$$

وسيكون الخطأ المستقر يساوي صفر إذا كانت الدالة التالية تساوي صفراً:

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{1+H_1(s)}$$

إذا كانت الدالة $H_1(s)$ على الصورة المعروفة عبارة عن نسبة كثيرتي حدود في s كما يلي:

$$H_1(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \cdots b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_D s^D + a_{D-1}s^{D-1} + \cdots a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \qquad \text{(١٣.٨) المعادلة رقم}$$

بالتالي سنحصل على:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \cdots b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_D s^D + a_{D-1}s^{D-1} + \cdots a_2 s^2 + a_1 s + a_0}} = \frac{a_0}{a_0+b_0}$$

وإذا كانت $a_0=0$ و $b_0\neq 0$، فإن الخطأ المستقر سيكون صفراً. إذا كانت $a_0=0$، ففي هذه الحالة يمكن كتابة $H_1(s)$ على الصورة التالية:

$$H_1(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1}s^{N-1} + \cdots b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s(a_D s^D + a_{D-1}s^{D-1} + \cdots a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}$$

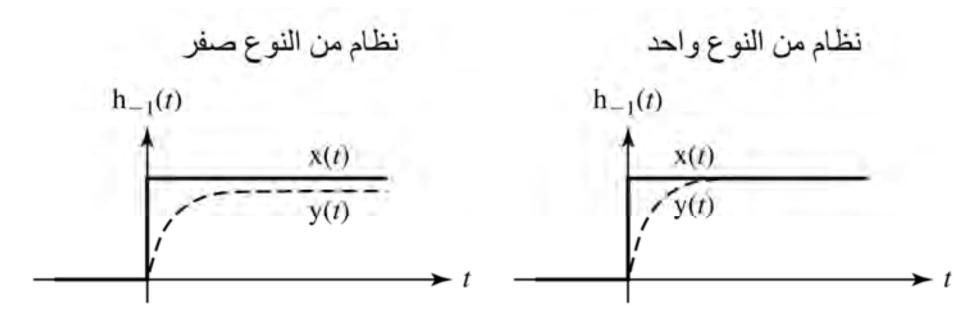
من الواضح فوراً أن $H_1(s)$ لها قطب عند $s=0$. يمكننا أن نلخص ما سبق بأن نقول إذا كان أي نظام تغذية مرتدة له معامل تكبير يساوي واحداً وكانت دالة عبور المسار الأمامي بها قطب عند $s=0$، فإن الخطأ المستقر لإثارة عبارة عن وحدة الخطوة سيكون صفراً. إذا لم يكن هناك قطب عند $s=0$، سيكون الخطأ المستقر يساوي $a_0/(a_0+b_0)$ وكلما كانت b_0 كبيرة بالمقارنة مع a_0، كلما كان الخطأ المستقر أصغر. سيكون ذلك واضحاً من وجهة نظر أخرى لأنه إذا كان معامل تكبير المسار الأمامي على الصورة الموجودة في المعادلة (١٣.٨) فإن معامل تكبير نظام التغذية العكسية عند الترددات المنخفضة سيكون $b_0/(a_0+b_0)$، الذي يقترب من الواحد عندما $b_0>>a_0$ مما يوضح أن إشارتي الدخل والخرج تقتربان من القيمة نفسها.

نظام التغذية العكسية الذي له معامل تكبير يساوي الواحد والذي به دالة عبور المسار الأمامي $H_1(s)$ ليس لها أقطاب عند $s=0$ يسمى نظاماً من النوع صفر. إذا كان له قطب واحد عند $s=0$ سيسمى هذا النظام نظاماً من النوع واحد. عموماً، أي نظام تغذية مرتدة بمعامل تكبير الوحدة يكون من النوع n حيث n هي عدد الأقطاب عند $s=0$ في $H_1(s)$. تلخيصاً لما سبق باستخدام هذه المصطلحات يمكننا أن نقول:

١- أي نظام مستقر من النوع صفر يكون له خطأ محدد عند الحالة المستقرة لإثارة الخطوة.

٢- أي نظام مستقر من النوع n، حيث $n\geq 1$، له خطأ حالة مستقرة يساوي صفراً لإثارة الخطوة.

يوضح شكل (١٣.٣٦) استجابات الحالة المستقرة لإثارة الخطوة للأنظمة من النوع صفراً ومن النوع واحد.



شكل رقم (١٣.٣٦) استجابة الخطوة للأنظمة من النوع صفر والنوع واحد

سنفترض الآن الإثارة من النوع التصاعدي الخطي $x(t)=Aramp(t)=Atu(t)$ والتي سيكون لها تحويل لابلاس كما يلي $X(s)=A/s^2$. سيكون خطأ الحالة المستقرة كما يلي:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s[1+H_1(s)]}$$

للمرة الثانية إذا كانت $H_1(s)$ عبارة عن نسبة من كثيرتي حدود في s كما يلي:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1+\frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \quad b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_D s^D + a_{D-1} s^{D-1} + \quad a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}$$

أو:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{a_D s^D + a_{D-1} s^{D-1} + \quad a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s\begin{bmatrix} a_D s^D + a_{D-1} s^{D-1} + \quad a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \\ + b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \quad b_2 s^2 + b_1 s + b_0 \end{bmatrix}}$$

هذا الحد سيعتمد على قيم الـ a's والـ b's. إذا كانت $a_0 \neq 0$، فإن خطأ الحالة المستقرة سيكون غير محدد. إذا كانت $a_0=0$ و $b_0 \neq 0$، سيكون الحد يساوي a_1/b_0 مما يوضح أن خطأ الحالة المستقرة سيكون مختلفاً عن الصفر. إذا كانت $a_0=0$ و $a_1=0$ و $b_0 \neq 0$، فإن خطأ الحالة المستقرة سيكون صفراً. الشرط $a_0=0$ و $a_1=0$، مما يعني وجود أقطاب متكررة عند $s=0$ في دالة عبور المسار الأمامي. لذلك، بالنسبة للنظام من النوع الثاني المستقر سيكون خطأ الحالة المستقرة مع وجود الإثارة التصاعدية يساوي صفراً. نلخص ذلك فيما يلي:

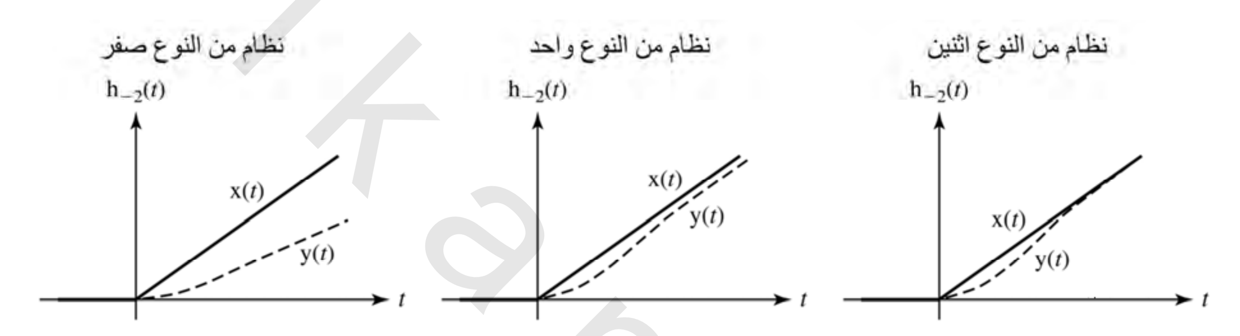
١- النظام المستقر من النوع صفر سيكون له خطأ حالة مستقرة غير محدد بالنسبة للإثارة التصاعدية الخطية.

٢- النظام المستقر من النوع واحد له خطأ حالة مستقرة محدد للإثارة الخطية.

٣- النظام المستقر من النوع n حيث $n \geq 2$ له خطأ حالة صفر لإثارة الدخل الخطية.

شكل (١٣.٣٧) يبين استجابات الحالة المستقرة للإثارة الخطية للأنظمة المستقرة من النوع صفر وواحد واثنين. هذه النتائج يمكن استقراؤها للإثارات من الدرجات الأعلى مثل $At^2u(t)$، و $At^3u(t)$، وهكذا. عندما تكون

الدرجة العليا للـ s في مقام تحويل الإثارة هي نفسها، أو أقل من عدد نوع (صفر، وواحد، واثنين، وهكذا) النظام، وكان النظام مستقراً، فإن خطأ حالة الاستقرار سيكون صفراً. لقد تم توضيح ذلك مع دوال عبور المسار الأمامي التي في صورة نسبة من كثيرتي حدود ولكن يمكن توضيح أن النتيجة تكون صحيحة لأي شكل من أشكال دالة العبور اعتماداً فقط على عدد الأقطاب عند s=0. قد يبدو أن الأقطاب الأكثر في دالة عبور المسار الأمامي عند s=0 تكون عادة مرغوبة ؛ لأنها تقلل خطأ الحالة المستقرة في نظام التغذية العكسية الكلي. ولكن عموماً، كلما كانت الأقطاب أكثر في دالة عبور المسار الأمامي، فإنه يكون من الصعب جعل نظام التغذية العكسية مستقراً. ولذلك ربما نقايض مشكلة مع أخرى عن طريق وضع أقطاب عند s=0 في دالة عبور المسار الأمامي.



شكل رقم (١٣.٣٧) استجابة أنظمة من النوع صفر وواحد واثنين للدالة الخطية التصاعدية

مثال ١٣.٤

عدم الاستقرار بسبب إضافة الأقطاب عند الصفر في دالة عبور المسار الأمامي

افترض أن دالة العبور الأمامية لنظام تغذية مرتدة معامل تكبيره يساوي الوحدة هي $H_1(s)=100/s(s+4)$. دالة العبور الكلية ستكون كما يلي :

$$H(s) = \frac{100}{s^2+4s+100}$$

حيث الأقطاب ستكون عند $s=-2\pm j9.798$، حيث كل من القطبين يقع في النصف الأيسر من المستوى s وبالتالي، فإن النظام سيكون مستقراً. الآن سنضيف قطباً عند الصفر للدالة $H_1(s)$ ونعيد تقييم استقرار هذا النظام. الدالة $H_1(s)$ الجديدة ستصبح كما يلي :

$$H_1(s) = \frac{100}{s^2(s+4)}$$

ودالة العبور الكلية الجديدة ستصبح :

$$H(s) = \frac{100}{s^3+4s^2+100}$$

وستصبح أقطابها عند $s=-6.4235$ و $s=1.212\pm j3.755$. حيث أصبح اثنان من الأقطاب في النصف الأيمن من المستوى s وأصبح النظام الكلي غير مستقر.

(١٣.٥) تحليل الأنظمة باستخدام ماتلاب

لقد تم تقديم الهدف نظام "system" في الفصل ٦. شكل الأمر لتوليد هذا الهدف بالأمر tf هو :

.sys = tf(num, den)

الشكل لتوليد الهدف نظام باستخدام الأمر zpk هو :

.sys = zpk(z,p,k)

تكمن القوة الحقيقية لصندوق أدوات toolbox "التحكم في الأنظمة control system" في التوصيل البيني لهذه الأنظمة. افترض أننا نريد دالة العبور الكلية التي على الصورة $H(s)=H_1(s)H_2(s)$ للنظامين التاليين في توصيلة على التوالي :

$$H_1(s) = \frac{s^2+4}{s^5+4s^4+7s^3+15s^2+31s+75}$$

و :

$$H_2(s) = 20\frac{s+4}{(s+3)(s+10)}$$

يمكن تنفيذ ذلك باستخدام ماتلاب كما يلي :

```
»num = [1 0 4];
»den = [1 4 7 15 31 75];
»H1 = tf(num,den);

»z = [–4];
»p = [–3 –10];
»k = 20
»H2 = zpk(z,p,k);

»Hc = H1*H2 ;
»Hc
Zero/pole/gain:
            20 (s+4) (s^2 + 4)
-------------------------------------------------------
(s+3.081)(s+3)(s+10)(s^2+2.901s+5.45)(s^2-1.982s+4.467)
»tf(Hc)

Transfer function:
            20 s^3 + 80 s^2 + 80 s + 320
-------------------------------------------------------
     s^7+17s^6+89s^5+226s^4+436s^3+928s^2+1905s+2250
```

إذا كنا نريد معرفة دالة العبور لهذين النظامين عند توصيلهما على التوازي يمكننا تنفيذ ذلك كما يلي :

```
»Hp = H1 + H2 ;
»Hp

Zero/pole/gain:
   20(s+4.023)(s+3.077)(s^2+2.881s+5.486)(s^2-1.982s+4.505)
```

```
----------------------------------------------------
(s+3.081)(s+3)(s+10)(s^2+2.901s+5.45)(s^2-1.982s+4.467)
»tf(Hp)
Transfer function:
    20s^6+160s^5+461s^4+873s^3+1854s^2+4032s+6120
----------------------------------------------------
   s^7+17s^6+89s^5+226s^4+436s^3+928s^2+1905s+2250
```

هناك أيضاً الأمر feedback لتكون دالة العبور الكلية لأي نظام تغذية مرتدة:

```
>> Hf = feedback(H1,H2) ;
>> Hf
Zero/pole/gain:
            (s+3)(s+10)(s^2+4)
--------------------------------------------------
(s+9.973)(s^2+6.465s+10.69)(s^2+2.587s+5.163)(s^2-2.025s+4.669)
```

عند التعامل أحياناً مع أهداف النظام، فإن النتيجة لن تكون في الصورة المثالية. قد يكون لها قطب وصفر عند الموضع نفسه. على الرغم من أنه ليس هناك أي خطأ حسابي في ذلك، فإنه على العموم يكون من المفضل التخلص من هذا القطب وهذا الصفر لتبسيط دالة العبور. يمكن عمل ذلك باستخدام الأمر mineral (والتي تعني أقل تنفيذ minimum realization).

بمجرد أن يتم وصف النظام، يمكننا أن نرسم استجابة الخطوة له باستخدام الأمر step، واستجابة الصدمة باستخدام الأمر impulse، ومخطط بود للاستجابة الترددية له بالأمر bode. يمكننا أيضاً أن نرسم مخطط الأقطاب والأصفار باستخدام الأمر pzmap. يوجد أيضاً في ماتلاب دالة تسمى freqresp تقوم برسم الاستجابة الترددية للنظام، والصورة العامة لهذه الدالة هي:

H = freqresp(sys,ω)

حيث sys هو هدف النظام في ماتلاب، و w هي متجه الترددات، و H هي الاستجابة الترددية للنظام عند هذه الترددات الزاوية. يحتوي ماتلاب أيضاً في صندوق أدوات التحكم في الأنظمة أمراً لرسم الموضع الجذري لدالة عبور الحلقة للنظام. الشكل العام لذلك هو:

Rlocus(sys)

حيث sys هو هدف النظام في ماتلاب. هناك العديد من الأوامر المفيدة الأخرى في صندوق أدوات التحكم والتي يمكن فحصها بالأمر help control.

(١٣.٦) استجابات الأنظمة للإشارات القياسية

لقد رأينا في تحليل الإشارات والأنظمة فيما سبق أن أي نظام LTI يكون موصوفاً بالكامل باستجابته للصدمة. في اختبار الأنظمة الحقيقية، يكون تطبيق الصدمة لإيجاد استجابة الصدمة لأي نظام غير عملي. أولاً، لأن الصدمة الحقيقية لا يمكن توليدها، ثانياً حتى لو أمكن توليد الصدمة الحقيقية، وحيث إنها لها مقدار غير محدود،

فإنها حتماً يمكنها أن تدفع النظام إلى حالة غير خطية من التشغيل. يمكننا توليد نسخة مقربة لوحدة الصدمة الحقيقية في صورة نبضة قصيرة جداً زمنياً وطويلة جداً في المقدار بحيث تكون مساحتها تساوي دائما الوحدة. يجب أن تكون الفترة الزمنية لهذه النبضة بحيث أن تصغيرها لن يغير في أي واحدة من إشارات النظام. على الرغم من أن هذا النوع من الاختبار ممكن، إلا أن النبضة الطويلة جداً من الممكن أن تدفع النظام أيضاً في الاتجاه غير الخطي. من السهل جداً توليد تقريب جيد لوحدة الخطوة عن التقريب لوحدة الصدمة، ومن الممكن أن نجعل مقدار الخطوة صغيرا بما فيه الكفاية بحيث لا تسبب عدم خطية للنظام.

الدوال الجيبية أيضاً من السهل توليدها ومن الممكن ضبطها لتتغير بين حدود معروفة وهذه الحدود من الممكن جعلها صغيرة بما فيه الكفاية بحيث لا تدفع النظام في اتجاه عدم الخطية. يمكن تغيير تردد هذه الدوال الجيبية بحيث يمكن تحديد الاستجابة الترددية للنظام. حيث إن الدوال الجيبية تكون على علاقة وثيقة بالأسس المركبة، فإن هذا النوع من الاختبار من الممكن أن يعطي معلومات عن خواص النظام.

استجابة وحدة الخطوة

افترض أن دالة العبور لنظام LTI ستكون على الصورة:

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

حيث $N_H(s)$ تكون درجة الـ s لها أقل من $D_H(s)$. بالتالي فإن تحويل لابلاس لاستجابة الحالة صفر $Y(s)$ كاستجابة للدخل $X(s)$ ستكون على الصورة:

$$Y(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} X(s)$$

افترض أن دالة الخطوة هي $x(t)$، بالتالي فإن تحويل لابلاس لاستجابة الحالة صفر ستكون:

$$Y(s) = H_{-1}(s) \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

باستخدام طريقة التحليل بالكسور الجزيئية، يمكن فصل المعادلة السابقة إلى جزأين:

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{H(0)}{s}$$

إذا كان النظام مستقراً BIBO، فإن جذور $D_H(s)$ ستكون كلها في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s وتحويل لابلاس العكسي لـ $N_{H1}(s)/D_H(s)$ يسمى الاستجابة الطبيعية natural response أو الاستجابة العابرة transient response لأنها تتناقص إلى الصفر مع اقتراب الزمن للما لانهاية. الاستجابة المدفوعة forced response للنظام لوحدة الخطوة هي تحويل لابلاس العكسي لـ $H(0)/s$ وهي تساوي $H(0)u(t)$. التعبير التالي:

$$\mathrm{Y(s)} = \frac{\mathrm{N_{H1}(s)}}{\mathrm{D_H(s)}} + \frac{\mathrm{H(0)}}{\mathrm{s}}$$

يتكون من مقدارين. المقدار الأول له أقطاب مماثلة تماما لأقطاب النظام، والمقدار الثاني له قطب عند الموضع نفسه مثل تحويل لابلاس لوحدة الخطوة.

يمكن تعميم هذه النتيجة على أي إثارة اختيارية. إذا كان تحويل لابلاس للإثارة هو:

$$X(s) = \frac{N_x(s)}{D_x(s)}$$

فإن تحويل لابلاس لاستجابة النظام سيكون:

$$Y(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} X(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}\frac{N_x(s)}{D_x(s)} = \underbrace{\frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)}}_{\text{نفس الأقطاب مثل النظام}} + \underbrace{\frac{N_{x1}(s)}{D_x(s)}}_{\text{نفس الأقطاب مثل الإثارة}}$$

دعنا الآن نفحص استجابة وحدة الخطوة لبعض الأنظمة البسيطة. أبسط نظام ديناميكي هي نظام من الدرجة الأولى له دالة العبور التالية:

$$\mathrm{H(s)} = \frac{\mathrm{A}}{1-\mathrm{s/p}} = \frac{\mathrm{Ap}}{\mathrm{s-P}}$$

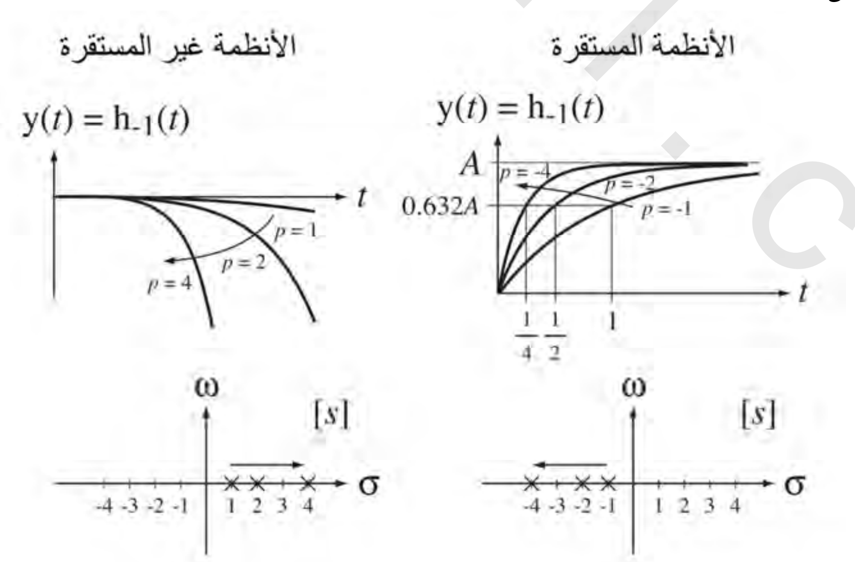
حيث A هي دالة عبور النظام عند الترددات المنخفضة و p هي موضع القطب في المستوى s. تحويل لابلاس لدالة الخطوة هو:

$$\mathrm{Y(s)} = \mathrm{H_{-1}(s)} = \frac{\mathrm{A}}{(1-\mathrm{s/p})\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{A/p}}{1-\mathrm{s/p}} + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s-P}}$$

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة السابقة، نحصل على:

$$y(t) = A(1-e^{pt})u(t)$$

إذا كانت p موجبة، فإن النظام سيكون غير مستقر ومقدار الاستجابة لوحدة الخطوة سيتزايد أسياً مع الزمن كما في شكل (١٣.٣٨).



شكل رقم (١٣.٣٨) استجابة نظام من الدرجة الأولى لوحدة الخطوة ومخطط الأقطاب والأصفار المقابل

سرعة تزايد الأس تعتمد على مقدار p، وستكون أكبر لقيم p الكبيرة. إذا كانت p سالبة سيكون النظام مستقراً وسيقترب النظام من القيمة الثابتة A مع الزمن. سرعة الاقتراب من الثابت A تعتمد على مقدار p، وستكون هذه السرعة أكبر لقيم p الكبيرة. مقلوب p السالب يسمى الثابت الزمني τ للنظام، حيث τ=-1/p، وللأنظمة المستقرة، فإن استجابة الخطوة تتحرك 63.2% من المسافة حتى القيمة النهائية في زمن مقداره ثابت زمني واحد.

افترض الآن نظاماً من الدرجة الثانية له دالة عبور كالتالي :

$$H(s) = \frac{A\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}, \quad \omega_n > 0.$$

هذه الصورة لدالة عبور نظام من الدرجة الثانية لها ثلاثة معاملات، معامل تكبير الترددات المنخفضة A، نسبة القمع ζ damping ratio والتردد الزاوي الطبيعي ω_n. يعتمد شكل الاستجابة لوحدة الخطوة على قيم هذه المعاملات. تحويل لابلاس لاستجابة وحدة الخطوة سيكون :

$$H_{-1}(s) = \frac{A\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} = \frac{A\omega_n^2}{s\left[s+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right]\left[s+\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right]}$$

وهذه يمكن وضعها في صورة الكسور الجزيئية إذا كانت $\zeta\neq\pm1$ كما يلي :

$$H_{-1}(s) = A\left[\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{2\left(\zeta^2-1+\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\right)}}{s+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}+\frac{\frac{1}{2\left(\zeta^2-1-\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\right)}}{s+\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}\right]$$

وبالتالي ستكون الاستجابة في النطاق الزمني كما يلي :

$$h_{-1}(s) = A\left[\frac{e^{-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}}{2\left(\zeta^2-1+\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\right)}+\frac{e^{-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}}{2\left(\zeta^2-1-\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\right)}+1\right]u(t)$$

بالنسبة للحالة الخاصة التي فيها $\zeta\neq\pm1$ ستكون استجابة النظام لوحدة الخطوة كما يلي :

$$H_{-1}(s) = \frac{A\omega_n^2}{(s\pm\omega_n)^2 s}$$

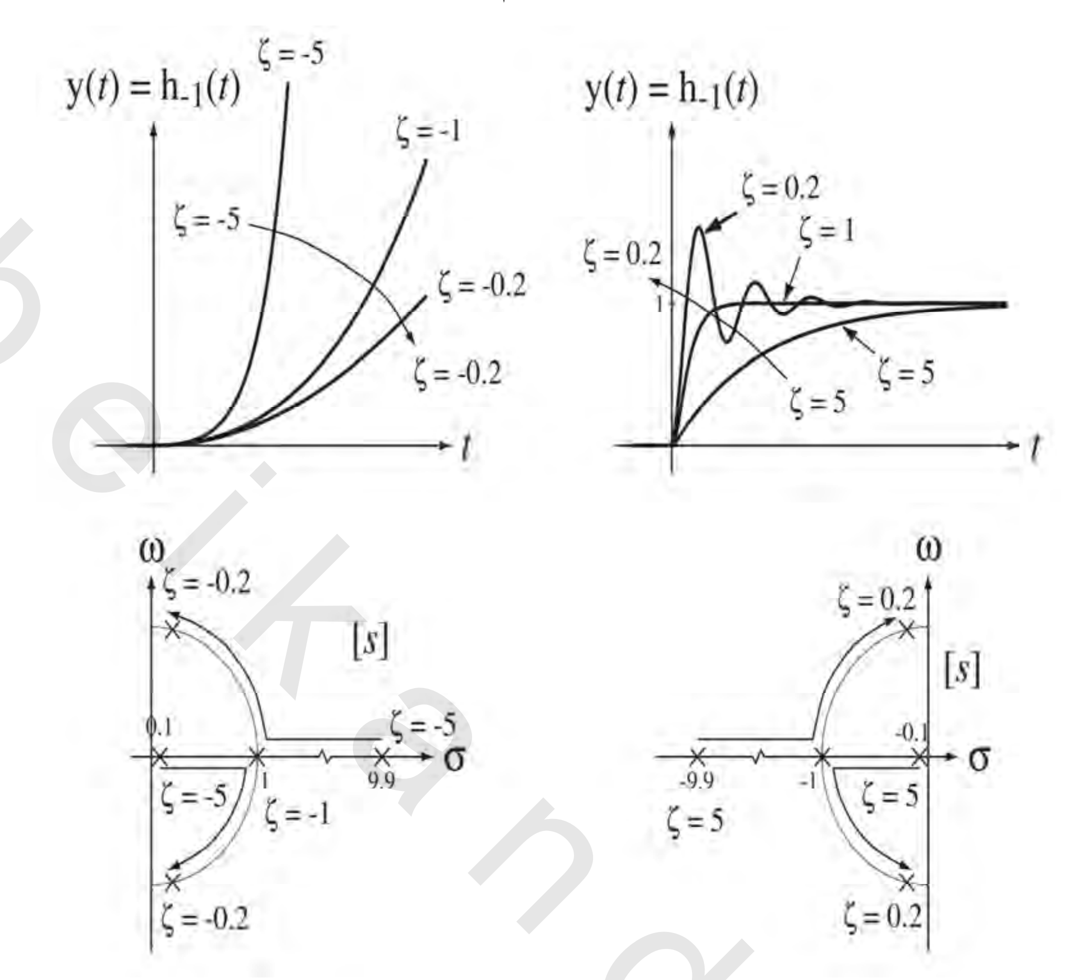
وسيكون القطبان متماثلين، وستكون الكسور الجزيئية كما يلي :

$$H_{-1}(s) = A\left[\frac{1}{s}-\frac{\pm\omega_n}{(s\pm\omega_n)^2}-\frac{1}{s\pm\omega_n}\right]$$

وستكون الاستجابة في النطاق الزمني كما يلي :

$$h_{-1}(s) = A\left[1-(1\pm\omega_n t)e^{\mp\omega_n t}\right]u(t) = Au(t)\begin{cases}1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}, & \zeta=1\\ 1-(1-\omega_n t)e^{+\omega_n t}, & \zeta=-1\end{cases}$$

من الصعب أن نحدد وحدة الخطوة من خلال شكل الدالة الحسابية لاستجابة ، ماذا سيكون شكل هذه الاستجابة بوضع قيم اختيارية للمعاملات. لكي نستكشف تأثير هذه المعاملات فقط ، دعنا نفترض أولاً أن كلاً من A و w_n ثوابت وسنفحص تأثير نسبة القمع ζ. افترض أن A=1، وأن ω_n=1. بالتالي فإن استجابة وحدة الخطوة ومخطط الإقطاب والأصفار المقابل سيكون كما هو موضح في شكل (١٣.٣٩) لستة اختيارات لمعامل القمع ζ.



شكل رقم (١٣.٣٩) استجابات النظام من الدرجة الثانية لوحدة الخطوة ومخططات الأقطاب والأصفار المقابلة

يمكننا أن نرى لماذا يحدث هذا السلوك من هذه الأنواع المختلفة إذا فحصنا استجابة وحدة الخطوة التالية:

$$h_{-1}(s) = A\left[\frac{e^{-\omega_n\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}}{2\left(\zeta^2-1+\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\right)} + \frac{e^{-\omega_n\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}}{2\left(\zeta^2-1-\zeta\sqrt{\zeta^2-1}\right)} + 1\right]u(t)$$ المعادلة رقم (١٣.٩)

وبالذات الأسس للـ e، $-w_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)t$. إشارات هذه الأجزاء الحقيقية لهذه الأسس تحدد إذا كانت الاستجابة تنمو أو تتناقص مع الزمن t>0. بالنسبة للأزمنة t<0 فإن الاستجابة تكون صفراً لأن استجابة الخطوة تكون u(t).

الحالة 1 : $\zeta<0$

إذا كانت $\zeta<0$، بالتالي فإن أس الـ e في كل من مقداري المعادلة (١٣.٩) سيكون لهما جزء حقيقي موجب في الأزمنة الموجبة وبالتالي فإن استجابة الخطوة ستتنامى مع الزمن وسيكون النظام غير مستقر. الشكل الصحيح

لاستجابة الخطوة سيعتمد على قيمة الـ ζ. هذا الشكل سيكون عبارة عن أساً متزايداً عندما ζ<-1 وتذبذبات متزاية أسياً عندما 0>ζ >-1، ولكن في كلا الحالتين فإن النظام يكون غير مستقر.

الحالة 2 : ζ>0

عندما تكون ζ>0، فإن أس الـ e في كل من مقداري المعادلة (١٣.٩) سيكون له جزء حقيقي موجب في الأزمنة الموجبة ولذلك فإن استجابة الخطوة تتناقص مع الزمن وسيكون النظام مستقراً.

الحالة 2أ : ζ>1

إذا كانت ζ>1، بالتالي فإن $\zeta^2-1>0$ وستكون معاملات الـ t في المعادلة (١٣.٩) وهي:
$-w_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)t$ كل منهما سيكون رقماً حقيقياً سالباً وستكون استجابة وحدة الخطوة في صورة ثابت مضافا إليه كمية أسية متناقصة في كل حالة. هذه الحالة، ζ>1، تسمى حالة القمع الزائد.

الحالة 2ب : 0<ζ<1

إذا كانت 0<ζ<1 فإن $\zeta^2-1<0$، وستكون معاملات t في المعادلة (١٣.٩) وهي $-w_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}\right)t$ كل منهما كمية مركبة في صورة زوج مترافق له جزء حقيقي سالب، وستكون استجابة الخطوة في صورة ثابت مجموع عليه اثنان من الدوال الجيبية المضروبة في أس متناقص. على الرغم من الاستجابة يكون بها تخط أو خروج على القيمة النهائية، إلا أنها ما زالت تؤول إلى قيمة ثابتة وبالتالي فإن النظام يكون مستقراً. هذه الحالة 0<ζ<1 تسمى الحالة تحت الكبح (القمعية) underdamped.

الخط الفاصل بين الحالة فوق القمعية وتحت القمعية تكون هي الحالة ζ=1، وهي تسمى حالة الكبح الحرج critical damping.

الآن دعنا نفحص تأثير تغيير ω_n بينما يتم تثبيت المعاملات الأخرى. افترض أن A=1 وζ =0.5. استجابة الخطوة موضحة في شكل (١٣.٤٠) لثلاث قيم مختلفة للـ ω_n.

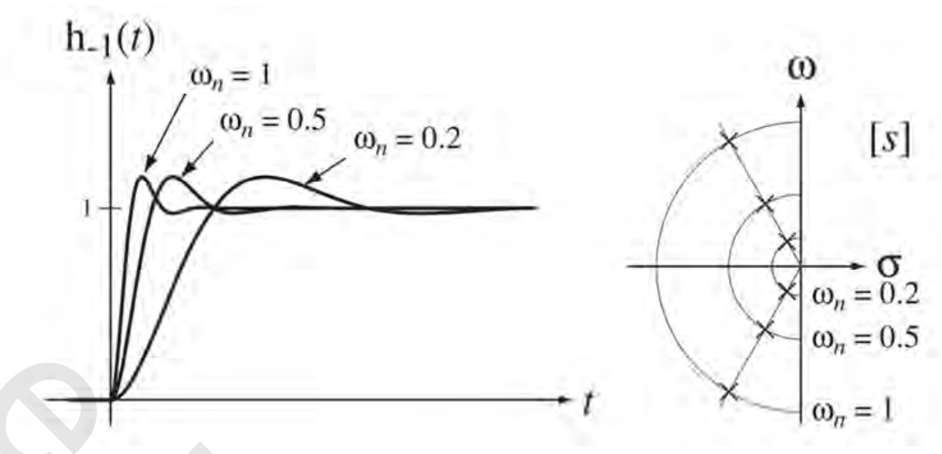
حيث إن ω_n هي التردد الزاوي الطبيعي، فمن المنطقي أنها ستؤثر على معدل تذبذب استجابة الخطوة.

يمكن إيجاد استجابة الخطوة لأي نظام LTI باستخدام الأمر step في صندوق أدوات التحكم في ماتلاب.

الاستجابة الجيبية

الآن دعنا نفحص استجابة أي نظام لدالة جيبية سببية (يتم تطبيقها على النظام عند الزمن t=0). للمرة الثانية سنفترض أن دالة عبور النظام ستكون على الصورة:

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$



شكل رقم (١٣.٤٠) استجابة نظام من الدرجة الثانية لثلاث قيم مختلفة لـ ωn ومخطط الأقطاب والأصفار المقابل

بالتالي فإن تحويل لابلاس لاستجابة الحالة صفر للدخل $x(t)=\cos(w_0t)u(t)$ ستكون على الصورة التالية :

$$Y(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

يمكن فصل ذلك بالكسور الجزيئية على الصورة التالية :

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{1}{2}\frac{H(-j\omega_0)}{s+j\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{H(j\omega_0)}{s-j\omega_0} = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{1}{2}\frac{H^*(j\omega_0)}{s+j\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{H(j\omega_0)}{s-j\omega_0}$$

أو :

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{1}{2}\frac{H^*(j\omega_0)(s-j\omega_0)+H(j\omega_0)(s+j\omega_0)}{s^2+\omega_0^2}$$

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{1}{2}\left\{\frac{s}{s^2+\omega_0^2}[H(j\omega_0)+H^*(j\omega_0)] + \frac{j\omega_0}{s^2+\omega_0^2}[H(j\omega_0)-H^*(j\omega_0)]\right\}$$

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + Re\big(H(j\omega_0)\big)\frac{s}{s^2+\omega_0^2} - Im\big(H(j\omega_0)\big)\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

تحويل لابلاس العكسي للكحد :

$$Re\big(H(j\omega_0)\big)(s/s^2+\omega_0^2)$$

يساوي حاصل ضرب وحدة الخطوة وجيب تمام تردده ω_0 بمقدار هو $Re(H(jw_0))$، وتحويل لابلاس العكسي للكحد :

$$Im\big(H(j\omega_0)\big)\,\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$$

يساوي حاصل ضرب وحدة الخطوة وجيب تردده w_0 ومقداره هو $Im(H(j\omega_0))$، بمعنى :

$$y(s) = £^{-1}\left(\frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)}\right) + \left[Re\big(H(j\omega_0)\big)\cos(\omega_0 t) - Im\big(H(j\omega_0)\big)\sin(\omega_0 t)\right]u(t)$$

أو باستخدام العلاقة :

$$Re(A)\cos(\omega_0 t) - Im(A)sin(\omega_0 t) = |A|\cos(\omega_0 t + \measuredangle A)$$

يمكن كتابة الاستجابة على الصورة التالية:

$$y(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)}\right) + |H(j\omega_0)|\cos\big(\omega_0 \mathrm{t} + \measuredangle\, \mathrm{H}(j\omega_0)\big)u(t)$$

إذا كان النظام مستقراً، فإن جذور $D_H(s)$ ستكون كلها في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s وتحويل لابلاس العكسي للـ $N_{H1}(s)/D_H(s)$ (وهي الاستجابة العابرة) سيتناقص إلى الصفر عندما تقترب t من الما لانهاية. لذلك فإن الاستجابة المدفوعة التي تبقى بعد تلاشي الاستجابة العابرة ستكون دالة جيبية سببية بتردد الإثارة نفسه وبمقدار وزاوية تتحدد بقيمة دالة العبور المحسوبة عند $s=j\omega_0$. الاستجابة المدفوعة ستكون هي نفسها تماما مثل الاستجابة التي يتم الحصول عليها باستخدام طريقة تحويل فورير؛ لأن طرق تحويل فورير تفترض أن الإثارة تكون دالة جيبية حقيقية (مطبقة عند الزمن $t\rightarrow-\infty$)، وليست دالة جيبية سببية وبالتالي فليس هناك استجابة عابرة في الحل.

مثال ١٣.٥

استجابة الحالة صفر لنظام عندما تكون الإثارة دالة جيب تمام.

أوجد الاستجابة الكلية للحالة صفر لنظام موصوف بدالة العبور التالية:

$$\mathrm{H(s)} = \frac{10}{\mathrm{s+10}}$$

لجيب تمام مقدارة الوحدة عند التردد 2Hz.

التردد الزاوي لجيب التمام w_0 هو 4π. لذلك فإن تحويل لابلاس لهذه الاستجابة سيكون:

$$Y(s) = \frac{10}{s+10}\frac{s}{\mathrm{s}^2+(4\pi)^2}$$

$$Y(s) = \frac{-0.388}{s+10} + Re\big(H(j4\pi)\big)\frac{s}{\mathrm{s}^2+(4\pi)^2} - Im\big(H(j4\pi)\big)\frac{\omega_0}{\mathrm{s}^2+(4\pi)^2}$$

والاستجابة في النطاق الزمني ستساوي:

$$y(t) = \pounds^{-1}\left(\frac{-0.388}{s+10}\right) + |H(j4\pi)|cos\big(4\pi t + < H(j4\pi)\big)u(t)$$

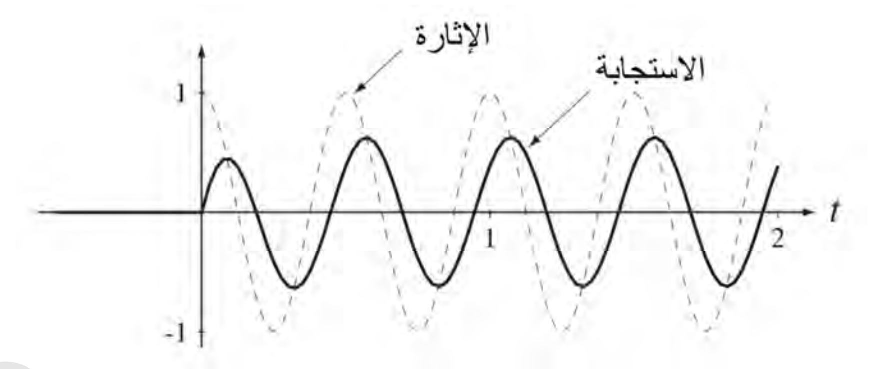
أو:

$$y(t) = \left[-0.388e^{-10t} + \left|\frac{10}{j4\pi+10}\right| cos\big(4\pi t - < (j4\pi + 10)\big)\right]u(t)$$

أو:

$$\mathrm{y(t) = [-0.388e^{-10t} + 0.623cos(4\pi t - 0.899)]u(t)}$$

شكل (١٣.٤١) يبين كلاً من الإثارة والاستجابة. بالنظر لهذه الشكل سنرى أن الاستجابة تصل إلى مقدار مستقر في أقل من ثانية واحدة، وهذا منطقي إذا علمنا أن الاستجابة العابرة لها ثابت زمني يساوي 1/10 من الثانية. بعد استقرار الاستجابة، يكون مقدارها 62% من مقدار الإثارة وهناك إزاحة زاوية تتأخر عن الإثارة بمقدار 0.899 راديان، والتي تكافئ حوالي 72ms تأخير زمني.



شكل رقم (١٣.٤١) الاثارة والاستجابة لنظام من الدرجة الثانية تمت إزاحته بجيب تمام عند الزمن t=0

إذا قمنا بالحل لإيجاد استجابة النظام باستخدم طرق فورير، فإننا نكتب الاستجابة الترددية من دالة العبور كما يلي:

$$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega+10}$$

إذا وضعنا الإثارة للنظام في صورة جيب تمام حقيقي على الصورة $x(t)=\cos(4\pi t)$ والتي لها CTFT على الصورة $X(j\omega)=\pi[\delta(\omega-4\pi)+\delta(\omega+4\pi)]$، بالتالي فإن استجابة النظام ستكون على الصورة:

$$Y(j\omega) = \pi[\delta(\omega-4\pi)+\delta(\omega+4\pi)]\frac{10}{j\omega+10} = 10\pi\left[\frac{\delta(\omega-4\pi)}{j4\pi+10}+\frac{\delta(\omega+4\pi)}{-j4\pi+10}\right]$$

أو:

$$Y(j\omega) = 10\pi\frac{10[\delta(\omega-4\pi)+\delta(\omega+4\pi)]+j4\pi[\delta(\omega+4\pi)-\delta(\omega-4\pi)]}{16\pi^2+100}$$

بإجراء تحويل فورير العكسي سنحصل على:

$$y(t) = 0.388\cos(4\pi t) + 0.487\sin(4\pi t)$$

أو باستخدام المعادلة:

$$Re(A)\,cos(\omega_0 t) - Im(A)\,sin(\omega_0 t) = |A|cos(\omega_0 t + < A)$$

فإن الاستجابة ستكون:

$$y(t) = 0.623\cos(4\pi t - 0.889)$$

وهذه هي نفسها تماماً (فيما عدا لوحدة الخطوة) مثل الاستجابة المدفوعة في الحل السابق الذي تم إيجاده باستخدام تحويل لابلاس.

(١٣.٧) البناء القياسي للأنظمة

عملية تصميم الأنظمة، وعلى العكس من عملية التحليل، تهدف إلى الحصول على دالة عبور لفصيل من الإثارات بحيث تعطي الاستجابة، أو الاستجابات المطلوبة. بمجرد أن نوجد دالة العبور المطلوبة، تكون الخطوة المنطقية المطلوبة هي بناء أو ربما محاكاة النظام. الخطوة الأولى الطبيعية في بناء أو محاكاة النظام هي تكوين مخطط

صندوقي يصف التفاعلات بين كل الإشارات في النظام. هذه الخطوة تسمى خطوة التحقق وهي تأتي من مفهوم عمل نظام حقيقي بدلاً من مجموعة من المعادلات فقط التي تصف سلوك النظام. هناك العديد من أنواع التحقق القياسية من الأنظمة. لقد رأينا مسبقاً الطريقة المباشرة II في الفصل ٨ ، ونستكشف هنا طريقتين جديدتين.

التحقق أو البناء المتتالي

الطريقة القياسية الثانية لبناء الأنظمة هي الطريقة المتتالية. البسط والمقام لدالة العبور العامة يكونان على الصورة التالية :

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k s^k}=\frac{b_M s^M+b_{M-1}s^{M-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^N+a_{N-1}s^{N-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=a_N=1$$ المعادلة رقم (١٣.١٠)

حيث M≤N ، وهذه المعادلة يمكن تحليلها لتعطي صورة دالة العبور التالية :

$$H(s)=A\frac{s-z_1}{s-p_1}\frac{s-z_2}{s-p_2}\cdots\frac{s-z_M}{s-p_M}\frac{1}{s-p_{M+1}}\frac{1}{s-p_{M+2}}\cdots\frac{1}{s-p_N}$$

أي مركبة من المركبات الكسرية السابقة تكون على الصورة التالية :

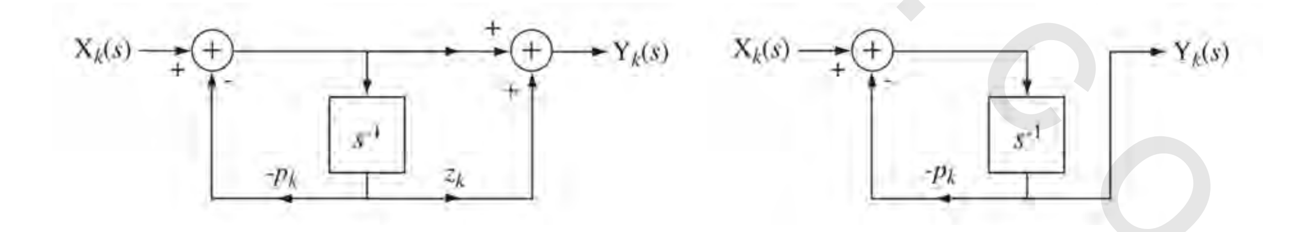
$$\frac{Y_k(s)}{X_k(s)}=\frac{s-z_k}{s-p_k} \quad \text{أو} \quad \frac{Y_k(s)}{X_k(s)}=\frac{1}{s-p_k}$$

وهذه الصورة تعبر عن نظام فرعي يمكن بناؤه عن طريق كتابة العلاقة التالية :

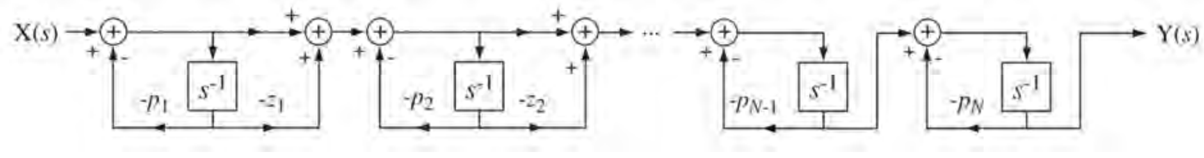
$$H_k(s)=\underbrace{\frac{1}{s-p_k}}_{H_{k1}(s)}\underbrace{(s-z_k)}_{H_{k2}(s)} \quad \text{أو} \quad H_k(s)==\frac{1}{s-p_k}$$

وهذه يمكن بناؤها بالطريقة المباشرة II كما في شكل (١٣.٤٢). بعد ذلك يمكن بناء النظام على الصورة المتتالية كما في شكل (١٣.٤٣).

$$H_k(s)=\frac{s-z_k}{s-p_k} \qquad\qquad H_k(s)=\frac{1}{s-p_k}$$



شكل رقم (١٣.٤٢) البناء بالطريقة المباشرة II لنظام فرعي واحد بطريقة البناء المتتالي.

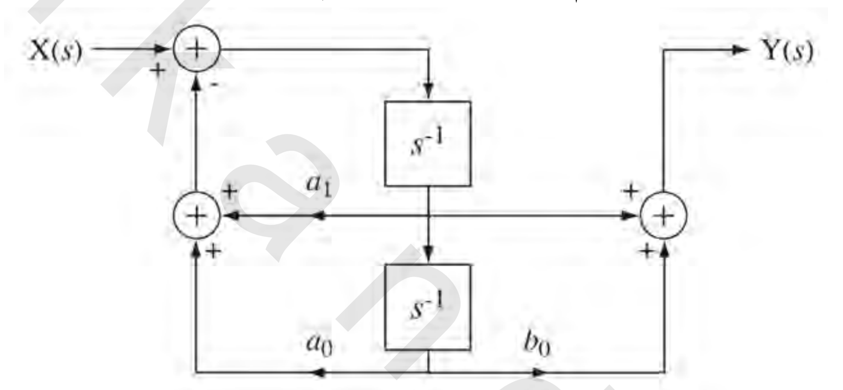


شكل رقم (١٣.٤٣) بناء النظام الكلي.

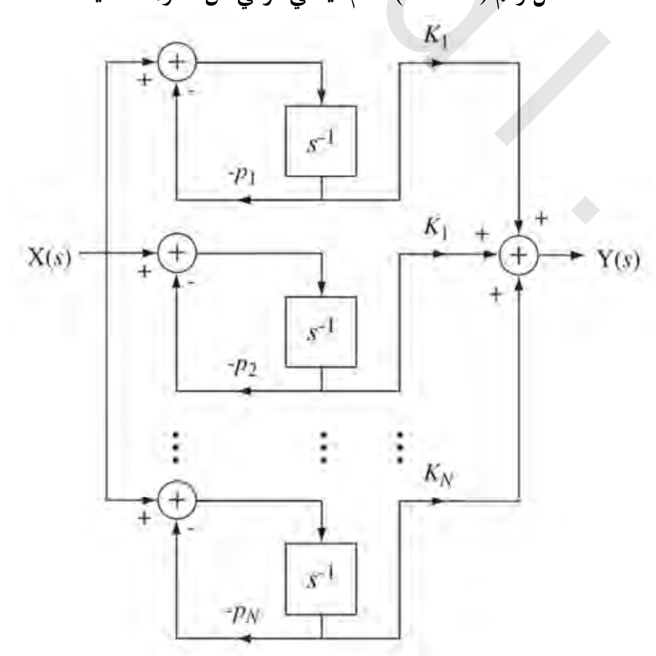
هناك مشكلة تحدث دائماً مع هذا النوع من البناء المتتالي. في بعض الأحيان يكون النظام الفرعي الأول به أقطاب مركبة، وهذا يستلزم الضرب في أرقام مركبة وهذا لا يمكن عمله عادة أثناء البناء الحقيقي للنظام. في هذه الحالات، يمكن ربط نظامين فرعيين بأقطاب مركبة مترافقة في صورة نظام فرعي واحد من الدرجة الثانية على الصورة.

$$H_k(s) = \frac{s+b_0}{s^2+a_1 s+a_0}$$

والتي يمكن بناؤها عادة باستخدام معاملات حقيقية كما في شكل (١٣.٤٤).



شكل رقم (١٣.٤٤) نظام قياسي فرعي من الدرجة الثانية



شكل رقم (١٣.٤٥) بناء النظام الكلي المتوازي.

البناء المتوازي

آخر طرق البناء القياسي للأنظمة هي البناء المتوازي. يمكن تحقيق ذلك عن طريق تحليل دالة العبور القياسية في المعادلة (١٣.١٠) في صورة كسور جزيئية على الصورة التالية وكما في شكل (١٣.٤٥):

$$H(s) = \frac{K_1}{s-P_1} + \frac{K_2}{s-P_2} + \cdots + \frac{K_N}{s-P_N}$$

(١٣.٨) ملخص النقاط المهمة

١- يمكن وصف الأنظمة المستمرة زمنياً عن طريق المعادلات التفاضلية، أو المخططات الصندوقية، أو مخططات الدوائر وفي النطاق الزمني أو النطاق الترددي.

٢- النظام LTI المستمر زمنياً يكون مستقراً إذا كانت كل أقطاب دالة العبور له تقع في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s.

٣- الأنظمة المستقرة هامشيا تكون مجموعة فرعية من الأنظمة غير المستقرة.

٤- أهم ثلاث أنواع من التوصيل البيني للأنظمة هي التوصيل على التوالي، والتوصيل على التوازي، وتوصيل التغذية العكسية.

٥- إشارة وحدة الخطوة والإشارة الجيبية تعتبر إشارات عملية مهمة لاختبار خواص النظام.

٦- الصورة المباشرة II، والبناء على التوالي وعلى التوازي هي أهم الطرق القياسية لبناء الأنظمة.

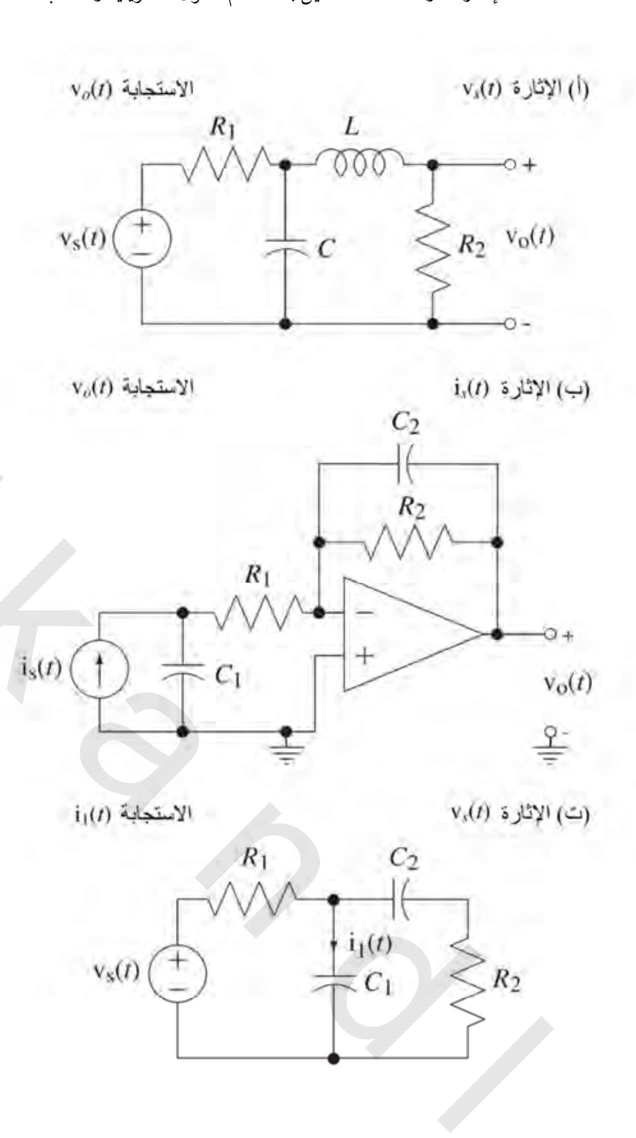
تمارين مع الإجابات

(في كل تمرين، تكون الإجابات مرتبة بطريقة عشوائية)

دوال العبور

١- لكل دائرة في شكل (ت- ١) أكتب دالة العبور بين الإثارة والاستجابة الموضحتين. عبر عن كل دالة عبور في الصورة القياسية التالية:

$$H(s) = A\frac{s^M + b_{N-1}s^{M-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^N + a_{D-1}s^{N-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$



شكل رقم (ت-١)

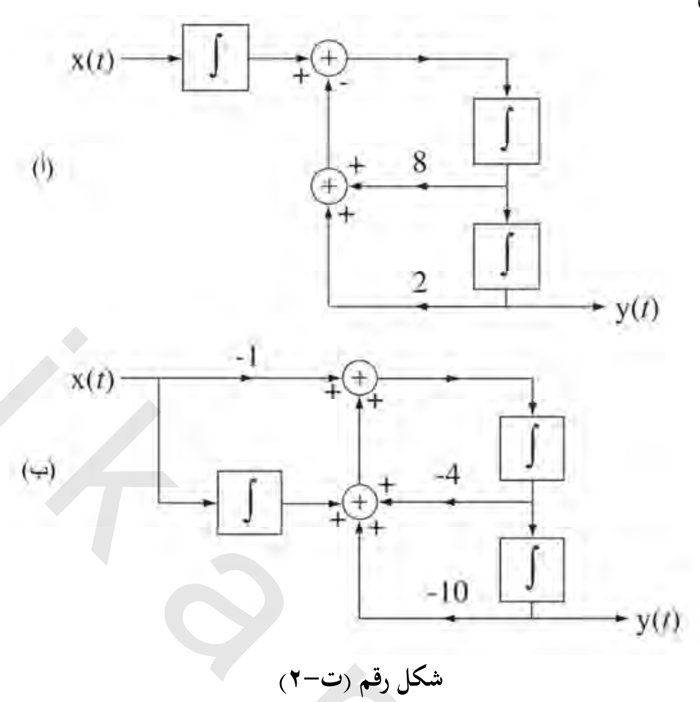
الإجابة:

$$\frac{1}{R_1}\frac{s^2+s\frac{1}{R_2C_2}}{s^2+s\left(\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_1C_1}\right)+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\frac{R_2}{R_1LC}\frac{1}{s^2+s\left(\frac{1}{R_1C}+\frac{R_2}{L}\right)+\frac{R_2+R_1}{R_1CL}}$$

$$-\frac{1}{R_1C_1C_2}\frac{1}{s^2+s\left(\frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_1C_1}\right)+\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

٢- لكل مخطط صندوقي في شكل (ت- ٢) اكتب دالة العبور حيث تكون x(t) هي إشارة الدخل، و y(t) هي إشارة الخرج.



شكل رقم (ت-٢)

الإجابة:

$$\frac{1}{s^3+8s^2+2s}, -\frac{s-1}{s^3+4s^2+10s}$$

الاستقرار

٣- تحقق من استقرار كل من الأنظمة التالية التي دوال عبورها كما يلي:

(أ) $H(s) = \frac{100}{s+200}$ (ب) $H(s) = \frac{80}{s-4}$

(ت) $H(s) = \frac{6}{s(s+1)}$ (ث) $H(s) = \frac{15s}{s^2+4s+4}$

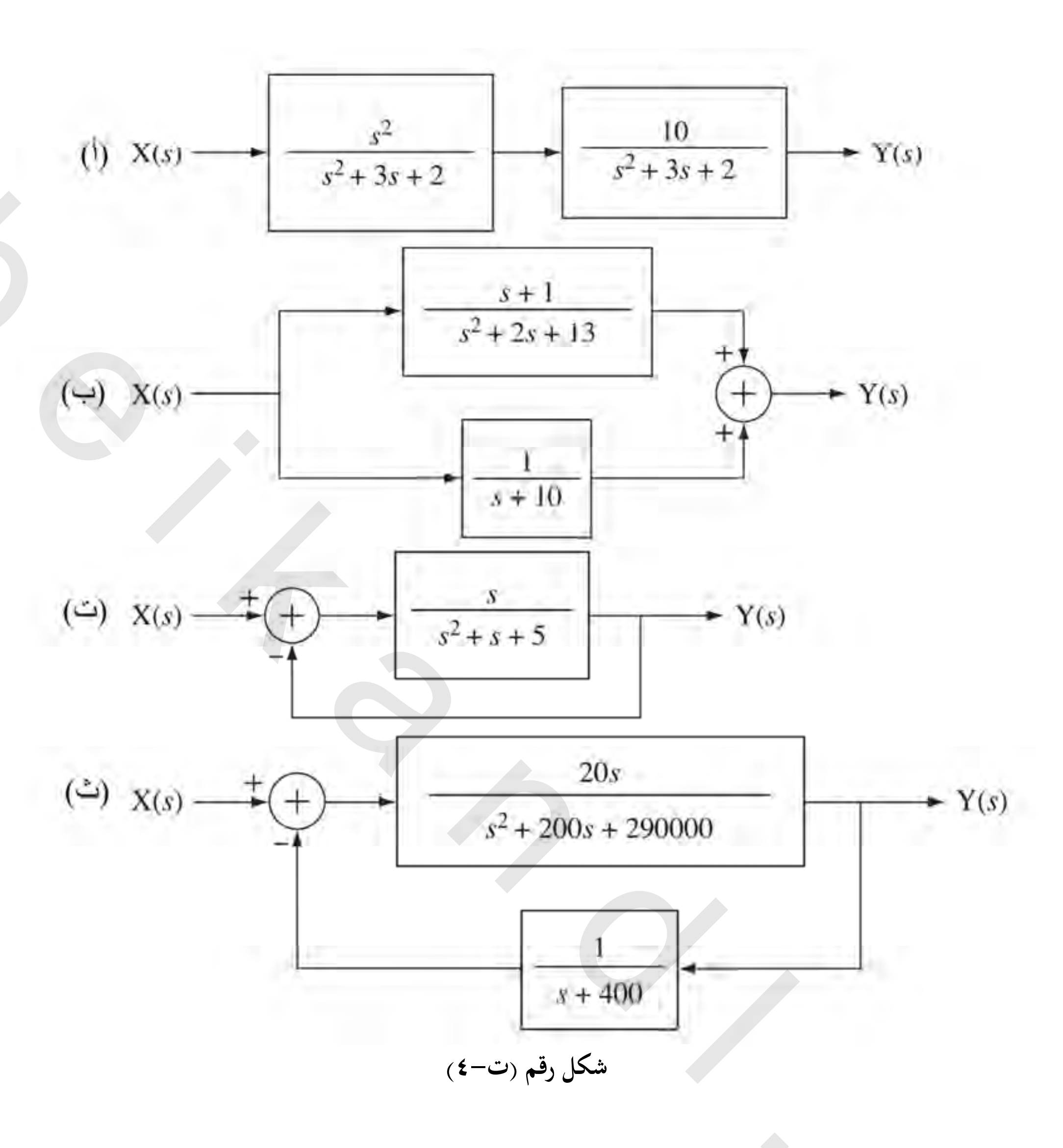
(ج) $H(s) = \frac{s-10}{s^2+4s+29}$ (ح) $H(s) = 3\frac{s^2-4}{s^2-4s+29}$

(خ) $H(s) = \frac{1}{s^2+64}$ (د) $H(s) = \frac{10}{s^3+4s^2+29s}$

الإجابة: 3 أنظمة مستقرة، و5 غير مستقرة بما في ذلك ٣3 مستقرة هامشياً

التوصيلات على التوالي وعلى التوازي والتغذية العكسية

٤- أوجد دوال العبور الكلية للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٤) في صورة نسبة واحدة من كثيرتي حدود في المتغير s.



شكل رقم (ت-٤)

الإجابة:

$$20\frac{s^2+400s}{s^3+600s^2+370020s+1.16\times10^8},\quad 2\frac{s^2+6.5s+11.5}{s^3+12s^2+33s+130},$$

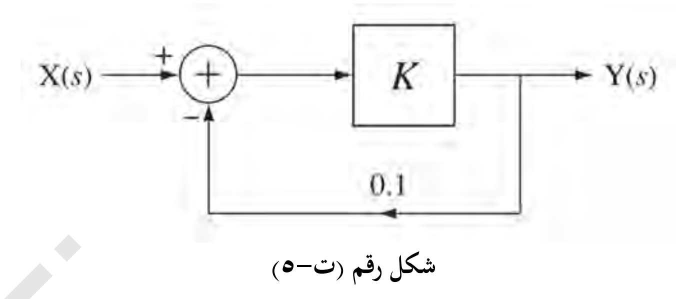
$$10\frac{s^2}{s^4+600s^3+370020s^2+12s+4},\quad \frac{s}{s^2+2s+5}$$

٥- في نظام التغذية العكسية الموضح في شكل (ت- ٥)، أوجد دالة العبور الكلية لهذه القيم لمعامل التكبير K في المسار الأمامي.

(أ) $K=10^6$ (ب) $K=10^5$

(ت) $K = 10$ (ث) $K = 1$

(ج) $K = -1$ (ح) $K = -10$



شكل رقم (ت–٥)

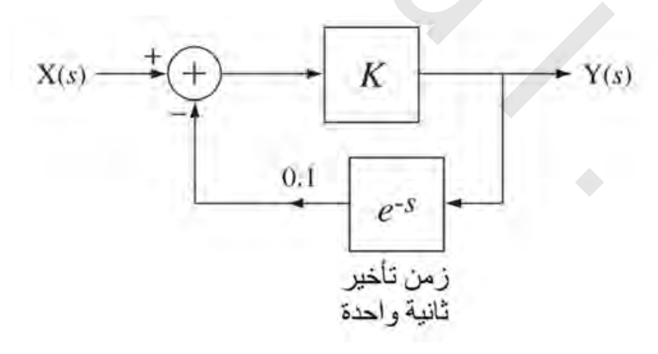
الإجابة: 5، -1.111، -∞، 0.909، 10، 10

٦- في نظام التغذية العكسية الموضح في شكل (ت- ٦) ارسم استجابة النظام لوحدة الخطوة في الفترة الزمنية 0<t<10، ثم اكتب معادلة لدالة العبور الكلية وارسم مخطط الأقطاب والأصفار لهذه القيم لـ K.

(أ) $K = 20$ (ب) $K = 10$

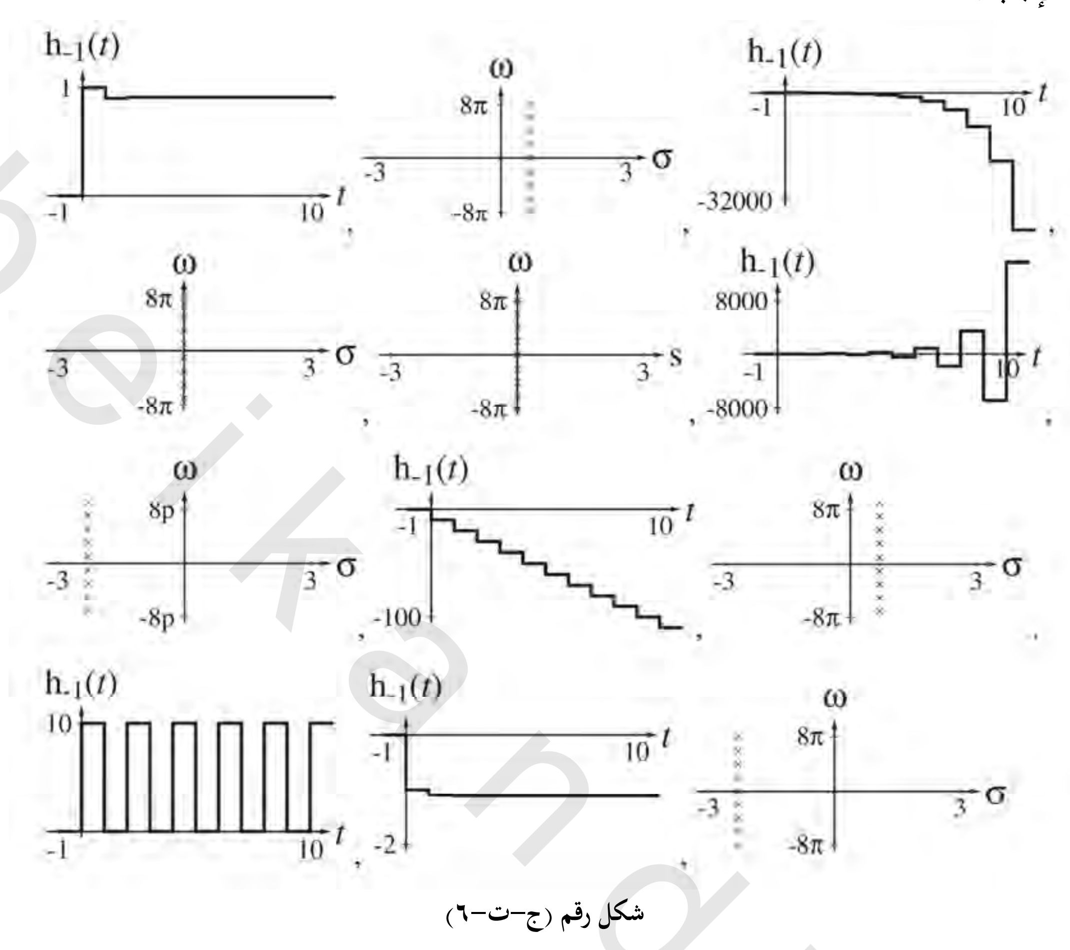
(ث) $K = 1$ (ج) $K = -1$

(ح) $K = -10$ (خ) $K = -20$



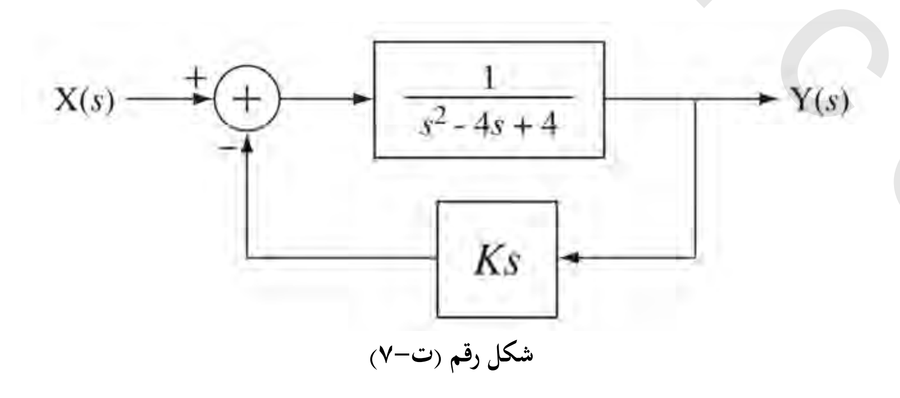
شكل رقم (ت–٦)

الإجابة:



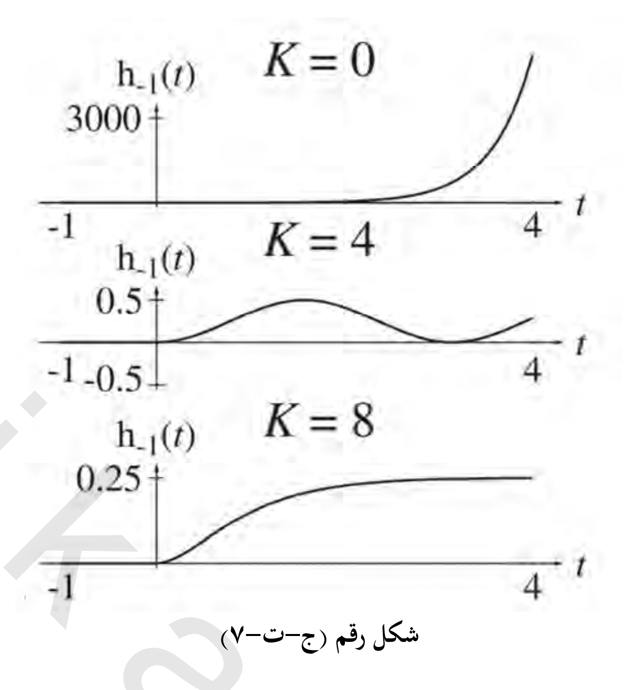
شكل رقم (ج–ت–٦)

٧- إلى مدى لمعامل التكبير K سيكون النظام في شكل (ت- ٧) مستقراً ؟ ارسم استجابة دوال الخطوة عندما K=0، و K=4، و K=8.



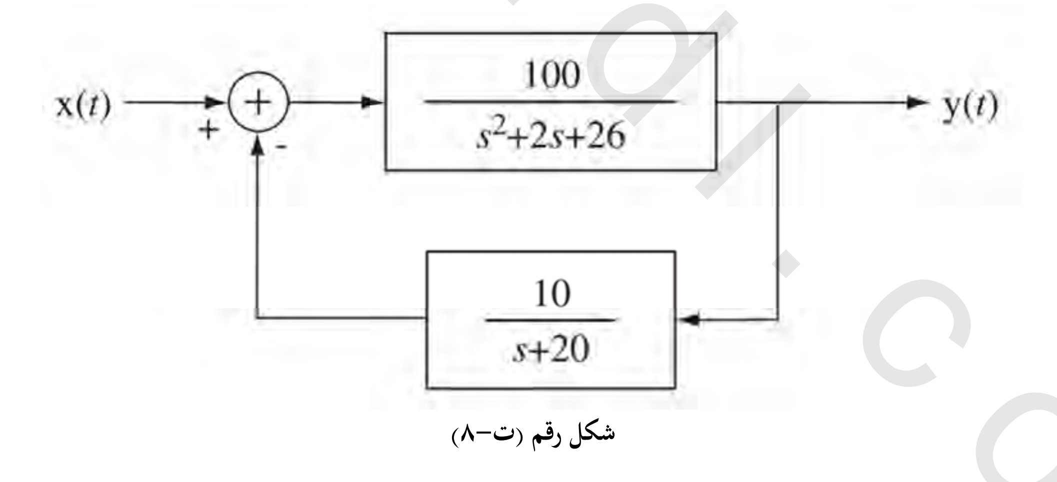
شكل رقم (ت–٧)

الإجابة: K>4

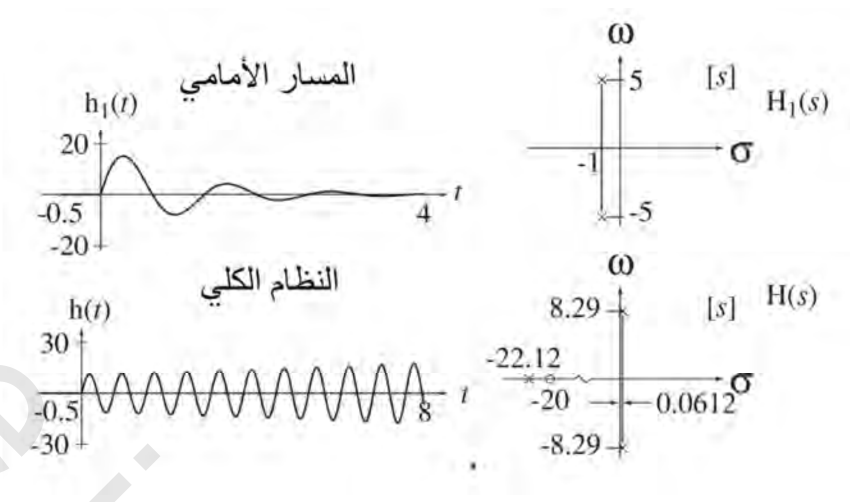


شكل رقم (ج–ت–٧)

٨- ارسم استجابة الصدمة ومخطط الأقطاب والأصفار للمسار الأمامي وللنظام الكلي الموضح في شكل (ت- ٨) .



شكل رقم (ت–٨)



شكل رقم (ج–ت–٨)

الموضع الجذري

٩- ارسم الموضع الجذري لكل واحد من الأنظمة التي لها دوال عبور الحلقة التالية وحدِّد دوال العبور التي تكون مستقرة لكل القيم الموجبة للـ K.

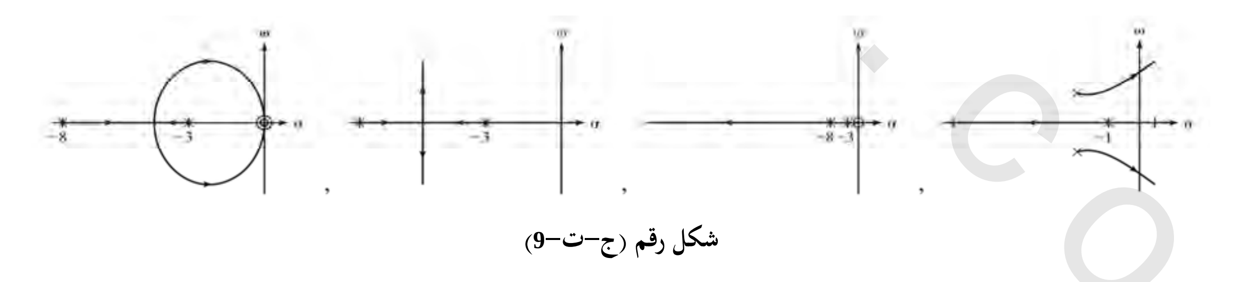
(أ) $T(s) = \frac{K}{(s+3)(s+8)}$

(ب) $T(s) = \frac{Ks}{(s+3)(s+8)}$

(ت) $T(s) = \frac{Ks^2}{(s+3)(s+8)}$

(ث) $T(s) = \frac{K}{(s+1)(s^2+4s+8)}$

الإجابة: ثلاثة مستقرة للقيم الموجبة المحددة للـ K ، وواحدة غير مستقرة لبعض القيم الموجبة المحددة للـ K.



شكل رقم (ج–ت–9)

تتبع أخطاء أنظمة التغذية العكسية التي لها معامل تكبير الوحدة

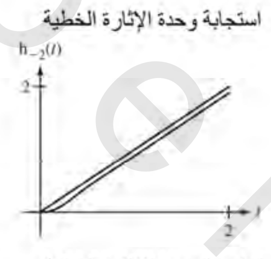
١٠- ارسم استجابة وحدة الخطوة، واستجابة الإثارة الخطية التصاعدية لنظم التغذية العكسية التي لها دوال عبور المسارات الأمامية التالية :

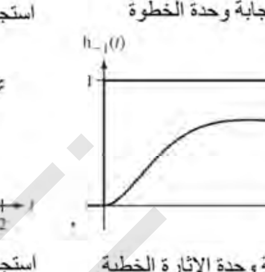
(أ) $H_1(s)=\frac{100}{s+10}$

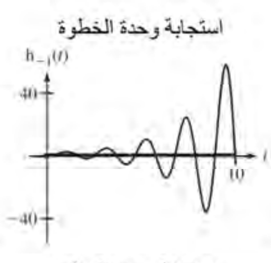
(ب) $H_1(s)=\frac{100}{s(s+10)}$

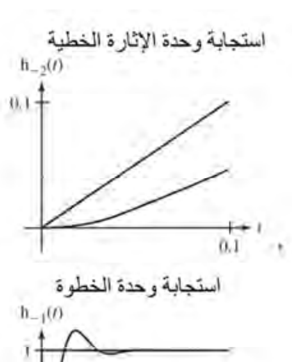
(ث) $H_1(s)=\frac{100}{s^2(s+10)}$

(ج) $H_1(s)=\frac{20}{(s+2)(s+6)}$

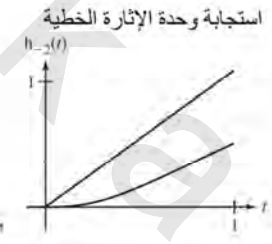


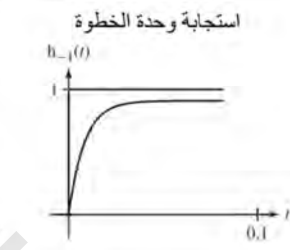














شكل رقم (ج–ت–١٠).

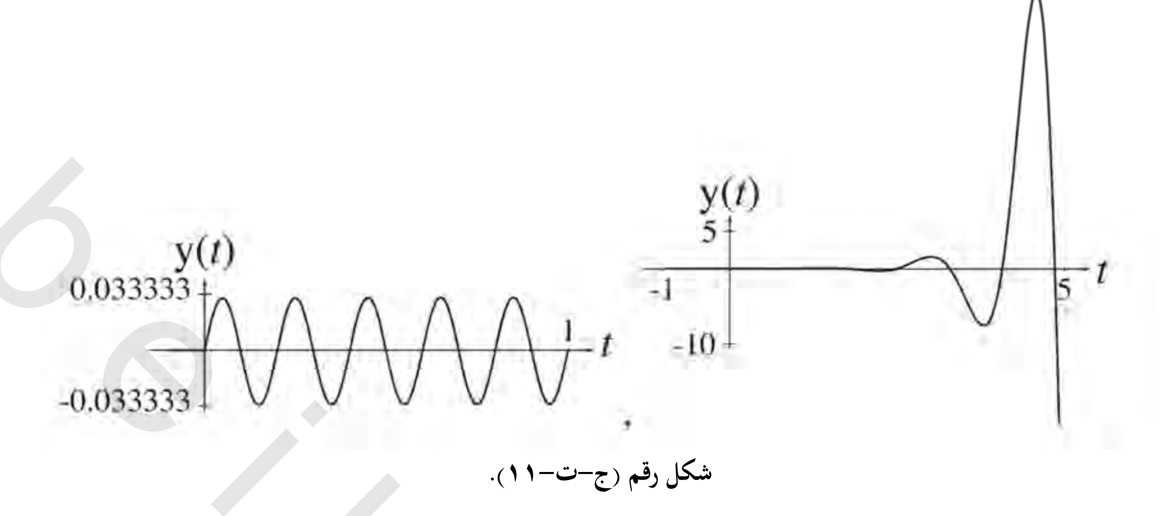
الاستجابة للإشارات القياسية

١١- باستخدام تحويل لابلاس، أوجد وارسم الاستجابة y(t) في النطاق الزمني للأنظمة التي لها دوال العبور التالية للإشارة الجيبية السببية : x(t)=Acos(10πt)u(t).

(أ) $H(s)=\frac{1}{s+1}$

(ب) $H(s)=\frac{s-2}{(s-2)^2+16}$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–١١).

١٢- أوجد استجابات الأنظمة التي لها دوال العبور التالية لوحدة خطوة ووحدة مقدار، وجيب تمام تردده 1Hz يتم تطبيقه عند t=0. أوجد أيضاً الاستجابة لوحدة مقدار حقيقية، وجيب تمام تردده 1Hz باستخدام CTFT وقارن مع الاستجابة المدفوعة للحل الكلي الذي تحصل عليه باستخدام تحويل لابلاس.

(أ) $H(s) = \frac{1}{s}$

(ب) $H(s) = \frac{s}{s+1}$

(ت) $H(s) = \frac{s}{s^2+2s+40}$

(ث) $H(s) = \frac{s^2+2s+40}{s^2}$

الإجابة: (استجابات الخطوة) $[1+2t+20t^2]$، $ramp(t)$، $0.16e^{-t}\sin(6.245t)u(t)$، $e^{-t}u(t)$.

بناء الأنظمة

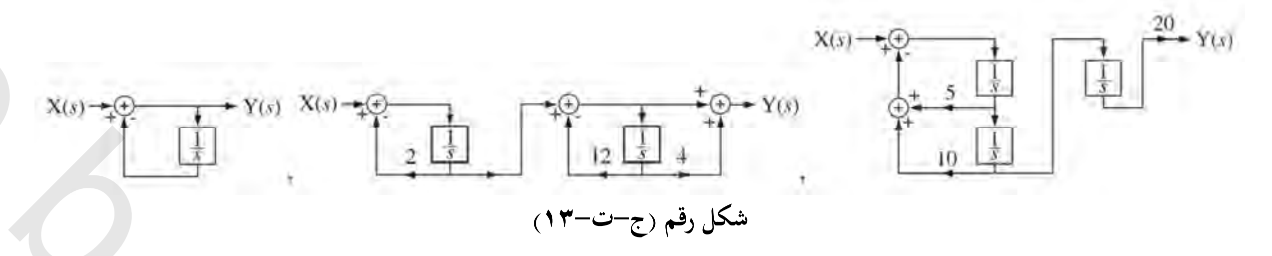
١٣- ارسم مخططات متتالية للأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

(أ) $H(s) = \frac{s}{s+1}$

(ب) $H(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+12)}$

(ت) $H(s) = \frac{20}{s(s^2+5s+10)}$

الإجابة :



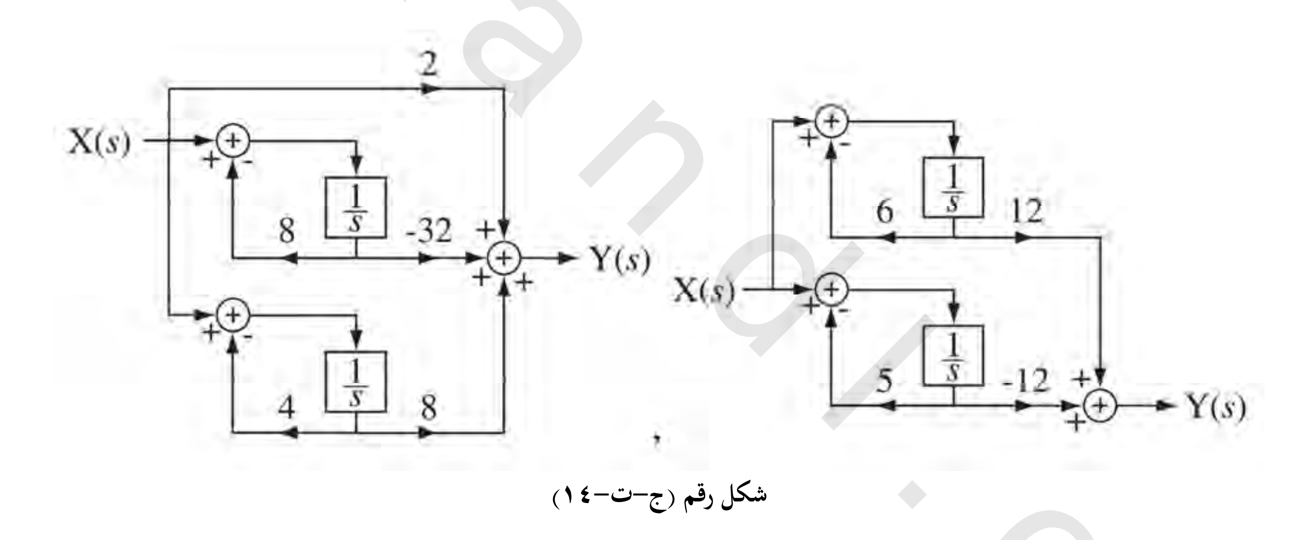
شكل رقم (ج-ت-١٣)

١٤- ارسم المخططات المتوازية للأنظمة التي لها دوال العبور التالية :

(أ) $H(s) = \frac{-12}{s^2+11s+30}$

(ب) $H(s) = \frac{2s^2}{s^2+12s+32}$

الإجابة :

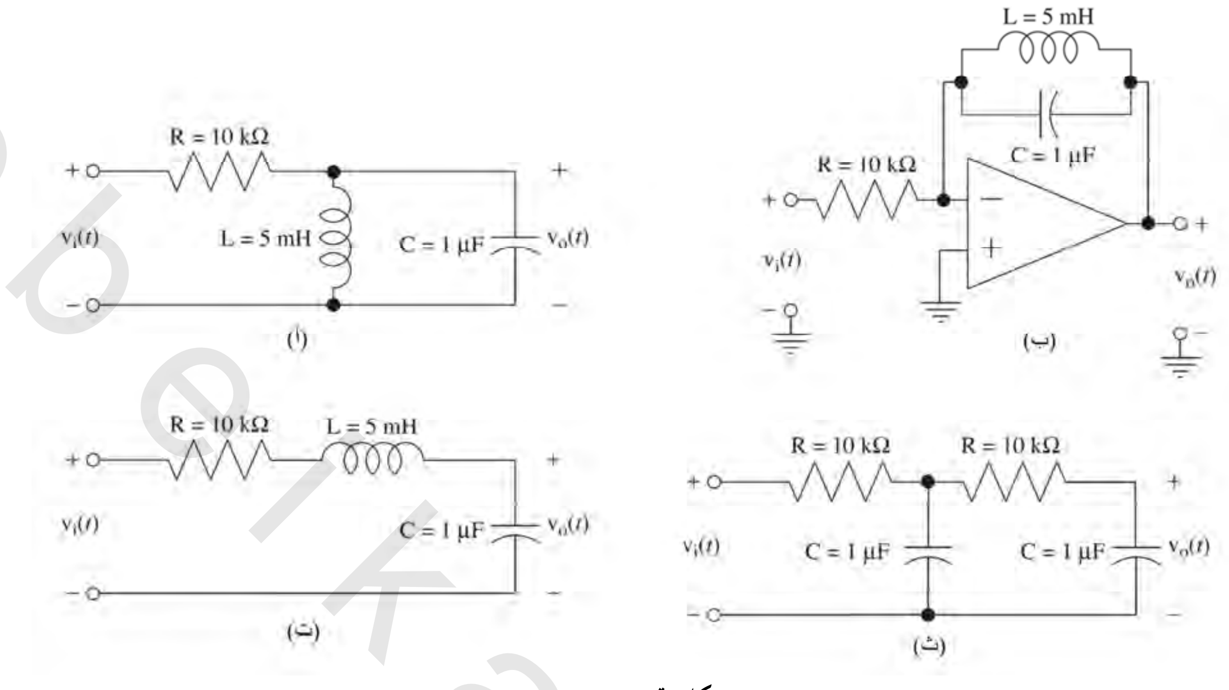


شكل رقم (ج-ت-١٤)

تمارين بدون إجابات

دوال العبور

١٥- أوجد دوال العبور في النطاق s للدوائر الموضحة في شكل (ت- ١٥) ثم ارسم مخططات صندوقية لها حيث $v_i(s)$ هي الإثارة ، و $v_0(s)$ هي الاستجابة :



شكل رقم (ت–١٥)

الاستقرار

١٦- حدد إذا كانت الأنظمة التي لها دوال العبور التالية تكون مستقرة، أم مستقرة هامشيا، أم غير مستقرة.

(أ) $H(s) = \frac{s(s+2)}{s^2+8}$

(ب) $H(s) = \frac{s(s-2)}{s^2-8}$

(ت) $H(s) = \frac{s^2}{s^2+4s+8}$

(ث) $H(s) = \frac{s^2}{s^2-4s+8}$

(ث) $H(s) = \frac{s}{s^3-4s^2+8s}$

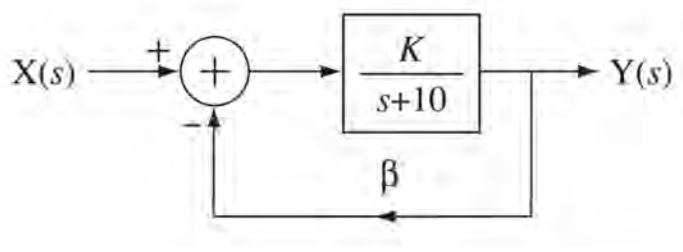
التوصيلات المتوازية، والمتوالية، والتغذية العكسية

١٧- أوجد معادلة النظام الكلي للنظام الموضح في شكل (ت- ١٧).

(أ) بفرض β=1، لأي قيم لـ K سيكون النظام مستقراً ؟

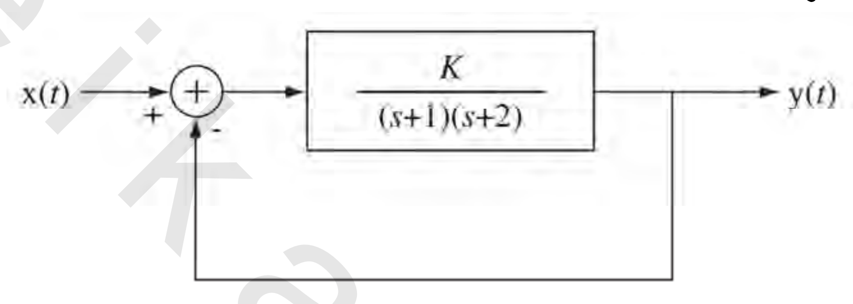
(ب) بفرض β=-1، لأي قيم لـ K سيكون النظام مستقراً ؟

(ت) بفرض β=10، لأي قيم لـ K سيكون النظام مستقراً ؟



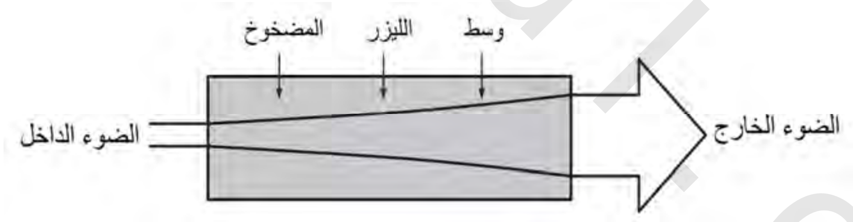
شكل رقم (ت–١٧)

١٨- أوجد معادلة دالة العبور الكلية للنظام الموضح في شكل (ت- ١٨). لأي قيم موجبة للـ K سيكون النظام مستقراً ؟

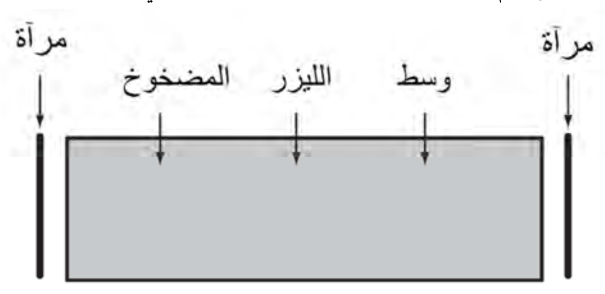


شكل رقم (ت–١٨)

١٩- ليزر يعمل على المبدأ الأساسي بأن وسط الضخ يكبر الضوء المسافر أثناء انتشاره خلال الوسط. بدون المرايا يصبح الليزر مكبر موجة مسافرة أحادية المرور، كما في شكل (ت- ١٩أ)، وهذا يعتبر نظاماً بدون تغذية مرتدة. إذا قمنا الآن بوضع مرايا عند كل نهاية في وسط الضخ، فإننا نحدث تغذية مرتدة في النظام كما في شكل (ت- ١٩ب).



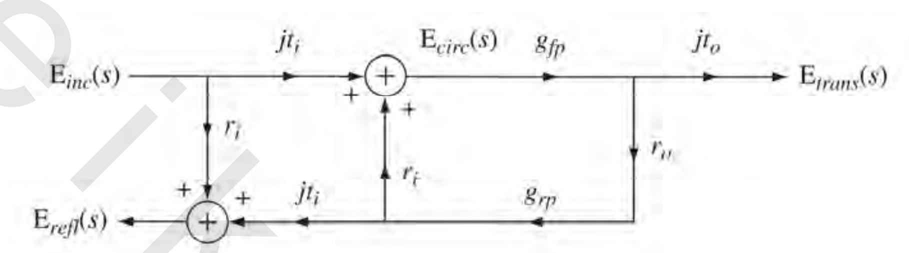
شكل رقم (ت–١٩أ) مكبر موجة ضوئية تسافر في مسار واحد



شكل رقم (ت–١٩ب) مكبر موجة ضوئية تجددية أو توالدية.

عندما يكون معامل تكبير الوسط كبيراً بما فيه الكفاية، فإن النظام سيتردد، مولدا شعاعاً ضوئياً متوافقاً، ومعبراً عن تشغيل الليزر. إذا كان معامل تكبير الوسط أقل من المطلوب لتوليد الذبذبات المستديمة، فإن النظام يسمى مكبراً تجديدياً للموجة المسافرة regenerative traveling wave amplifier, RTWA.

افترض أن المجال الكهربي لشعاع ضوئي ساقط على RTWA من اليسار سيكون هو الإثارة للنظام $E_{inc}(s)$، وافترض أن المجال الكهربي للضوء المنعكس $E_{ref}(s)$ والضوء المرسل أو العابر $E_{trans}(s)$ هما استجابات هذا النظام، كما في شكل (١٣- ١٩ت).



شكل رقم (١٣-١٩ت) مخطط صندوقي لـ RTWA1

افترض أن معاملات النظام ستكون كما يلي:

انعكاسية المجال الكهربي لمراية الدخل $r_i=0.99$

إرسالية المجال الكهربي لمراية الدخل $t_i = \sqrt{1-r_i^2}$

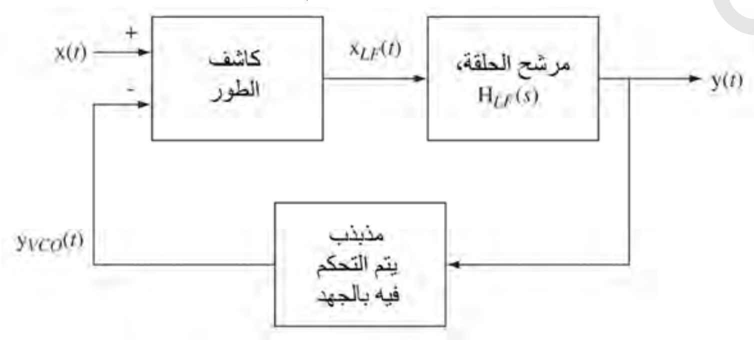
انعكاسية المجال الكهربي لمراية الخرج $r_0=0.98$

إرسالية المجال الكهربي لمراية الخرج $t_0 = \sqrt{1-r_0^2}$

معاملات تكبير المسار الأمامي والعكسي $g_{fp}(s) = g_{rp}(s) = 1.01e^{-10^{-9}s}$

أوجد معادلة الاستجابة الترددية $E_{trans}(f)/E_{inc}(f)$ وارسم مقدارها على المدى الترددي $\pm 3x10^{14}$Hz $5x10^8$.

٢٠- من الأمثلة الكلاسيكية على استخدام التغذية العكسية هو حلقة الطور المغلقة phase locked loop المستخدمة لاستخلاص الإشارات المعدلة ترددياً، كما في شكل (ت- ٢٠).



شكل رقم (ت-٢٠) حلقة الطور المغلقة

إشارة الدخل x(t) هي إشارة جيبية معدلة ترددياً. كاشف الطور يكشف عن فرق الزاوية بين إشارة الدخل والإشارة المنتجة من المذبذب المتحكم فيه جهدياً. استجابة الكاشف الطورة تكون جهداً يتناسب مع الفرق في الطور. يقوم مرشح الحلقة بترشيح هذا الجهد. تقوم إشارة الخرج بعد ذلك بالتحكم في تردد المذبذب الجهدي. عندما تكون إشارة الدخل عند تردد ثابت وتكون الحلقة مغلقة يكون الفرق في الطور بين إشارتي دخل الكاشف الطوري يساوي صفراً. (في الكاشف الطوري الحقيقي يكون الفرق في الطور 90 درجة عند الغلق. ولكن هذا لا يكون مهماً في هذا التحليل، حيث ذلك لا يكون له أي تأثير على أداء أو استقرار النظام). مع تغير تردد إشارة الدخل x(t)، فإن الحلقة ستكتشف التغير الطوري المصاحب لذلك وتحاول تتبعه. إشارة الخرج الكلية y(t) تكون عبارة عن إشارة تتناسب مع تردد إشارة الدخل.

الإثارة الحقيقية، بمفهوم الأنظمة، لهذا النظام ليست x(t)، ولكنها بدلاً من ذلك زاوية الطور لـ x(t) وهي $\varphi_x(t)$، لأن الكاشف الطوري يكشف عن الفرق في الطور وليس الفرق في الجهد. افترض أن تردد الـ x(t) هو $f_x(t)$. العلاقة بين الطور والتردد، يمكن رؤيتها عن طريق فحص أي دالة جيبية. افترض $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$. طور هذه الدالة هو $2\pi f_0 t$، وبالنسبة للدوال الجيبية البسيطة (f_0 تكون ثابتة)، وهذا الطور يزيد خطياً مع الزمن. التردد f_0 يساوي تفاضل الطور. لذلك فإن العلاقة بين الطور والتردد، بالنسبة للإشارة المعدلة ترددياً ستكون:

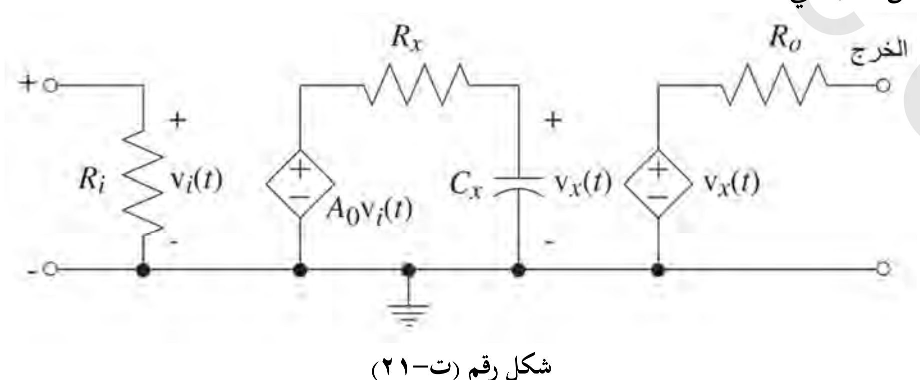
$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\phi_x(t)\right)$$

افترض أن تردد x(t) يساوي 100Hz. افترض أن دالة العبور للمذبذب الجهدي تساوي 10^8Hz/V. افترض أيضاً أن دالة العبور لمرشح الحلقة ستكون:

$$H_{LF}(s) = \frac{1}{s+1.2\times10^5}$$

افترض أن دالة العبور للكاشف الطوري تساوي 1V/radian. إذا تغير تردد الإشارة x(t) فجأة إلى 100.001MHz، ارسم التغير في إشارة الخرج $\Delta y(t)$.

٢١- الدائرة الموضحة في شكل (ت- ٢١) هي نموذج تقريبي مبسط لمكبر عمليات مع توصيل الطرف العاكس للأرضي.



شكل رقم (ت–٢١)

بفرض القيم التالية:

$$R_i = 1M\Omega\ ,\ R_x = 1k\Omega,\ C_x = 8\mu F,\ R_o = 10\Omega,\ A_0 = 10^6$$

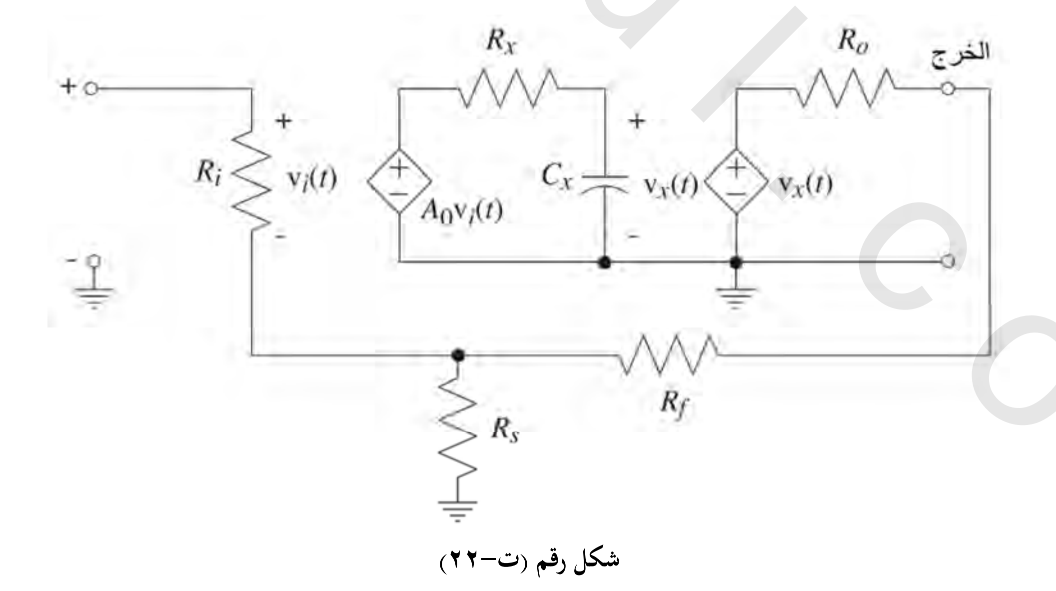
(أ) اعتبر الإثارة للدائرة هي تيار من مصدر تيار ثابت مطبق على الدخل غير العاكس وافترض أن الاستجابة هي فرق الجهد بين الدخل غير العكس والأرضي. أوجد دالة العبور وارسم الاستجابة الترددية. دالة العبور هذه تمثل معاوقة الدخل؟

(ب) افترض أن الإثارة لهذه الدائرة هي تيار من مصدر تيار ثابت مطبق على الخرج وأن الاستجابة هي الجهد المتكون بين طرف الخرج والأرضي مع توصيل الدخل غير العاكس للأرضي. أوجد دالة العبور وارسم الاستجابة الترددية. دالة العبور هذه تمثل معاوقة الخرج.

(ت) افترض أن الإثارة لهذه الدائرة عبارة عن جهد من مصدر جهد ثابت مطبق على الدخل غير العاكس وأن الاستجابة هي الجهد المتكون بين طرف الخرج والأرضي. أوجد دالة العبور وارسم الاستجابة الترددية. دالة العبور هذه تمثل معامل تكبير الجهد.

٢٢- غير الدائرة في تمرين ٢١ إلى الدائرة الموضحة في شكل (ت- ٢٢). إنها هي دائرة تغذية مرتدة، تحقق معامل تكبير جهد موجب لحلقة مغلقة في المكبر الكلي. أعد الخطوات (أ)، و(ب)، و(ت) في المسألة 6# لدائرة التغذية العكسية وقارن بين النتائج. ما هي التأثيرات المهمة للتغذية العكسية لهذه الدائرة. افترض القيم التالية لمكونات الدائرة:

$$R_i = 1M\Omega\ , R_x = 1k\Omega, C_x = 8\mu F, R_o = 10\Omega, A_0 = 10^6, R_f = 10k\Omega, R_s = 5k\Omega$$



شكل رقم (ت-٢٢)

الموضع الجذري

٢٣- ارسم الموضع الجذري لكل من الأنظمة التي لها دوال عبور الحلقة التالية وحدد منها دوال العبور التي تكون مستقرة لكل القيم الموجبة لـ K.

(أ) $T(s) = \frac{K(s+10)}{(s+1)(s^2+4s+8)}$

(ب) $T(s) = \frac{K(s^2+10)}{(s+1)(s^2+4s+8)}$

(ت) $T(s) = \frac{K}{s^3+37s^2+332s+800}$

(ث) $T(s) = \frac{K(s-4)}{s+4}$

(ج) $T(s) = \frac{K(s-4)}{(s+4)^2}$

(ح) $T(s) = \frac{K(s+6)}{(s+5)(s+9)(s^2+4s+12)}$

تتبع الأخطاء في أنظمة التغذية العكسية ذات معامل تكبير الوحدة

٢٤- ارسم استجابة الخطوة والاستجابة الخطية لأنظمة التغذية العكسية ذات تردد الوحدة التي لها دالة عبور المسار الأمامي كما يلي:

(أ) $H_1(s) = \frac{20}{(s+2)(s+6)}$

(ب) $H_1(s) = H_1(s) = \frac{20}{s^2(s+2)(s+6)}$

(ت) $H_1(s) = \frac{100}{s^2+10s+34}$

(ث) $H_1(s) = \frac{100}{s(s^2+10s+34)}$

(ج) $H_1(s) = \frac{100}{s^2(s^2+10s+34)}$

الاستجابة للإشارات القياسية

٢٥- بمعلومية دالة العبور للنظام LTI، أوجد استجابة النطاق الزمني y(t) للإشارات x(t):

(أ) $X(t) = sin(2\pi t)u(t),\ H(s) = \frac{1}{s+1}$

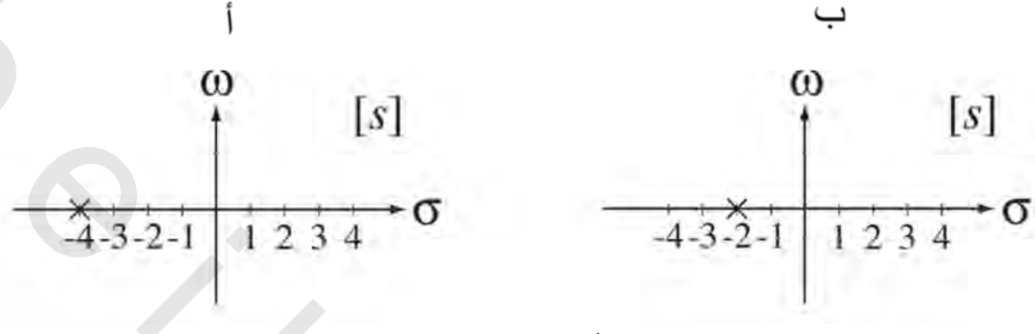
(ب) $X(t) = u(t),\ H(s) = \frac{3s}{s+2}$

(ت) $X(t) = u(t),\ H(s) = \frac{3}{s+2}$

(ث) $X(t) = u(t),\ H(s) = \frac{5s}{s^2+2s+2}$

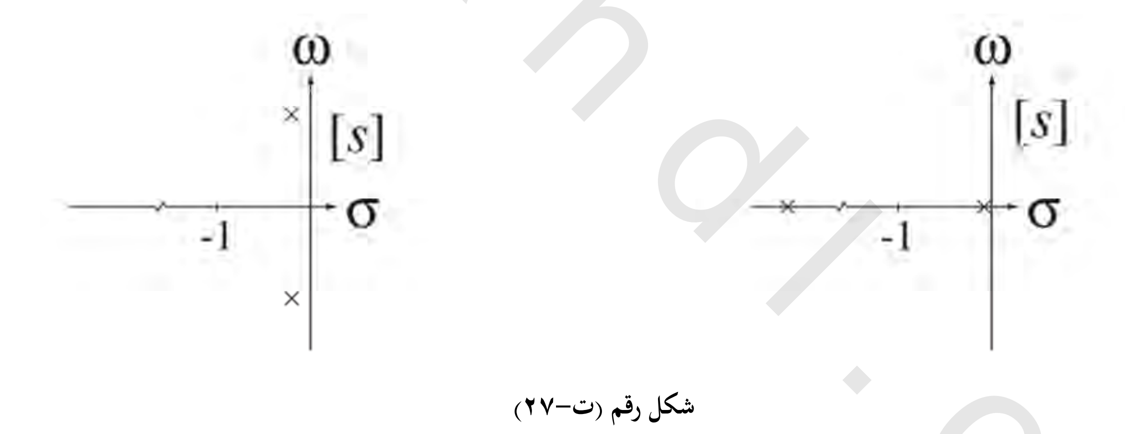
(ج) $X(t) = sin(2\pi t)u(t),\ H(s) = \frac{5s}{s^2+2s+2}$

٢٦- النظامان A و B الموضحان في شكل (ت- ٢٦) لهما مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة. أيهما يستجيب بشكل أسرع لوحدة الخطوة (بمعنى يصل إلى القيمة النهائية بمعدل أسرع)؟ اشرح إجابتك.



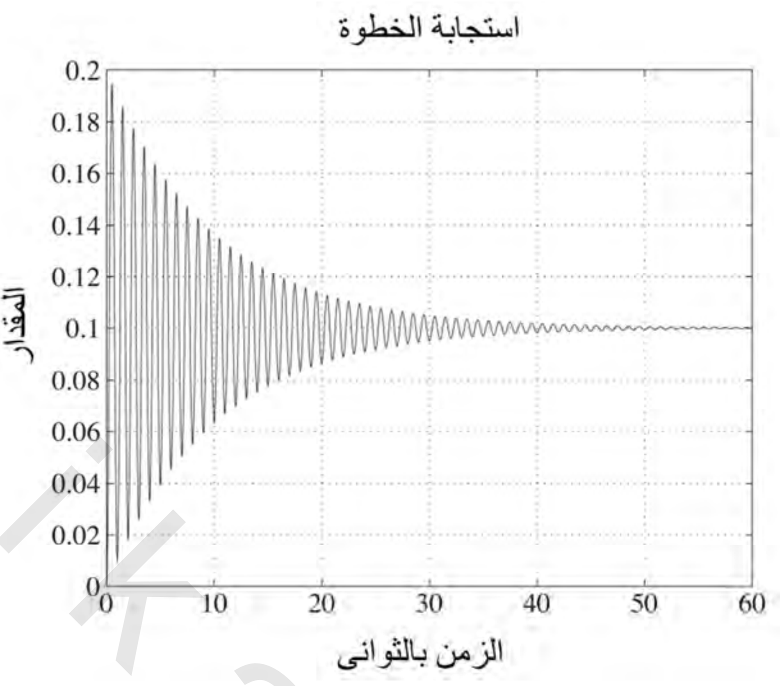
شكل رقم (ت-٢٦)

٢٧- النظامان A و B الموضحان في شكل (ت- ٢٦) لهما مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة. أيهما يكون له استجابة خطوة تتخطى القيمة النهائية قبل أن تستقر عند القيمة النهائية ؟ اشرح إجابتك.



شكل رقم (ت-٢٧)

٢٨- نظام من الدرجة الثانية تتم إثارته بوحدة خطوة واستجابته، كما هو موضح في شكل (ت- ٢٨). اكتب معادلة دالة عبور هذا النظام؟



شكل رقم (ت–٢٨) استجابة الخطوة لنظام من الدرجة الثانية

بناء الأنظمة

٢٩- ارسم مخططات توالٍ للأنظمة التي لها دوال العبور التالية :

(أ) $H(s) = -50\frac{s^2}{s^3+8s^2+13s+40}$

(ب) $H(s) = \frac{s^3}{s^3+18s^2+92s+120}$

٣٠- ارسم مخططات توازٍ للأنظمة التي دوال العبور التالية :

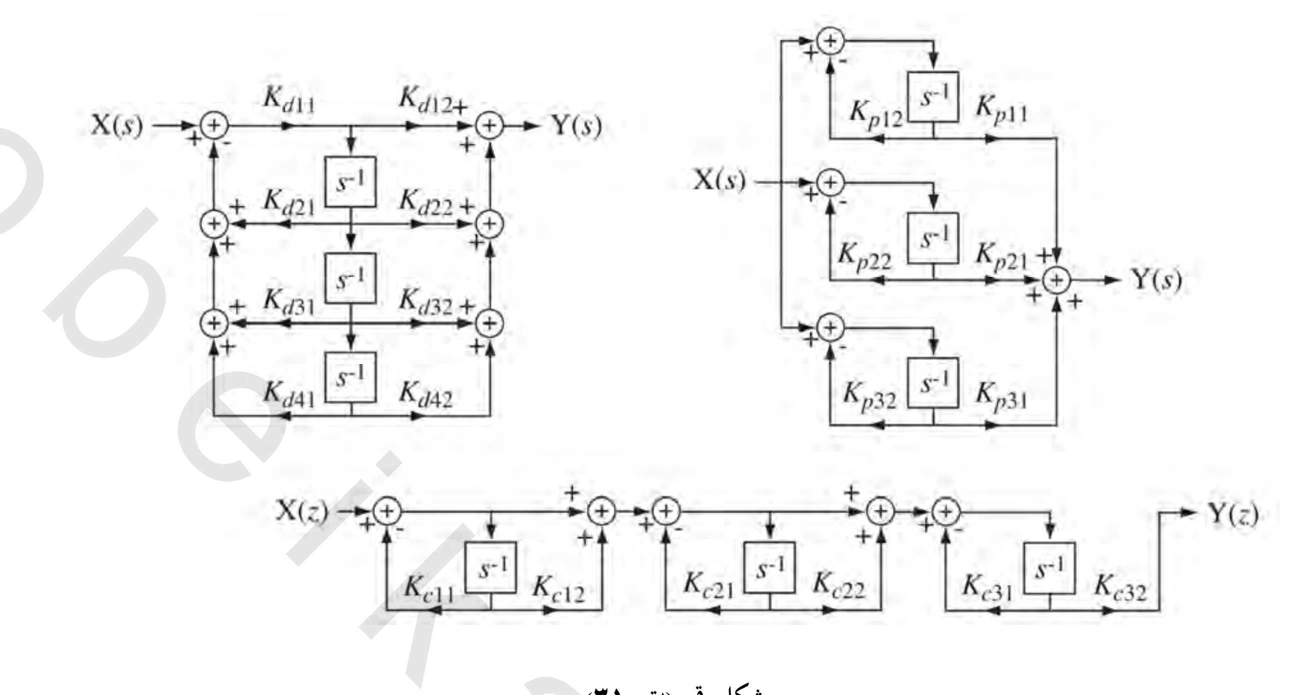
(أ) $H(s) = -50\frac{s^3}{s^3+4s^2+9s+3}$

(ب) $H(s) = \frac{5}{6s^3+77s^2+228s+189}$

٣١- نظام له دالة العبور التالية :

$H(s) = 10\frac{s^2-16}{s(s^2+4s+3)}$

هناك ثلاثة أبنية موضحة في شكل (ت- ٣١)، الصورة المباشرة II، والتوصيل التوالي والتوازي. أوجد قيم كل معاملات التكبير K.


X(s)
Y(s)
K_{d11}
K_{d12}
K_{d21}
K_{d22}
K_{d31}
K_{d32}
K_{d41}
K_{d42}
s^{-1}
X(s)
Y(s)
K_{p11}
K_{p12}
K_{p21}
K_{p22}
K_{p31}
K_{p32}
X(z)
Y(z)
K_{c11}
K_{c12}
K_{c21}
K_{c22}
K_{c31}
K_{c32}

شكل رقم (ت–٣١)

الفصل الرابع عشر

تحويل زد (z) لتحليل الأنظمة

(١٤.١) المقدمة والأهداف

هذا الفصل يتبع طريقاً مثل الذي في الفصل ١٣ على تحليل الأنظمة باستخدام تحويل لابلاس، فيما عدا أن التطبيق سيكون على الإشارات والأنظمة المتقطعة زمنياً بدلاً من الإشارات والأنظمة المستمرة زمنياً.

أهداف الفصل

١- لكي نقدر العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس

٢- لكي نطبق تحويل زد على التحليل العام للأنظمة LTI، بما في ذلك أنظمة التغذية العكسية، والاستقرار، والاستجابات الزمنية للإشارات القياسية

٣- لكي نقدم طريقة لبناء أنظمة الزمن المتقطع في أشكال مختلفة

(١٤.٢) نماذج الأنظمة

المعادلات الفرقية

تكمن القوة الحقيقية لتحويل لابلاس في تحليل السلوك الديناميكي لأنظمة الزمن المستمر. بطريقة مماثلة، فإن تحليل السلوك الديناميكي لأنظمة الزمن المتقطع تعتبرالقوة الحقيقية لتحويل زد. معظم أنظمة الزمن المستمر التي يتم تحليلها بواسطة المهندسين يتم وصفها بمعادلات تفاضلية، ومعظم أنظمة الزمن المتقطع التي يتم تحليلها عن طريق المهنسين يتم وصفها بمعادلات فرقية. الصورة العامة لأي معادلة فرقية تصف نظام في الزمن المتقطع له إثارة هي x[n] واستجابته هي y[n] يمكن كتابتها كما يلي :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

بفرض أن كلاً من x[n] و y[n] سببيان ، وبإجراء تحويل زد على طرفي المعادلة السابقة نحصل على :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\, Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\, X(z)$$

دالة العبور H(z) هي نسبة Y(z) على X(z) :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

أو :

$$\mathrm{H(z)} = \mathrm{z}^{-\mathrm{N}-\mathrm{M}} \frac{\mathrm{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_{M-1} z + b_M}}{\mathrm{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_{N-1} z + a_N}}$$

وعلى ذلك ، فإن دالة عبور النظام المتقطع زمنياً الموصوف بمعادلة فرقية تكون نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير z ، وذلك تماما مثل دالة عبور النظام المستمر زمنياً الموصوف بمعادلة تفاضلية تكون نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s.

المخططات الصندوقية

يمكن بسهولة نمذجة الأنظمة المتقطعة باستخدام المخططات الصندوقية تماما مثلما كان الحال مع الأنظمة المستمرة زمنياً ، ويمكن كتابة دوال العبور مباشرة من هذه المخططات الصندوقية. افترض النظام الموضح في شكل (١٤.١).

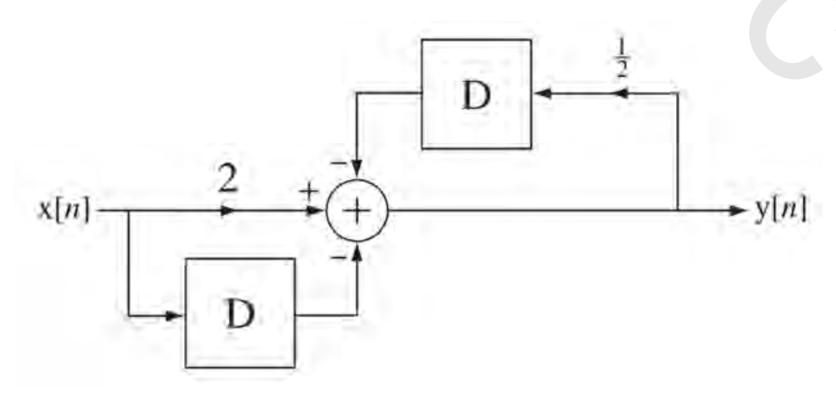
المعادلة الفرقية الواصفة لهذا النظام هي : y[n]=2x[n]-x[n-1]-(1/2)y[n-1]. يمكننا أن نعيد رسم المخطط الصندوقي لنجعله مخططاً صندوقياً في النطاق z بدلاً من المخطط الصندوقي في النطاق الزمني كما في شكل (١٤.٢).

المعادلة الواصفة لهذا النظام في النطاق z ستكون :

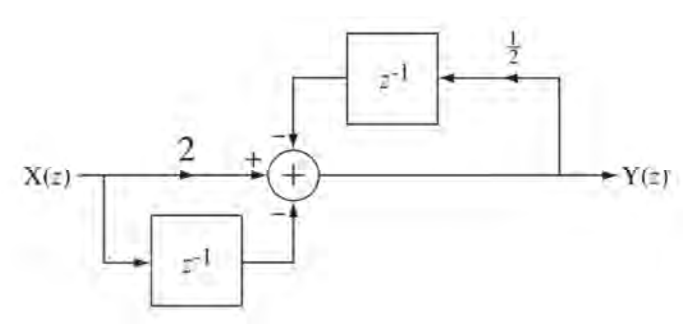
$$Y(z) = 2X(z) - z^{-1}X(z) - (1/2)z^{-1}Y(z)$$

وستكون دالة العبور على الصورة التالية :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - z^{-1}}{1 + (1/2)z^{-1}} = \frac{2z - 1}{z + 1/2}$$



شكل رقم (١٤.١) المخطط الصندوقي لنظام في النطاق الزمني.



شكل رقم (١٤.٢) المخطط الصندوقي لنظام في النطاق z.

(١٤.٣) استقرار النظام

أي نظام سببي متقطع زمنياً يكون مستقراً BIBO إذا كانت استجابة الصدمة له قابلة للجمع المطلق، بمعنى، أن يكون مجموع مقادير الصدمات في استجابة الصدمة محدداً. بالنسبة لنظام تكون دالة العبور له نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير z على الصورة التالية:

$$H(z) = \frac{b_0z^M + b_1z^{M-1} + \cdots + b_M}{a_0z^N + a_1z^{N-1} + \cdots + a_N}$$

حيث $M<N$ وكل الأقطاب مختلفة أو متميزة، فإن دالة العبور لهذا النظام يمكن كتابتها في صورة الكسور الجزيئية كما يلي:

$$H(z) = \frac{K_1}{z-p1} + \frac{K_2}{z-p2} + \cdots + \frac{K_N}{z-pN}$$

وبالتالي، فإن استجابة الصدمة ستكون على الصورة التالية:

$$h[n] = (K_1p1^{n-1} + K_2p2^{n-1} + \cdots + K_NpN^{n-1})u[n-1],$$

(بعض الـ p's من الممكن أن تكون مركبة). لكي يكون النظام مستقراً، فإن كل كمية في المعادلة السابقة يجب أن تكون قابلة للجمع. مجموع القيمة المطلقة لإحدى هذه المقادير يكون على الصورة:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|Kp^{n-1}u[n-1]| = |K|\sum_{n=1}^{\infty}|p^{n-1}| = |K|\sum_{n=0}^{\infty}\left||p|^n(e^{j<p})^n\right| = |K|\sum_{n=0}^{\infty}\left||p|^n \underbrace{e^{jn<p}}_{=1}\right|$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|Kp^{n-1}u[n-1]| = |K|\sum_{n=1}^{\infty}|p|^n$$

تقارب المجموع السابق يتطلب أن تكون $|p|<1$. لذلك لكي يكون النظام مستقرا، فإن كل الأقطاب يجب أن تحقق الشرط $|p_k|<1$.

> لأي نظام متقطع زمنياً يجب أن تقع كل أقطاب دالة العبور في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z حتى يكون النظام مستقراً.

وهذا يكافئ تماماً شرط أن تقع كل أقطاب النظام المستمر زمنياً في النصف الأيسر من المستوى s حتى يكون النظام مستقراً. لقد تم إجراء هذه التحليل على الأحوال الأكثر شيوعاً التي تكون فيها كل الأقطاب مختلفة أو متميزة. إذا كان هناك أقطاب متكررة، فإنه يمكن إثبات أن متطلب أن كل الأقطاب يجب أن تقع في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z لن يتغير.

(١٤.٤) توصيلات النظام

يتم التعامل مع دوال العبور لمكونات موصلة على التوالي، أو على التوازي بتغذية عكسية لأنظمة متقطعة زمنياً بالطريقة نفسها في حالة الأنظمة المستمرة زمنياً كما في شكل (١٤.٣) حتى شكل (١٤.٥).

يمكننا إيجاد دالة العبور الكلية لنظام تغذية عكسية بالطريقة نفسها التي تم اتباعها في حالة الأنظمة المستمرة زمنياً وستكون النتيجة كما يلي:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{H_1(z)}{1+H_1(z)H_2(z)}=\frac{H_1(z)}{1+T(z)},$$ المعادلة رقم (١٤.١)

حيث $T(z)=H_1(z)H_2(z)$ هي دالة عبور الحلقة.

$X(z) \rightarrow$ [$H_1(z)$] $\rightarrow X(z)H_1(z) \rightarrow$ [$H_2(z)$] $\rightarrow Y(z)=X(z)H_1(z)H_2(z)$

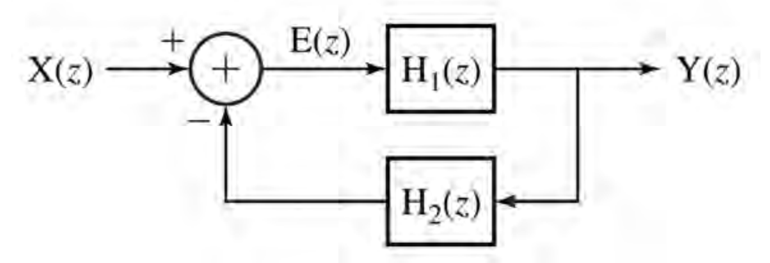
$X(z) \rightarrow$ [$H_1(z)H_2(z)$] $\rightarrow Y(z)$

شكل رقم (١٤.٣) التوصيل على التوالي للأنظمة.

$X(z)$, [$H_1(z)$], $X(z)H_1(z)$, [$H_2(z)$], $X(z)H_2(z)$, $Y(z)=X(z)H_1(z)+X(z)H_2(z)=X(z)[H_1(z)+H_2(z)]$

$X(z) \rightarrow$ [$H_1(z)+H_2(z)$] $\rightarrow Y(z)$

شكل رقم (١٤.٤) التوصيل على التوازي للأنظمة.



شكل رقم (١٤.٥) أنظمة التغذية العكسية.

مثلما كان الأمر حقيقياً بالنسبة لأنظمة التغذية العكسية المستمرة زمنياً، فإنه يمكن رسم الموضع الجذري لأنظمة التغذية العكسية المتقطعة زمنياً التي لها:

$$H_1(z) = K\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \quad و \quad H_2(z) = \frac{P_2(z)}{Q_2(z)}$$

خطوات رسم الموضع الجذري هي نفسها تماماً للأنظمة المستمرة زمنياً فيما عدا أن دالة عبور الحلقة:

$$T(z) = H_1(z)H_2(z)$$

تكون دالة في المتغير z بدلا من المتغير s. وعلى ذلك فإن تفسير الموضع الجذري، بعد رسمه، يكون مختلفاً قليلاً. بالنسبة للأنظمة المستمرة زمنياً، كانت قيمة معامل تكبير المسار الأمامي K التي يعبر عندها الموضع الجذري إلى النصف الأيمن من المستوى s هي القيمة التي يصبح عندها النظام غير مستقر. بالنسبة للأنظمة المتقطعة زمنياً، ستكون العبارة السابقة كما هي فيما عدا أن "النصف الأيمن من المستوى s" تستبدل بـ "خارج دائرة الوحدة".

مثال ١٤.١

تحليل استقرار الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام الموضع الجذري

ارسم الموضع الجذري للنظام المتقطع زمنياً الذي له دالة عبور للمسار الأمامي كما يلي:

$$H_1(z) = K\frac{z-1}{z+1/2}$$

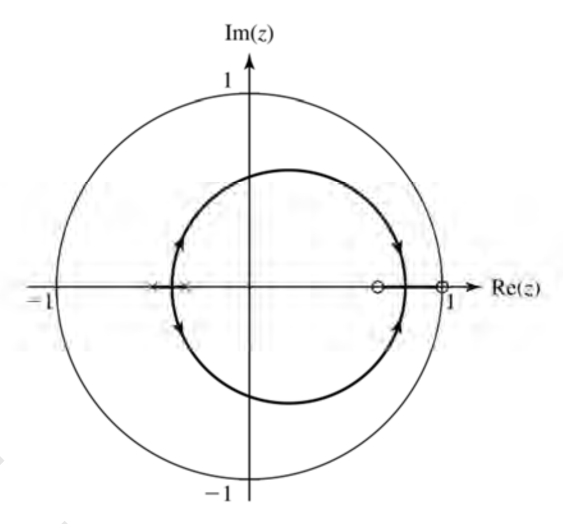
وله دالة عبور المسار العكسي كما يلي:

$$H_2(z) = \frac{z-2/3}{z+1/3}$$

فإن دالة عبور الحلقة ستكون على الصورة:

$$T(z) = K\frac{z-1}{z+1/2}\frac{z-2/3}{z+1/3}$$

هناك صفران عند z=2/3، و z=1، وقطبان عند z=-1/2، و z=-1/3. من الواضح من شكل الموضع الجذري في شكل (١٤.٦) أن النظام سيكون مستقراً بدون أي شرط لأي قيمة موجبة للـ K.



شكل رقم (١٤.٦) الموضع الجذري لدالة عبور الحلقة التالية:
$$T(z) = K\frac{z-1}{z+1/2}\frac{z-2/3}{z+1/3}$$

(١٤.٥) استجابات الأنظمة للإشارات القياسية

كما تم التوضيح في الفصل ١٣ ، فإنه من غير العملي أن نوجد استجابة الصدمة لنظام مستمر زمنياً عن طريق التطبيق الحقيقي للصدمة على النظام. في المقابل، فإن الصدمة المتقطعة زمنياً تكون دالة بسيطة جيدة السلوك ويمكن تطبيقها في المواقف العملية بدون أي مشاكل. بالإضافة لإيجاد استجابة الصدمة، وإيجاد استجابات الأنظمة لوحدة التتابع وللدوال الجيبية المطبقة على النظام عند الزمن n=0 فإنها تكون أيضاً طرق جيدة لاختبار ديناميكية وأداء الأنظمة.

استجابة وحدة التتابع

افترض أن دالة عبور النظام تكون على الصورة:
$$H(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)}$$

بالتالي، فإن الاستجابة لوحدة تتابع للنظام في النطاق z ستكون:
$$Y(z) = \frac{Z}{Z-1}\frac{N_H(z)}{D_H(z)}$$

يمكن كتابة هذه الاستجابة لوحدة التتابع في صورة الكسور لجزيئية كما يلي:
$$Y(z) = z\left[\frac{N_H(z)}{D_H(z)} + \frac{H(1)}{Z-1}\right] = z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} + H(1)\frac{Z}{Z-1}$$

إذا كان النظام مستقراً وسببياً، فإن تحويل z العكسي للكمية $zN_{H1}(z)/D_H(z)$ تكون إشارة تتناقص مع الزمن (الاستجابة العابرة)، وتحويل z للكمية H(1)z/(z-1) تكون عبارة عن حاصل ضرب وحدة التتابع في قيمة دالة العبور عند z=1 (الاستجابة المدفوعة).

مثال ١٤.٢

استجابة وحدة التتابع باستخدام تحويل زد

نظام له دالة العبور التالية:

$$H(z) = \frac{100z}{Z-1/2}$$

أوجد وارسم استجابة التتابع لهذا النظام.

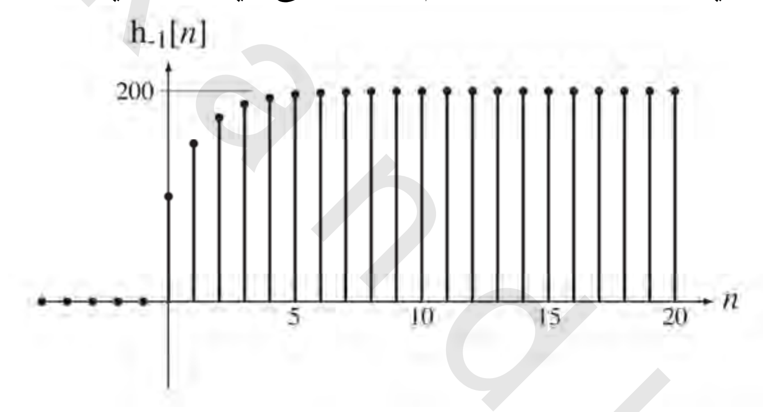
في النطاق z ستكون استجابة النظام لوحدة التتابع كما يلي:

$$H_{-1}(z) = \frac{z}{Z-1}\frac{100z}{Z-1/2} = z\left[\frac{-100}{Z-1/2} + \frac{200}{Z-1}\right] = 100\left[\frac{2z}{Z-1} - \frac{z}{Z-1/2}\right]$$

استجابة وحدة التتابع في النطاق الزمني هي تحويل زد العكسي الذي سيكون على الصورة التالية وكما في شكل (١٤.٧):

$$h_{-1}[n] = 100[2-(1/2)^n]u[n]$$

القيمة النهائية التي تقترب منها استجابة النظام لوحدة التتابع هي 200، وهي نفسها مثل H(1).



شكل رقم (١٤.٧) استجابة وحدة التتابع

في تحليل الإشارات والأنظمة، تكون الأنظمة الأكثر شيوعاً في الاستخدام هي أنظمة القطب الواحد والقطبين. دالة العبور لنظام القطب الواحد تكون على الصورة:

$$H(z) = \frac{kz}{z-p}$$

حيث p هي موضع القطب الحقيقي في المستوى زد. استجابة هذا النظام لوحدة التتابع في النطاق زد هي:

$$H_{-1}(z) = \frac{z}{Z-1}\frac{kz}{z-p} = \frac{K}{1-\mathrm{P}}\left(\frac{z}{Z-1} - \frac{Pz}{z-p}\right)$$

واستجابته في النطاق الزمني ستكون:

$$h_{-1}[n] = \frac{K}{1-\mathrm{P}}(1-P^{n+1})u[n]$$

لتبسيط هذه المعادلة وفصل تأثيراتها، سنفترض أن معامل التكبير الثابت K يساوي 1-p. وبالتالي يمكننا كتابة :

$$h_{-1}[n] = (1 - P^{n+1})u[n]$$

الاستجابة المدفوعة هي u[n] والاستجابة العابرة هي $-p^{n+1}u[n]$.

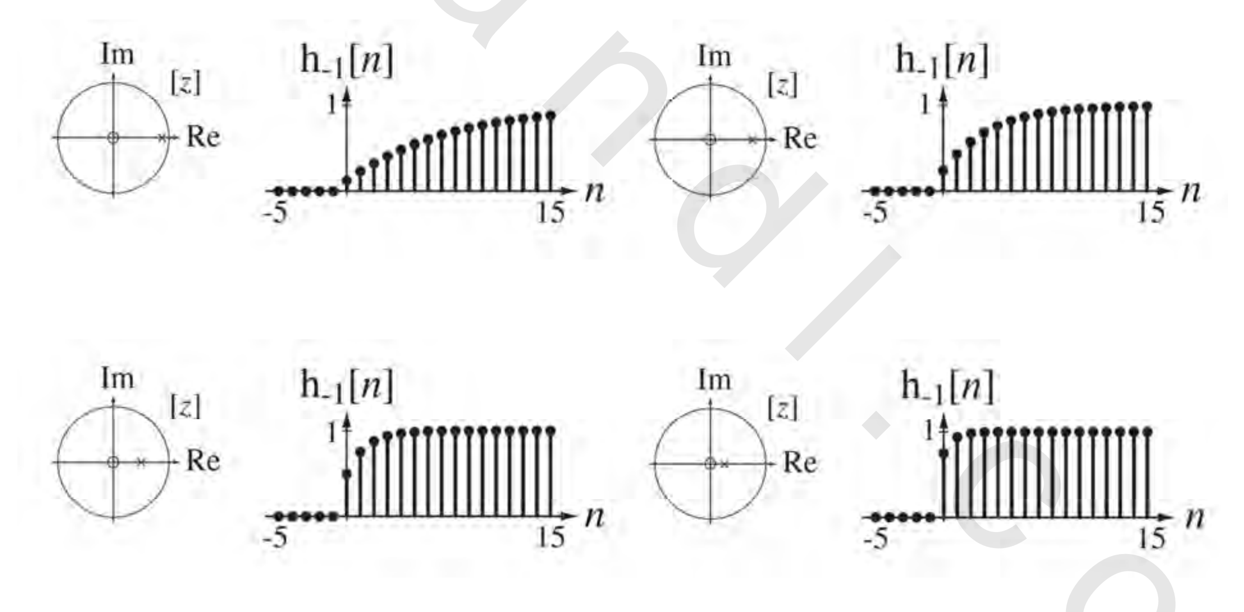
هذه هي الاستجابة المتقطعة زمنياً المقابلة لاستجابة وحدة الخطوة لنظام أحادي القطب في الزمن المستمر، ويتم تحديد سرعة الاستجابة عن طريق موضع القطب. عندما $0<p<1$، يكون النظام مستقراً وكلما كانت p أقرب من الواحد، كان النظام أبطأ كما في شكل (١٤.٨). عندما $p>1$ يكون النظام غير مستقر.

دالة عبور مثالية لنظام من الدرجة الثانية تكون على الصورة التالية :

$$H(z) = K\frac{z^2}{z^2 - 2r_0\cos(\Omega_0)z + r_0^2}$$

أقطاب H(z) تقع عند $p_{1,2} = r_0e^{\pm j\Omega_0}$. إذا كانت $r_0<1$، فإن كل من القطبين سيقع داخل دائرة الوحدة وسيكون النظام مستقراً. تحويل زد لاستجابة وحدة التتابع سيكون :

$$H_{-1}(z) = K\frac{z}{z-1}\frac{z^2}{z^2 - 2r_0\cos(\Omega_0)z + r_0^2}$$



شكل رقم (١٤.٨) استجابة نظام القطب الواحد لتتابع الوحدة مع تغيير موضع القطب

عندما $\Omega_0 \neq \pm m\pi$ حيث m رقم صحيح، فإن تحليل الكسور الجزيئية لـ $H_{-1}(z)/Kz$ سيكون :

$$\frac{H_{-1}(z)}{kz} = \frac{1}{1 - 2r_0\cos(\Omega_0)z + r_0^2}\left[\frac{z}{z-1} + \frac{\left(r_0^2 - 2r_0\cos(\Omega_0)\right)z + r_0^2}{z^2 - 2r_0\cos(\Omega_0)z + r_0^2}\right]$$

وبالتالي :

$$H_{-1}(z) = \frac{kz}{1-2r_0\cos(\Omega_0)z+r_0^2}\left[\frac{z}{z-1}+\frac{\left(r_0^2-2r_0\cos(\Omega_0)\right)z+r_0^2}{z^2-2r_0\cos(\Omega_0)z+r_0^2}\right]$$

أو :

$$H_{-1}(z) = H(1)\left[\frac{z}{z-1}+Z\frac{\left(r_0^2-2r_0\cos(\Omega_0)\right)z+r_0^2}{z^2-2r_0\cos(\Omega_0)z+r_0^2}\right]$$

وهذه يمكن كتابتها كما يلي :

$$\mathrm{H}_{-1}(\mathrm{z}) = \mathrm{H}(1)\left(\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-1}+\mathrm{r}_0\left\{[\mathrm{r}_0-2\cos(\Omega_0)]\frac{\mathrm{z}^2-2\mathrm{r}_0\cos(\Omega_0)\mathrm{z}}{\mathrm{z}^2-2\mathrm{r}_0\cos(\Omega_0)\mathrm{z}+\mathrm{r}_0^2}+\frac{1+[\mathrm{r}_0-2\cos(\Omega_0)]\cos(\Omega_0)}{\sin(\Omega_0)}\frac{\mathrm{z}\mathrm{r}_0\sin(\Omega_0)}{\mathrm{z}^2-2\mathrm{r}_0\cos(\Omega_0)\mathrm{z}+\mathrm{r}_0^2}\right\}\right)$$

وتحويل زد العكسي لها سيكون :

$$h_{-1}[n] = H(1)\left(1+r_0\left\{[r_0-2\cos(\Omega_0)]r_0^n\cos(n\Omega_0)+\frac{1+[r_0-2\cos(\Omega_0)]\cos(\Omega_0)}{\sin(\Omega_0)}r_0^n\sin(n\Omega_0)\right\}\right)u[n]$$

وهذا هو الحل العام لاستجابة وحدة التتابع لهذا النوع من أنظمة الدرجة الثانية. إذا افترضنا أن :

$$K = 1-2r_0\cos(\Omega_0)+r_0^2$$

بالتالي ، فإن النظام سيكون له معامل تكبير وحدة (H(1)=1).

مثال ١٤.٣

مخططات الأقطاب والأصفار واستجابة وحدة التتابع باستخدام تحويل زد

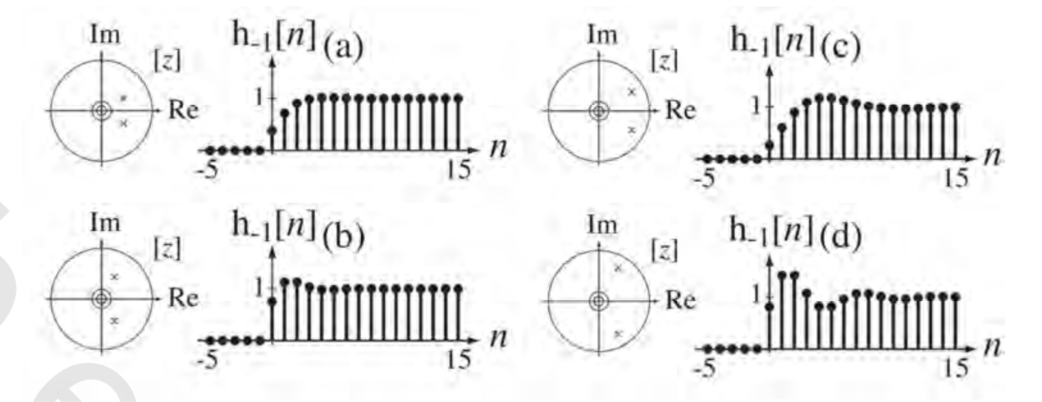
افترض نظاماً له دالة عبور على الصورة التالية :

$$H(z) = K\frac{z^2}{z^2-2r_0\cos(\Omega_0)z+r_0^2}\ \ with\ \ K = 1-2r_0\cos(\Omega_0)+r_0^2$$

ارسم مخططات الأصفار والأقطاب وارسم استجابة وحدة التتابع لهذا النظام في الحالات التالية :

(أ) $r_0 = 1/2,\ \Omega_0 = \pi/6,$ (ب) $r_0 = 1/2,\ \Omega_0 = \pi/3,$

(ت) $r_0 = 3/4,\ \Omega_0 = \pi/6,$ (ث) $r_0 = 3/4,\ \Omega_0 = \pi/3,$



شكل رقم (٩.١٤) يبين مخططات الأقطاب والأصفار واستجابة وحدة التتابع لقيم r0 و Ω0 السابقة.

مع زيادة r_0، فإن النظام يصبح تحت القمع، ويتردد لفترة زمنية أطول. مع زيادة Ω_0 تزداد سرعة الذبذبة. لذلك يمكننا أن نعمم ذلك بالقول إنه مع اقتراب الأقطاب من دائرة الوحدة، فإن ذلك يعطي استجابة تحت قمعية أكثر من الأقطاب التي تكون أبعد من (وبالتالي داخل) دائرة الوحدة. يمكننا القول أيضاً أن معدل الذبذبات في الاستجابة سيعتمد على زاوية هذه الأقطاب، حيث يكون هذا المعدل أكبر للزوايا الأكبر.

الاستجابة لدالة جيبية سببية

استجابة النظام لجيب تمام مقداره الوحدة والتردد الزاوي له هو Ω_0 يتم تطبيقه على النظام عند الزمن n=0 سيكون كما يلي:

$$Y(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)}\frac{z[Z-cos(\Omega_0)]}{z^2-2z\,cos(\Omega_0)+1}$$

أقطاب هذه الاستجابة هي أقطاب دالة العبور زائد جذور المعادلة: $z^2\text{-}2z\cos(\Omega_0)+1=0$ وهي أزواج مركبة مترافقة $p_1 = e^{j\Omega_0}$، و $p_1 = e^{-j\Omega_0}$. لذلك فإن $p_1 = p_2^*$، و $p_1+p_2=2\cos(\Omega_0)$، و $p_1-p_2=j2\sin(\Omega_0)$، و $p_1p_2=1$. بالتالي إذا كانت $\Omega_0 \neq m\pi$، حيث m رقم صحيح، وإذا لم يكن هناك تلاشٍ بين الأقطاب والأصفار، فإن هذه الأقطاب ستكون مختلفة أو مميزة ويمكن كتابة الاستجابة في صورة الكسور الجزيئية كالتالي:

$$Y(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)} + \frac{1}{P_1-P_2}\frac{H(P_1)(P_1-cos(\Omega_0))}{Z-P_1} + \frac{1}{P_2-P_1}\frac{H(P_2)(P_2-cos(\Omega_0))}{Z-P_2}$$

وبعد التبسيط يمكن كتابتها كما يلي:

$$Y(z) = z\left[\left\{\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} + \left[\frac{H_r(P_1)(z-\mathrm{p1r})-\mathrm{Hi(p1)p1i}}{z^2-z(\mathrm{2p1r})+1}\right]\right\}\right]$$

حيث $p_1=p_{1r}+jp_{1i}$ و $H(p_1)=H_r(p_1)+jH_i(p_1)$ ، وهذه يمكن كتابتها بدلالة المعاملات الأصلية كما يلي :

$$Y(z) = \left\{z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} + \left[Re\left(H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right)\frac{z^2-z\,cos(\Omega_0)}{z^2-z\,(2cos(\Omega_0))+1} - Im\left(H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right)\frac{zsin(\Omega_0)}{z^2-z\,(2cos(\Omega_0))+1}\right]\right\}$$

وتحويل زد العكسي لها سيكون :

$$y[n] = z^{-1}\left(\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}\right) + \left[Re\left(H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right)cos(\Omega_0 n) - Im\left(H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right)sin(\Omega_0 n)\right]u[n]$$

باستخدام المعادلة التالية :

$$Re(A)cos(\Omega_0 n) - Im(A)sin(\Omega_0 n) = |A|cos(\Omega_0 n + \measuredangle A)$$

يمكن إعادة كتابة الاستجابة كما يلي :

$$y[n] = z^{-1}\left(z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}\right) + \left|H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right|cos\left(\Omega_0 n + \measuredangle H\left(cos(\Omega_0)+jsin(\Omega_0)\right)\right)u[n]$$

أو :

$$y[n] = z^{-1}\left(z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}\right) +$$

$$y[n] = z^{-1}\left(z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}\right) + |H(p_1)|cos\left(\Omega_0 n + \measuredangle H(p_1)\right)u[n]. \qquad \text{المعادلة رقم (١٤.٢)}$$

إذا كان النظام مستقراً فإن المقدار :

$$z^{-1}\left(z\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)}\right)$$

سيتناقص مع الزمن (الاستجابة العابرة) حتى يصل إلى الصفر مع الزمن المتقطع ، وستكون الكمية :

$$|H(p_1)|cos\left(\Omega_0 n + \measuredangle H(p_1)\right)u[n]$$

التي تمثل الاستجابة المدفوعة تساوي دالة جيبية بعد الزمن المتقطع $n=0$ وتستمر إلى الما لانهاية.

مثال ١٤.٤

استجابة النظام لجيب التمام السببي باستخدام تحويل زد

النظام الموجود في مثال ١٤.٢ له دالة عبور كالتالي :

$$H(z) = \frac{100z}{z-1/2}$$

أوجد وارسم استجابة هذا النظام للدخل $x[n]=cos(\Omega_0 n)u[n]$ حيث $\Omega_0=\pi/4$.

هذه الاستجابة ستكون كما يلي في النطاق زد :

$$Y(z) = \frac{Kz}{z-p}\frac{z[z-cos(\Omega_0)]}{z^2-2zcos(\Omega_0)+1} = \frac{Kz}{z-p}\frac{z[z-cos(\Omega_0)]}{(z-e^{j\Omega_0})(z-e^{-j\Omega_0})}$$

حيث $K=100$ ، و $p=1/2$ ، و $\Omega_0=\pi/4$. يمكن كتابة هذه الاستجابة في صورة الكسور الجزيئية كما يلي :

$$Y(z) = kz\left[\underbrace{\frac{\frac{p[p-cos(\Omega_0)]}{(p-e^{j\Omega_0})(p-e^{-j\Omega_0})}}{z-p}}_{\text{الاستجابة العابرة}} + \underbrace{\frac{Az+B}{z^2-2zcos(\Omega_0)+1}}_{\text{الاستجابة المدفوعة}}\right]$$

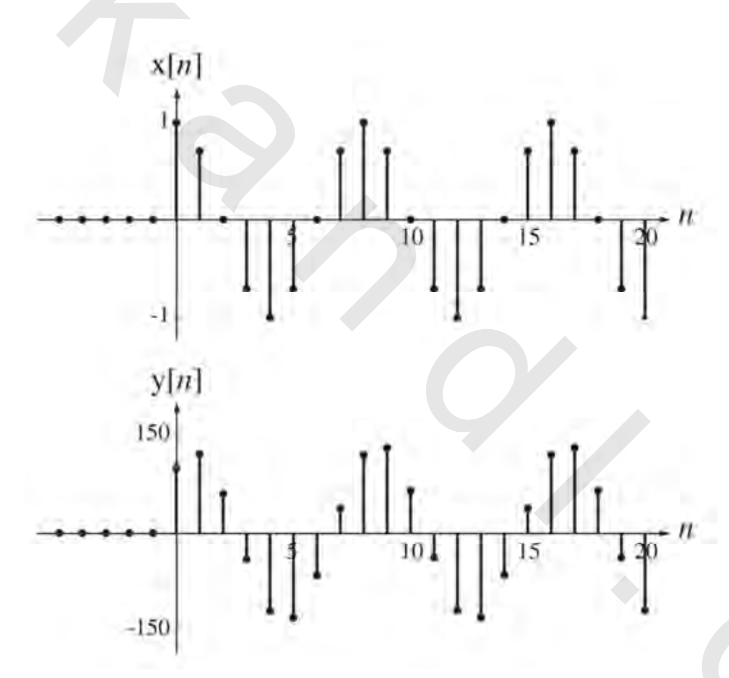
باستخدام المعادلة (١٤.٢):

$$y[n] = z^{-1}\left(100z\frac{\frac{(1/2)[1/2-\cos(\pi/4)]}{(1/2-e^{j\pi/4})(1/2-e^{-j\pi/4})}}{z-1/2}\right) + \left|\frac{100e^{j\pi/4}}{e^{j\pi/4}-1/2}\right| cos\left(\Omega_0 n + \measuredangle\frac{100e^{j\pi/4}}{e^{j\pi/4}-1/2}\right)u[n]$$

المعادلة رقم (١٤.٣)

$$y[n] = [-19.07(1/2)^n + 135.72cos(\pi\, n/4 - 0.5)]u[n]$$

أنظر شكل (١٤.١٠)



شكل رقم (١٤.١٠) دالة جيب تمام سببي واستجابة النظام لها

دعنا الآن نوجد استجابة النظام لدالة جيب تمام حقيقية يتم تطبيقها عند الزمن n→-∞ باستخدام الـ DTFT وذلك بغرض المقارنة. دالة العبور، معبرا عنها كدالة في التردد الزاوي Ω، باستخدام العلاقة $z=e^{j\Omega}$، يمكن وضعها على الصورة التالية:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{100e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/2}.$$

بإجراء DTFT لدالة الدخل x[n] :

$$X(e^{j\Omega}) = \pi[\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)].$$

وبالتالي ستكون الاستجابة كما يلي :

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi[\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)]\frac{100e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/2}.$$

أو :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/2}\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/2}\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)\right]$$

باستخدام خاصية التكافؤ للصدمة :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{j(\Omega_0+2\pi k)}}{e^{j(\Omega_0+2\pi k)}-1/2}\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \frac{e^{j(-\Omega_0+2\pi k)}}{e^{j(-\Omega_0+2\pi k)}-1/2}\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)\right]$$

حيث إن

$e^{j(\Omega_0+2\pi k)} = e^{j\Omega_0}$ و $e^{j(-\Omega_0+2\pi k)} = e^{-j\Omega_0}$ لقيم K الصحيحة يمكننا كتابة ما يلي :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{j\Omega_0}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)}{e^{j\Omega_0}-1/2} + \frac{e^{-j\Omega_0}\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k)}{e^{-j\Omega_0}-1/2}\right]$$

أو :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi\left[\frac{e^{j\Omega_0}\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)}{e^{j\Omega_0}-1/2} + \frac{e^{-j\Omega_0}\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)}{e^{-j\Omega_0}-1/2}\right]$$

بإيجاد المقام المشترك، وتطبيق قانون أويلر والتبسيط نحصل على :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{100\pi}{5/4-\cos(\Omega_0)}\left\{\begin{matrix}(1-(1/2)\cos(\Omega_0))[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)+\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)] \\ +(j/2)sin(\Omega_0)[\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)-\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)]\end{matrix}\right\}.$$

بإيجاد DTFT العكسي نحصل على :

$$Y[n] = \frac{50}{5/4-\cos(\Omega_0)}\{[1-(1/2)\cos(\Omega_0)]2\cos(\Omega_0 n) + \sin(\Omega_0)\sin(\Omega_0 n)\}.$$

أو كما يلي حيث إن $\Omega_0=\pi/4$:

$$Y[n] = 119.06\,cos(\pi n/4) + 65.113 sin(\pi n/4) = 135.72\,cos(\pi n/4 - 0.5).$$

وهو تماما ما حصلنا عليه مسبقا (فيما عدا لوحدة التتابع u[n]) بالنسبة للاستجابة المدفوعة في المعادلة (١٤.٣).

(١٤.٦) محاكاة الأنظمة المستمرة زمنياً باستخدام الأنظمة المتقطعة زمنياً

العلاقات بين تحويل زد وتحويل لابلاس

لقد استعرضنا في فصول سابقة علاقات مهمة بين طرق تحويل فورير. ولقد أوضحنا بالذات أن هناك تكافؤاً معلوماتياً بين الإشارة المتقطعة زمنياً $x[n]=x(nT_s)$ التي يتم تشكيلها عن طريق أخذ عينات من الإشارة المستمرة زمنياً، وإشارة صدمة مستمرة زمنياً $x_\delta(t)=x(t)\delta_{T_s}(t)$ المشكلة عن طريق أخذ عينات صدمية من الإشارة

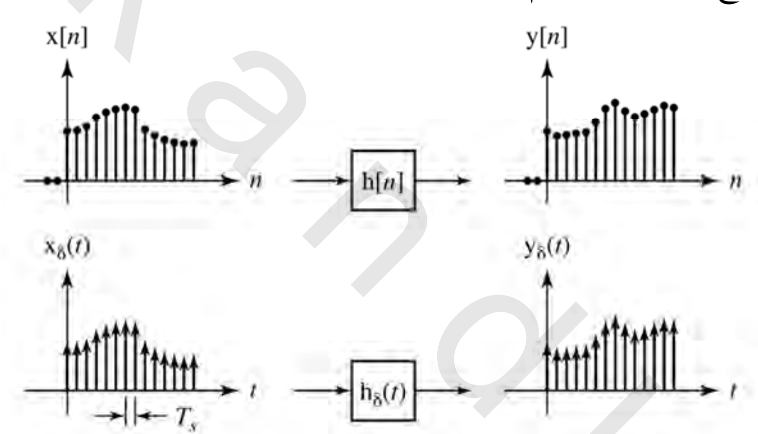
المستمرة زمنياً، حيث $f_s=1/T_s$. ولقد استنتجنا أيضاً العلاقة بين DTFT لـ x[n]، و CTFT لـ $x_\delta(t)$ في الفصل ١٠. حيث أن تحويل زد يتم تطبيقه على الإشارات المتقطعة زمنياً وأنه تعميم للـ DTFT، وأن تحويل لابلاس يتم تطبيقه على الإشارات المستمرة زمنياً وهو تعميم للـ CTFT فإنه يجب أن نتوقع علاقة وثيقة بينهما أيضاً.

افترض النظامين التاليين، نظام متقطع زمنياً له استجابة صدمة h[n]، ونظام مستمر زمنياً له استجابة صدمة $h_\delta(t)$ وسنفترض أنهما يرتبطان بالعلاقة التالية:

$$h_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\delta(t - nT_s). \quad \text{(١٤.٤)}$$

المعادلة رقم (١٤.٤)

هذا التكافؤ يوضح أن كل شيء يحدث لـ x[n] في النظام المتقطع زمنياً، يحدث بطريقة مناظرة لـ $x_\delta(t)$ في النظام المستمر زمنياً كما في شكل (١٤.١١). لذلك من الممكن أن نحلل الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام تحويل لابلاس باستخدام شدة الصدمات المستمرة زمنياً التي تمثل قيم الإشارات المتقطعة زمنياً عند نقاط متساوية التباعد في الزمن. ولكن من المريح رمزياً أن نستخدم تحويل زد بدلاً من ذلك.



شكل رقم (١٤.١١) التكافؤ بين الأنظمة المتقطعة زمنياً والمستمرة زمنياً.

دالة العبور للنظام المتقطع زمنياً تكون على الصورة:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

ودالة العبور للنظام المستمر زمنياً يمكن كتابتها على الصورة:

$$H_\delta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]e^{-nT_s s}.$$

إذا كانت استجابات الصدمة متكافئة بالمفهوم الموجود في المعادلة (١٤.٤)، بالتالي فإن دوال العبور يجب أن تكون متكافئة أيضاً. هذا التكافؤ يمكن رؤيته في العلاقة التالية:

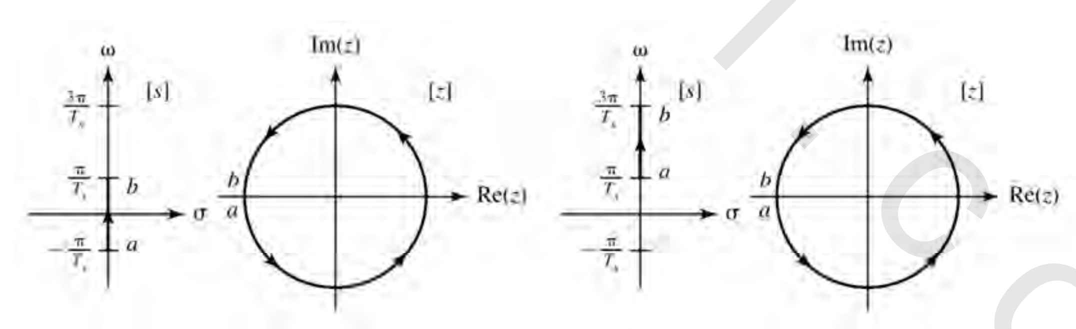
$$H_\delta(s) = H(z)|_{z \to e^{sT_s}}.$$

من المهم عند هذه النقطة أن نفترض بعض الآثار المترتبة على التحويل $z \to e^{sT_s}$. أحد الطرق لنرى العلاقة بين المستويين المركبين s و z هي أن ننقل محيطاً أو منطقة في المستوى s إلى محيط أو منطقة مقابلة في المستوى z.

سنفترض أولا محيطاً بسيطاً جداً في المستوى s، المحيط هو s=jω=j2πf حيث ω و f تمثل التردد الزاوي والتردد الدوري الحقيقي على التوالي. هذا المحيط هو المحور ω في المستوى s. المحيط المقابل في المستوى زد سيكون $e^{j\omega T_s}$ أو $e^{j2\pi f T_s}$، ولأي قيمة حقيقية لـ ω أو f، فإنها يجب أن تقع على دائرة الوحدة. على الرغم من ذلك فإن هذا النقل ليس بالبساطة التي تم بها التعبير عنه في العبارة السابقة.

لكي نوضح تعقيدات هذه العملية، سننقل المقطع π/Ts<ω<π/Ts– المساوي للمقطع $-f_s/2<f<f_s/2$ إلى ما يقابله في المستوى z. مع عبور ω لهذا المقطع من π/Ts→ ω →π/Ts–، فإن ال z ستقطع دائرة الوحدة من $e^{-j\pi}$ حتى $e^{+j\pi}$ في اتجاه عكس عقارب الساعة، حيث سيقطع دورة كاملة من دائرة الوحدة. الآن إذا افترضنا أن ω ستقطع المنطقة التالية π/Ts→ω→3π/Ts، فإن z ستقطع دائرة الوحدة من $e^{j\pi}$ حتى $e^{+j3\pi}$، وهي نفسها المحيط السابق نفسه لدائرة الوحدة؛ لأن $e^{-j\pi}=e^{j\pi}=e^{j3\pi}=e^{j(2n+1)\pi}$ حيث n أي رقم صحيح. لذلك فإنه من الواضح أن التحويل $z\to e^{sT_s}$، ينقل المحور w في المستوى s إلى دائرة الوحدة في المستوى z، العديد من المرات إلى المالانهاية كما هو موضح في شكل (١٤.١٢).

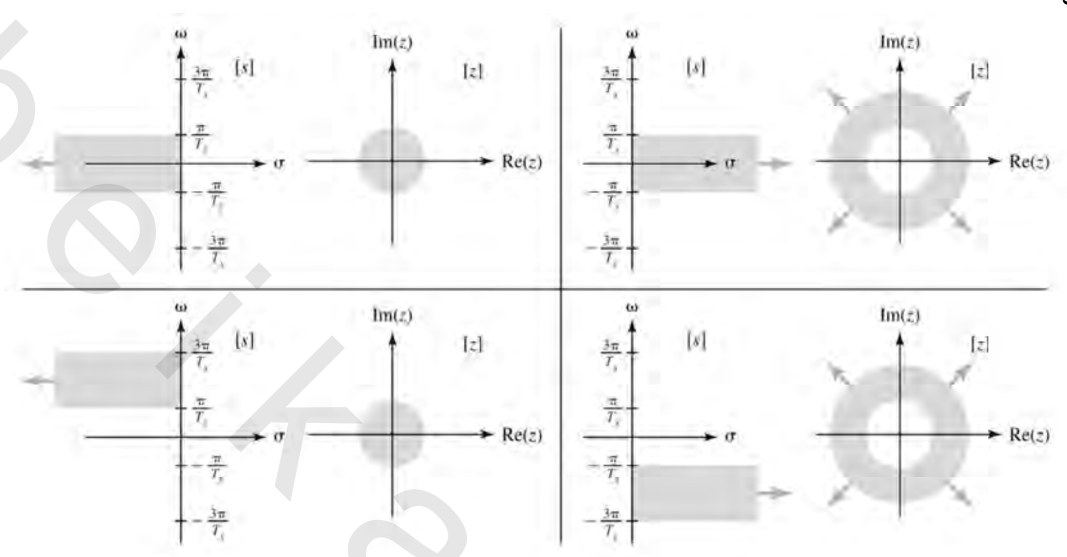
هذه طريقة أخرى للنظر إلى ظاهرة الاستعارة أو الخلط الترددي. كل هذه المقاطع من المحور التخيلي للمستوى s التي يبلغ طول كل منها 2π/Ts تظهر هي نفسها تماماً عند نقلها إلى المستوى z نتيجة تأثيرات أخذ العينات. لذلك، فإنه لكل نقطة على المحور التخيلي في المستوى s هناك نقطة وحيدة وفريدة على دائرة الوحدة في المستوى z. ولكن هذا التقابل الفريد ليس مطبقاً بالطريقة العكسية، حيث إنه لكل نقطة على دائرة الوحدة في المستوى z فإن هناك مالانهاية من النقط المقابلة على المحور التخيلي في المستوى s.



شكل رقم (١٤.١٢) نقل المحور ω في المستوى s إلى دائرة الوحدة في المستوى z.

بأخذ خطوة أخرى في مفهوم النقل، فإن النصف الأيسر من المستوى s سينتقل إلى داخل دائرة الوحدة في المستوى z، والنصف الأيمن من المستوى s سينتقل إلى ما هو خارج دائرة الوحدة في المستوى z (عدد لا نهائي من المرات في كل حالة). الأفكار المقابلة عن استقرار الأنظمة ومواضع الأقطاب والأصفار ستنتقل ب الطريقة نفسها.

أي نظام مستمر زمنياً ومستقر تكون له دالة عبور كل أقطابها في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s، وأي نظام متقطع زمنياً ومستقر تكون له دالة عبور تقع كل أقطابها في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z كما هو مبين في شكل (١٤.٣١).



شكل رقم (١٤.١٣) نقل مناطق في المستوى s إلى مناطق في المستوى z.

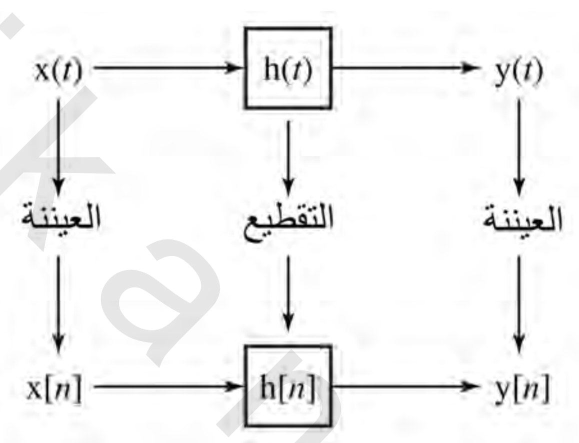
الثبات الصدمي

لقد فحصنا في الفصل ١٠ كيف يتم تحويل الإشارات المستمرة زمنياً إلى إشارات متقطعة زمنياً عن طريق أخذ العينات. ولقد وجدنا، أنه تحت شروط معينة، كانت الإشارة المتقطعة زمنياً هي تمثيل جيد للإشارة المستمرة زمنياً بمفهوم أنها تحتفظ عملياً بكل معلوماتها. الإشارة المتقطعة زمنياً المشكلة عن طريق أخذ عينات مناسبة من الإشارة المستمرة زمنياً تحاكي بمفهوم معين الإشارة المستمرة زمنياً. لقد شرحنا في هذا الفصل التكافؤ بين الأنظمة المتقطعة زمنياً التي لها استجابة صدمة h[n] والأنظمة المستمرة زمنياً التي لها استجابة صدمة كالتالي:

$$h_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\delta(t - nT_s).$$

النظام الذي استجابة الصدمة له تساوي $h_\delta(t)$ يعتبر نوعاً خاصاً من الأنظمة لأن استجابة صدمته تتكون من صدمات فقط. عملياً، ليس من الممكن تحقيق ذلك؛ لأن دالة العبور لمثل هذه الأنظمة، لكونها دورية، تكون لها استجابة غير مساوية للصفر عند الترددات التي تقترب من الما لانهاية. لا يوجد نظام مستمر زمنياً حقيقياً يمكنه أن تكون له استجابة صدمة تحتوي صدمات حقيقية، على الرغم من أن ذلك من الممكن أن يكون تقريباً جيداً لأغراض التحليل.

لكي نحاكي الأنظمة المستمرة زمنياً باستخدام الأنظمة المتقطعة زمنياً يجب علينا أولاً أن نصل إلى مشكلة التكافؤ المفيد بين النظام المتقطع زمنياً، الذي يجب أن تكون استجابته الصدمية متقطعة، والنظام المستمر زمنياً، الذي يجب أن تكون استجابته الصدمية مستمرة. التكافؤ الأكثر مباشرة ووضوح بين الإشارة المتقطعة زمنياً والإشارة المستمرة زمنياً هي أن يكون لدينا قيم الإشارة المستمرة زمنياً عند لحظات أخذ العينات تساوي تماماً أو تكون قيم الإشارة المتقطعة زمنياً عند الأزمنة المتقطعة المقابلة x[n]=x(nTs). لذلك إذا كانت الإثارة لنظام متقطع زمنياً نسخة معينة لإثارة النظام المستمر زمنياً، فإن استجابة النظام المتقطع زمنياً يجب أن تكون نسخة معيننة لاستجابة النظام المستمر زمنياً كما في شكل (١٤.١٤).



شكل رقم (١٤.١٤) عينة الإشارات وتقطيع الأنظمة.

الاختيار الأكثر طبيعية لـ h[n] من الممكن أن يكون h[n]=h(nTs). حيث إن h[n] ليست إشارة تحدث حقيقيا في هذا النظام، ولكنها بدلاً من ذلك دالة تصف النظام، فإننا لا نستطيع أن نقول بدقة إن شكل (١٤.١٤) يبين عملية أخذ العينات. إننا لا نأخذ عينات من إشارة، ولكن بدلاً من ذلك، فإننا نقوم بتقطيع النظام. اختيار استجابة الصدمة للنظام المتقطع زمنياً h[n]=h(nTs) يحقق نوعاً من التكافؤ بين استجابات الصدمة للنظامين. بهذا الاختيار لاستجابة الصدمة، إذا تمت إثارة نظام مستمر زمنياً بوحدة صدمة مستمرة زمنياً، وإثارة نظام متقطع زمنياً بوحدة صدمة متقطعة زمنياً لها الشدة نفسها ، فإن الاستجابة y[n] ستكون نسخة معيننة للاستجابة y(t) وأن y[n]=y(nTs). ولكن على الرغم من أن النظامين سيكون لهما استجابات صدمة متكافئة بمفهوم أن h[n]=h(nTs)، و y[n]=y(nTs)، فإن ذلك لا يعني أن استجابات النظام للإثارات الأخرى ستكون متكافئة بالمفهوم نفسه. تصميم النظام الذي يكون له h[n]=h(nTs) يسمى تصميماً الصدمة نتيجة تكافؤ استجابات النظام مع وحدات الصدمات.

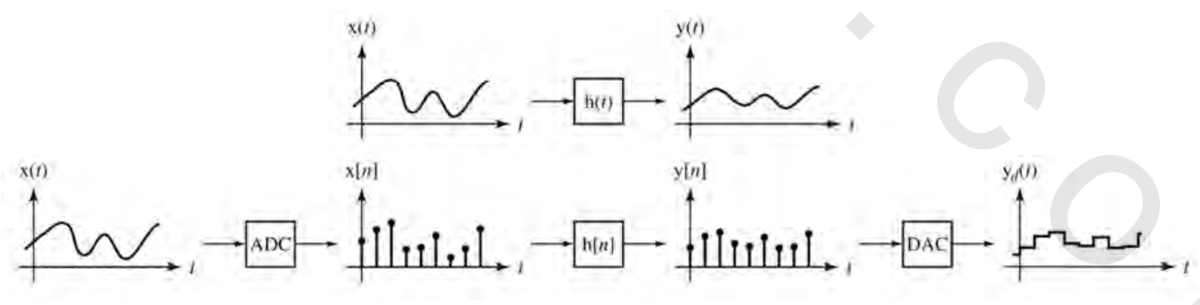
من المهم أن نشير هنا أننا إذا اخترنا أن نجعل h[n]=h(nTs)، وقمنا بإثارة النظامين بوحدات الصدمات، فإن الاستجابات ستكون بينها العلاقة التالية y[n]=y(nTs)، ولكننا لا نستطيع القول بأن x[n]=x(nTs) كما في شكل

(١٤.١٤). شكل (١٤.١٤) يبين أن الإشارة المتقطعة زمنياً يتم تشكيلها عن طريق أخذ عينات من الإثارة المستمرة زمنياً، ولكن إذا كانت الإثارة المستمرة زمنياً هي صدمة، فإننا لن نستطيع عينتها. حاول أن تتخيل أخذ عينات من صدمة مستمرة زمنياً. أولا، إذا كنا نأخذ العينات عند نقاط زمنية بمعدل محدد لمحاولة "مسك"، أو أخذ العينة عند حدوث الصدمة، فإن احتمال أن نرى الصدمة الحقيقية في العينات الناتجة ستكون صفراً لأن الصدمة الحقيقية لها عرض زمني يساوي صفراً. حتى إذا استطعنا أن نأخذ العينة عند حدوث الصدمة تماماً فإننا نستطيع القول أن δ[n]=δ(nTs)، ولكن ذلك لا يكون معقولا لأن مقدار الصدمة المستمرة زمنياً عند لحظة حدوثها لا يكون محدداً (لأنها ليست دالة عادية)، وعلى ذلك، فإننا لن نستطيع تحقيق الشدة المقابلة للصدمة المتقطعة زمنياً δ[n].

أنظمة البيانات المعينة

نتيجة الزيادات الهائلة في سرعات المعالجات والذاكرة والانخفاض الهائل أيضاً في تكلفة هذه المعالجات، فإن تصميم الأنظمة الحديثة يستخدم عادة أنظمة جانبية متقطعة زمنياً لتحل محل الأنظمة الفرعية التي تستخدم عادة مع الأنظمة الفرعية المستمرة زمنياً لتوفير التكلفة والفراغ والطاقة المستخدمة ولزيادة مرونة واعتمادية النظام. بعض الأمثلة على ذلك القيادة الآلية للطائرات، والتحكم في العمليات الصناعية والكيميائية، والعمليات الصناعية، وتشغيل السيارة ونظام الوقود فيها. الأنظمة التي تحتوي على أنظمة فرعية متقطعة زمنياً، وأنظمة فرعية مستمرة زمنياً والآليات للتحويل بين إشارات هذه الأنظمة الفرعية تسمى أنظمة البيانات المعينة.

أول نوع من أنظمة البيانات المعينة المستخدم ليحل محل الأنظمة المستمرة زمنياً، وما زال هو النوع السائد أو المنتشر، يأتي من فكرة طبيعية. إننا نقوم بتحويل الإشارات المستمرة زمنياً إلى إشارات متقطعة زمنياً باستخدام المحول التماثلي الرقمي analog to digital converter, ADC، ثم نقوم بمعالجة العينات الخارجة من ADC في الأنظمة المتقطعة زمنياً. بعد ذلك نقوم بتحويل الاستجابة المتقطعة زمنياً إلى استجابة مستمرة زمنياً مرة أخرى باستخدام المحول الرقمي التماثلي digital to analog converter DAC كما في شكل (١٤.١٥).



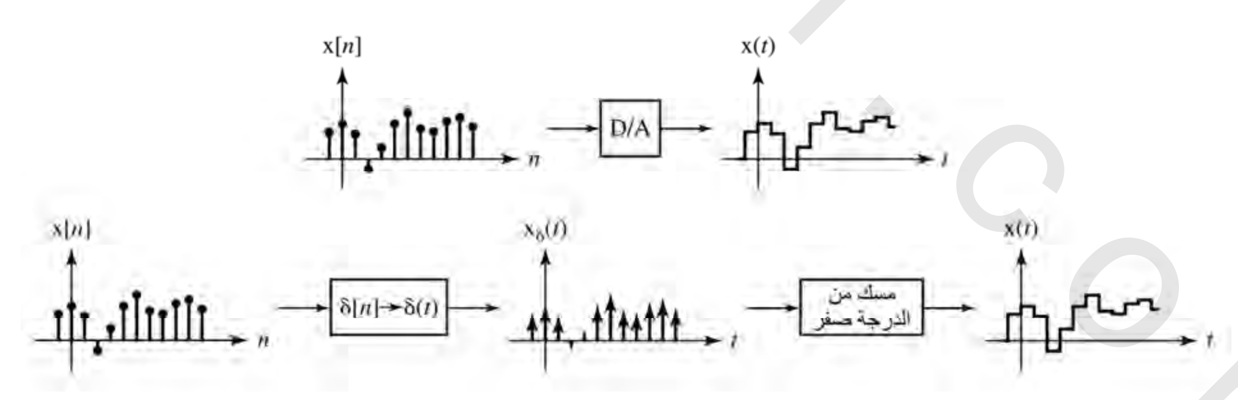
شكل رقم (١٤.١٥) نوع شائع من محاكاة البيانات المعينة للأنظمة المستمرة زمنياً

من الممكن أن يكون من متطلبات التصميم أن تكون استجابة النظام المعينن أقرب ما يكون للاستجابة المستمرة زمنياً المطلوبة. لكي يتم ذلك يجب علينا اختيار h[n] بطريقة مناسبة وجيدة، ولكي يتم هذا الاختيار لـ h[n] يجب علينا أيضاً أن نفهم التعامل مع كل من ADC و DAC.

من السهل جداً أن نمثل أو نضع نموذجاً للـ ADC. إنه يقرأ أو يكتسب قيمة إشارة الدخل عند لحظة أخذ العينة ويعطي أو يستجيب برقم يتناسب مع هذه القيمة. (إنه يقوم بتكميم الإشارة الداخلة، ولكننا سنهمل هذا التأثير في هذا التحليل). النظام الفرعي الذي له استجابة صدمة h[n] يتم تصميمه لجعل نظام البيانات المعيننة يحاكي تأثير النظام المستمر زمنياً الذي له استجابة صدمة h(t).

تأثير DAC يكون أكثر تعقيدا في النمذجة الرياضية عن ADC، حيث تتم إثارة DAC برقم قادم من النظام الفرعي المتقطع زمنياً، وهذ الرقم يمثل شدة الصدمة، وعليه أن يستجيب بإشارة مستمرة زمنياً تتناسب مع هذا الرقم، وتظل هذه الإشارة ثابتة حتى يتغير الرقم الداخل إلى قيمة جديدة. يمكن نمذجة ذلك عن طريق التفكير هذه العملية على خطوتين. أولا نفترض أن الصدمة المتقطعة زمنياً يتم تحويلها إلى صدمة مستمرة زمنياً ب الشدة نفسها. بعد ذلك ندع الصدمة المستمرة زمنياً أن تقوم بإثارة دائرة مسك من الدرجة صفر (تم تقديمها في الفصل ١٠) يكون لها استجابة صدمة مستطيلة ارتفاعها يساوي واحداً وعرضها الزمني Ts يبدأ عند الزمن t=0 كما يلي وكما هو موضح في شكل (١٤.١٦).

$$h_{zoh}(t) = \begin{Bmatrix} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & t > T_s \end{Bmatrix} = rect\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right).$$

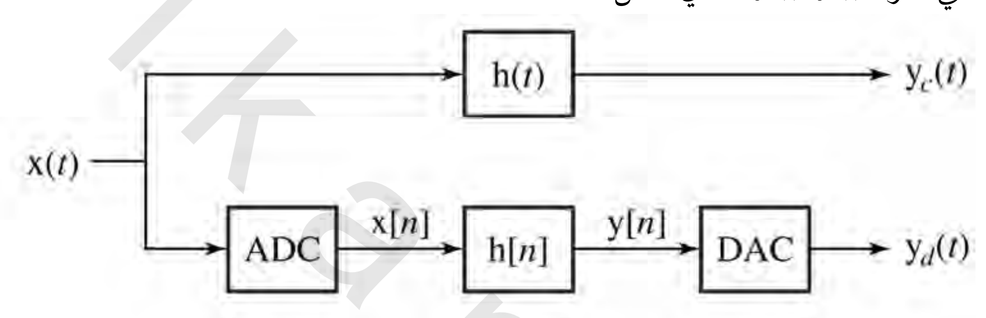


شكل رقم (١٤.١٦) التكافؤ بين تحويل DAC وتحويل النبضة المتقطعة زمنياً إلى نبضة مستمرة زمنياً المتبوع بدائرة مسك من الدرجة صفر

دالة العبور لدائرة المسك من الدرجة صفر هي تحويل لابلاس لاستجابة صدمتها $h_{zoh}(t)$ التي تكون على الصورة:

$$H_{zoh}(S) = \int_{0^-}^{\infty} h_{zoh}(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{T_s} e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-S}\right]_{0^-}^{T_s} = \frac{1-e^{-stT_s}}{S}.$$

الخطوة التصميمية التالية هي أن نجعل h[n] تحاكي تأثير الـ h(t) بمفهوم أن الاستجابات الكلية للأنظمة تكون أقرب ما يكون من بعضها بعضا. النظام المستمر زمنياً تتم إثارته بالإشارة x(t) ويعطي الاستجابة $y_c(t)$. المطلوب هنا هو تصميم نظام بيانات معينة بحيث إذا قمنا بتحويل x(t) إلى إشارة متقطعة زمنياً x[n]=x(nTs) باستخدام ADC، ثم يقوم النظام بمعالجة هذه الإشارة ليعطي الاستجابة y[n]، بعد ذلك يتم تحويل هذه الاستجابة $y_d(t)$ باستخدام DAC، وبالتالي تكون $y_d(t)=y_c(t)$ كما في شكل (١٤.١٧).



شكل رقم (١٤.١٧) التكافؤ بين الأنظمة المستمرة زمنياً وأنظمة البيانات المعيننة

لا يمكن تحقيق ذلك بصورة دقيقة (إلا في الحدود النظرية التي يكون فيها معدل أخذ العينات من الممكن أن يقترب من المالانهاية). ولكن من الممكن وضع شروط يكون معها من الممكن عمل تقريب جيد للنظام، يتحسن مع زيادة معدل أخذ العينات.

كخطوة في اتجاه تحديد الاستجابة الصدمية h[n] للنظام الفرعي، سنفترض أولاً أن استجابة النظام المستمر زمنياً، ليس للإشارة x(t)، ولكن بدلاً من ذلك ستكون للإشارة $x_\delta(t)$ المحددة كما يلي:

$$X_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t-nT_s) = X(t)\delta_{T_s}(t).$$

الاستجابة لهذه الإثارة ستكون كما يلي:

$$y(t) = h(t) * X_\delta(t) = h(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t-mT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h(t-mT_s)$$

حيث x[n] هي النسخة المعيننة من x(t). الاستجابة عند المضاعف رقم n من الزمن Ts ستكون:

$$y(nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h((n-m)T_s). \quad \text{المعادلة رقم (١٤.٥)}$$

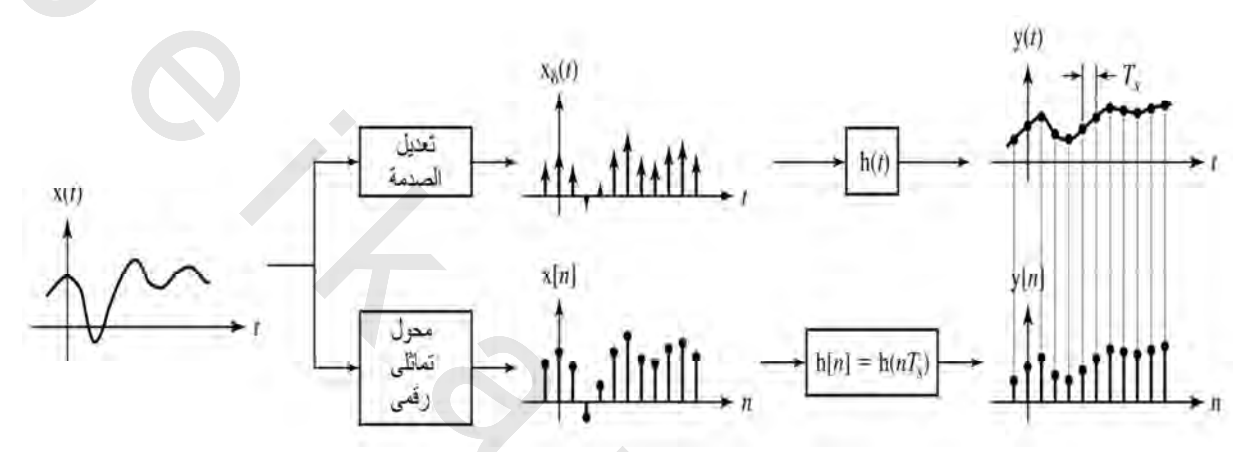
قارن ذلك مع استجابة النظام المتقطع زمنياً مع استجابة الصدمة h[n]=h(nTs) للإثارة x[n]=x(nTs) التي تساوي:

$$y[n] = X[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h[n-m]. \quad \text{المعادلة رقم (١٤.٦)}$$

بمقارنة المعادلة (١٤.٥) والمعادلة (١٤.٦) يكون من الواضح أن الاستجابة y(t) لنظام مستمر زمنياً له الاستجابة الصدمية h(t) عند لحظة أخذ العينة nTs لإشارة مستمرة زمنياً معيننة صدميا كالتالي :

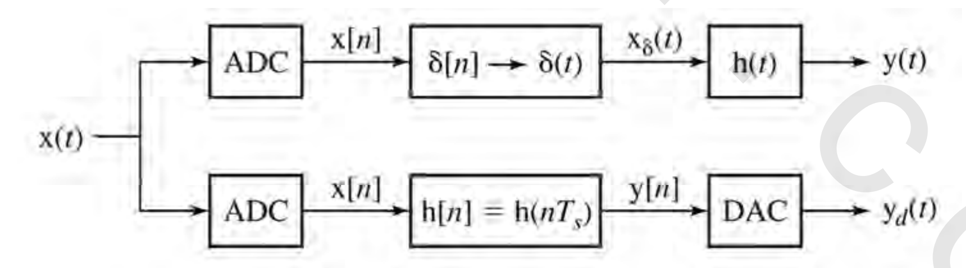
$$X_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t-nT_s).$$

يمكن إيجادها عن طريق إيجاد استجابة النظام الذي له استجابة صدمة تساوي h[n]=h(nTs) للإشارة x[n]=x(nTs) ، ثم نقوم بعمل التكافؤ y(nTs)=y[n] كما في شكل (١٤.١٨).



شكل رقم (١٤.١٨) التكافؤ عند الأزمنة nTs والأزمنة المتقطعة زمنياً المقابلة n لاستجابة نظام مستمر زمنياً وآخر متقطع زمنياً تمت إثارتهما عن طريق إشارات مستمرة زمنياً ومتقطعة زمنياً مستنتجة من الإشارة المستمرة نفس زمنياً.

الآن، بالعودة إلى النظام المستمر زمنياً ونظام البيانات المعيننة، سنعدل النظام المستمر زمنياً كما هو موضح في شكل (١٤.١٩).باستخدام التكافؤ الموجود في شكل (١٤.١٨) سنجد أن y[n]=y(nTs).

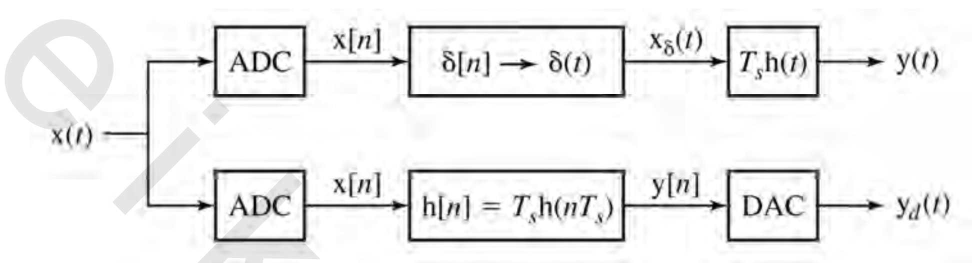


شكل رقم (١٤.١٩) الأنظمة المستمرة زمنياً وأنظمة البيانات المعيننة عند إثارة النظام المستمر زمنياً بالإشارة xδ(t) بدلاً من x(t)

الآن سنغير استجابة الصدمة للنظام المستمر زمنياً والنظام المتقطع زمنياً عن طريق ضرب كل منهما في الزمن بين العينات Ts كما في شكل (١٤.٢٠). في هذا النظام المعدل مازلنا نستطيع القول بأن y[n]=y(nTs)، حيث الآن:

المعادلة رقم (١٤.٧) $y(t) = X_\delta(t) * T_s h(t) = [\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t - nT_s)] * h(t)T_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)h(t - nT_s)T_s,$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]T_s h\big((n-m)T_s\big)$$



شكل رقم (١٤.٢٠) الأنظمة المستمرة زمنياً وأنظمة البيانات المعينة عند ضرب استجابات الصدمة لهما في الزمن بين العينات

استجابة الصدمة الجديدة للنظام الفرعي ستكون h[n]=Tsh(nTs) وما زالت h(t) تمثل استجابة الصدمة للنظام الأصلي المستمر زمنياً. الآن في المعادلة (١٤.٧) دع Ts تقترب من الصفر. عند هذا الحد، سيصبح المجموع في الجانب الأيمن هو الالتفاف التكاملي الذي تم استنتاجه في معرض استنتاج الالتفاف في الفصل ٥،

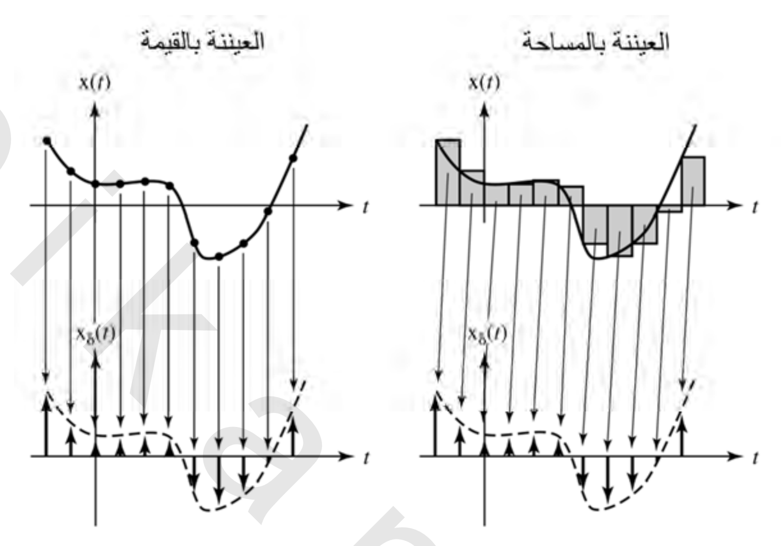
$$\lim_{T_s \to 0} y(t) = \lim_{T_s \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)h(t - nT_s)T_s = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

وهي الإشارة $y_c(t)$، التي تمثل استجابة النظام الأصلي المستمر زمنياً في شكل (١٤.١٧) للإشارة x(t). أيضاً، عند هذا الحد الزمني تكون $y[n]=y_c(nTs)$. لذلك، ففي النهاية فإن التباعد بين النقاط Ts يقترب من الصفر، ولحظات أخذ العينات ستتقارب بحيث تصبح زمنا مستمراً وسيكون هناك تقابل من النوع واحد لواحد بين قيم الإشارة y[n] وقيم الإشارة عند $y_c(t)$. استجابة نظام البيانات المعينة $y_d(t)$ سيكون موافق تماماً ولا يمكن تفريقه من الاستجابة $y_c(t)$، للنظام الأصلي للإشارة x(t). بالطبع، فإنه عملياً لا يمكن أن يكون معدل أخذ العينات يساوي مالانهاية، لذلك فإن المقابلة $y[n]=y_c(nTs)$ لا يمكن أن تكون تساوي تام، ولكنها تحقق تكافؤاً تقريبياً بين النظام المستمر زمنياً ونظام البيانات المعيننة.

هناك طريق آخر مفهومي للوصول إلى الخلاصة نفسها لاستجابة الصدمة للنظام المتقطع زمنياً h[n]=Tsh(nTs). في الاستنتاجات السابقة قمنا بتشكيل إشارة صدمة مستمرة زمنياً:

$$X_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

التي لها شدة صدمة تساوي عينات الإشارة x(t). الآن، بدلا من ذلك، نكون نسخة معدلة من إشارة الصدمة. افترض التقابل الجديد بين x(t) و $x_\delta(t)$ سيكون هو التقابل بين شدة الصدمة عند nTs تساوي تقريباً المساحة تحت x(t) في فترة أخذ العينات nTs≤t<(n+1)Ts وليست القيمة عند nTs. التكافؤ بين x(t) و $x_\delta(t)$ يعتمد الآن (تقريباً) على المساحات، كما في شكل (١٤.٢١). (هذا التقريب أفضل مع زيادة معدل أخذ العينات).



شكل رقم (١٤.٢١) مقارنة بين العينة بالقيمة والعينة بالمساحة

المساحة تحت x(t) تساوي تقريباً Ts(nTs) في كل فترة عينة. لذلك فإن إشارة الصدمة المستمرة زمنياً الجديدة ستكون:

$$X_\delta(t) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t - nT_s).$$

إذا طبقنا الآن هذه الإشارة على نظام تكون استجابة الصدمة له هي h(t) فإننا سنحصل تماماً على الاستجابة نفسها كما في المعادلة (١٤.٧):

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)h(t - nT_s)T_s.$$

وبالطبع النتيجة نفسها بأن $y[n]=y_c(nTs)$ مع اقتراب معدل أخذ العينات من النهاية. كل ما عملناه في هذا الاستنتاج هو مصاحبة المعامل Ts مع الإثارة بدلا من أن تكون مع استجابة الصدمة. عندما نقوم بعمل التفاف للاثنين فإننا نحصل على النتيجة نفسها. إذا قمنا بأخذ عينات الإشارات بوضع شدة الصدمة تساوي مساحة الإشارة في فترة أخذ العينة، بدلاً من وضعها تساوي قيم الإشارة عند لحظة أخذ العينات، بالتالي فإن المقابلة h[n]=h(nTs) من الممكن أن تكون مقابلة تصميم بين نظام مستمر زمنياً ونظام بيانات معينة يحاكيه. ولكن، حيث أننا لا نأخذ العينات بهذا الشكل، (لأن معظم الـ ADC's لا تعمل بهذه الطريقة)، فإننا بدلاً من ذلك نصاحب المعامل Ts مع استجابة الصدمة ونشكل المقابلة h[n]=Tsh(nTs).

مثال ١٤.٥

تصميم نظام بيانات معينة لمحاكاة نظام مستمر زمنياً

نظام مستمر زمنياً يمكن وصفه بدالة عبور كالتالية :

$$H_c(s) = \frac{1}{s^2+40s+300}.$$

صمم نظام بيانات معينة على الصورة الموضحة في شكل (١٤.١٥) لمحاكاة هذا النظام. نفذ هذا التصميم لمعدلين لأخذ العينات f_s=10 و f_s=100 وقارن بين استجابات الخطوة.

استجابة الصدمة للنظام المستمر زمنياً هي :

$$h_c(t) = (1/20)(e^{-10t} - e^{-30t})u(t).$$

بالتالي ستكون استجابة الصدمة للنظام الفرعي المتقطع زمنياً هي :

$$h_d[n] = (T_s/20)(e^{-10nT_s} - e^{-30nT_s})u[n].$$

ودالة العبور المقابلة في النطاق z ستكون :

$$H_d(z) = \frac{T_s}{20}\left(\frac{z}{z-e^{-10T_s}} - \frac{z}{z-e^{-30T_s}}\right).$$

استجابة الخطوة للنظام المستمر زمنياً ستكون :

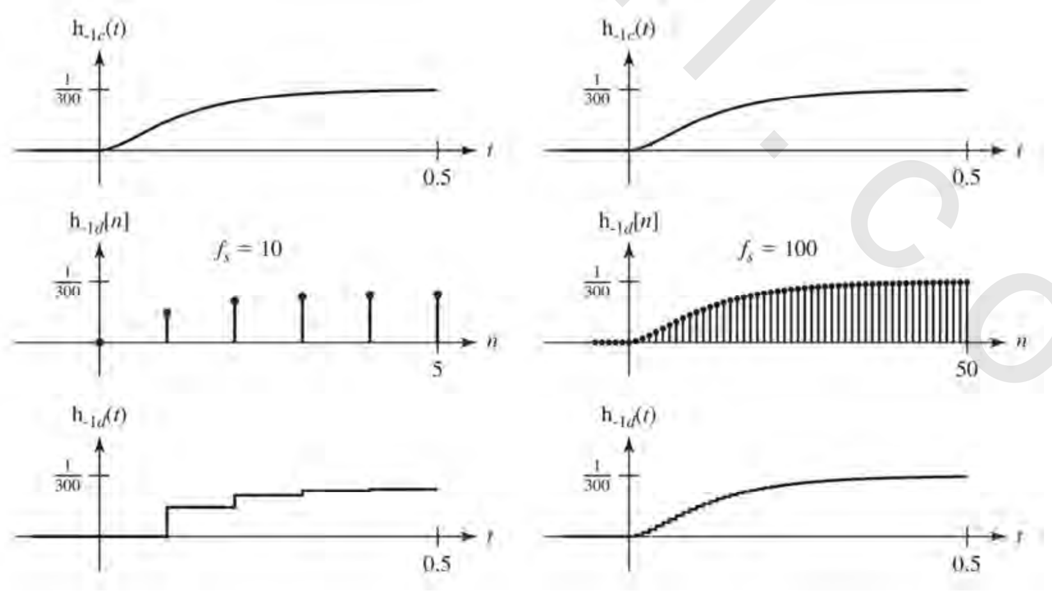
$$h_{-1c}(t) = \frac{2-3e^{-10t}+e^{-30t}}{600}u(t).$$

استجابة النظام الفرعي لوحدة التتابع ستكون :

$$h_{-1d}[n] = \frac{T_s}{20}\left[\frac{e^{-10T_s}-e^{-30T_s}}{(1-e^{-10T_s})(1-e^{-30T_s})} + \frac{e^{-10T_s}}{e^{-10T_s}-1}e^{-10nT_s} - \frac{e^{-30T_s}}{e^{-30T_s}-1}e^{-30nT_s}\right]u[n].$$

وستكون استجابة DAC كما يلي وكما هو موضح في شكل (١٤.٢٢).

$$h_{-1d}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]rect\left(\frac{t-T_s(n+1/2)}{T_s}\right)$$



شكل رقم (١٤.٢٢) مقارنة لاستجابات الخطوة لنظام مستمر زمنياً واثنين من أنظمة البيانات المعينة التي تحاكي معدلات عينة مختلفة.

عند معدلات أخذ العينات المنخفضة نلاحظ أن جودة المحاكاة لنظام البيانات المعيننة سيئة جداً. إنها تقترب من قيمة للاستجابة المدفوعة حوالي 78% من الاستجابة المدفوعة للنظام المستمر زمنياً. عند معدل أخذ العينات الأعلى تكون المحاكاة أفضل كثيراً حيث تكون الاستجابة المدفوعة حوالى 99% من الاستجابة المدفوعة للنظام المستمر زمنياً. أيضاً عند المعدلات العالية لأخذ العينات، يكون الفرق بين استجابة النظام المستمر زمنياً واستجابة نظام البيانات المعيننة أقل كثيراً منه مع معدلات أخذ العينات المنخفضة.

يمكننا أن نرى التفاوت بين القيم المدفوعة بفحص المعادلة:

$$y[n] = \frac{T_s}{20}\left[\frac{e^{-10T_s}-e^{-30T_s}}{(1-e^{-10T_s})(1-e^{-30T_s})} + \frac{e^{-10T_s}}{e^{-10T_s}-1}e^{-10nT_s} - \frac{e^{-30T_s}}{e^{-30T_s}-1}e^{-30nT_s}\right]u[n].$$

الاستجابة المدفوعة تساوي:

$$y_{forced} = \frac{T_s}{20}\frac{e^{-10T_s}-e^{-30T_s}}{(1-e^{-10T_s})(1-e^{-30T_s})}.$$

إذا قربنا الدالة الأسية بأول مركبتين فيها في التحليل التتابعي لها كما يلي $e^{-10T_s} \approx 1 - 10T_s$ و $e^{-30T_s} \approx 1 - 30T_s$ فإننا سنحصل على $y_{forced}=1/300$ ، وهي الاستجابة المدفوعة الصحيحة. أما إذا كانت Ts ليست صغيرة بما فيه الكفاية، فإن تقريب الدالة الأسية في تحليلها التتابعي لن يكون جيداً وسيكون هناك فرق بين القيم المدفوعة الحقيقية والمثالية. عندما $f_s=10$ سنحصل على $e^{-10T_s} = 0.368$، و 1-10Ts=0، و $e^{-30T_s} = 0.0498$، و 1-30Ts=-2، وهذا يعتبر تقريباً مزعجاً. ولكن عندما $f_s=100$ نحصل على $e^{-100T_s} = 0.905$، و 1-10Ts=0.9، و $e^{-30T_s} = 0.741$، و 1-30Ts=0.7 وهذا يمثل تقريباً أفضل كثيراً.

(١٤.٧) البناء القياسي للأنظمة

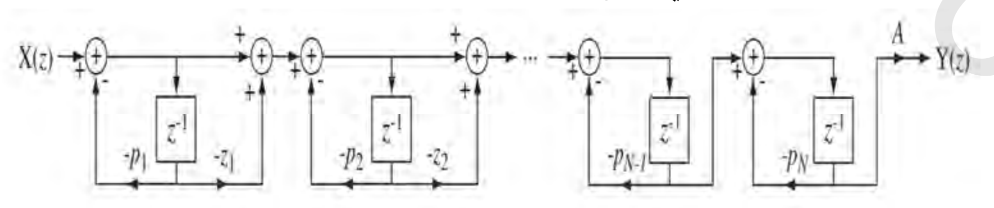
بناء الأنظمة المتقطعة زمنياً يتوازي كثيراً مع بناء الأنظمة المستمرة زمنياً. الطرق العامة نفسها يتم تطبيقها هنا حيث ينتج أنواع البناء نفسها كما سنرى.

البناء المتوازي

يمكن بناء توالي من الأنظمة من دالة العبور المحللة على الصورة التالية:

$$H(z) = A\frac{z-z_1}{z-p_1}\frac{z-z_2}{z-p_2}\cdots\frac{z-z_M}{z-p_M}\frac{1}{z-p_{M+1}}\frac{1}{z-p_{M+2}}\cdots\frac{1}{z-p_N}$$

حيث درجة البسط M≤N كما في شكل (١٤.٢٣).



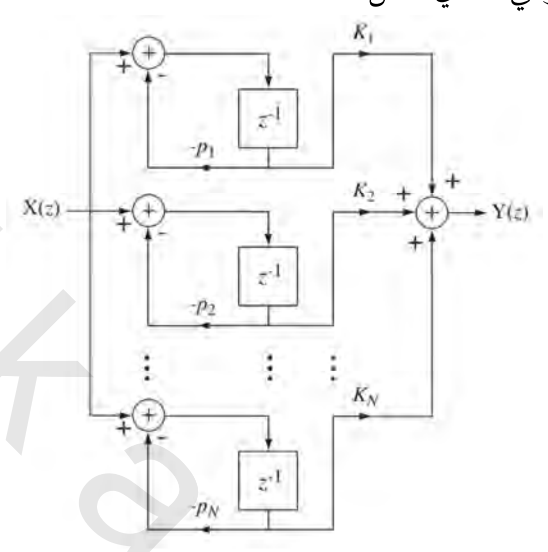
شكل رقم (١٤.٢٣) البناء المتوالي للنظام الكلي

البناء المتوازي

يمكن التعبير عن دالة العبور كمجموع من الكسور الجزيئية كما يلي :

$$H(z) = \frac{K_1}{z-p_1} + \frac{K_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{K_N}{z-p_N}$$

ثم بناء النظام على التوالي كما في شكل (١٤.٢٤).



شكل رقم (١٤.٢٤) البناء المتوازي للنظام الكلي.

في الحقيقة يتم بناء الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام مكونات رقمية. في هذه الأنظمة تكون كل الإشارات في صورة أرقام ثنائية بعدد محدد من البتات. في العادة يتم إجراء العمليات عن طريق حسابات النقطة الثابتة. إن ذلك يعني أن كل الإشارات سيتم تكميمها إلى رقم محدد من القيم الممكنة ولذلك فإنها لا تكون تمثيلاً حقيقياً للإشارات المثالية. هذا النوع من التصميم يؤدي في العادة إلى أسرع الأنظمة وأكثرها كفاءة، ولكن خطأ التكميم السابق بين الإشارات الحقيقية والمثالية، يجب التحكم فيه حتى يتم تجنب الضوضاء الناتجة عنه، أو في بعض الأحوال يجعل النظام غير مستقر. تحليل مثل هذا الأخطاء يقع خارج نطاق هذا الكتاب، ولكن عموماً فإن البناء المتوالي والمتوازي يكون أكثر سماحية وأقل تأثراً بمثل هذه الأخطاء عن طريقة البناء بالشكل المباشر II.

(١٤.٨) ملخص النقاط المهمة

١- من الممكن تحليل الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام تحويل لابلاس من خلال استخدام صدمات مستمرة زمنياً تحاكي مثيلاتها المتقطعة زمنياً، ولكن تحويل z يكون أكثر مناسبة في ذلك.

٢- يمكن نمذجة الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام المعادلات الفرقية أو المخططات الصندوقية في النطاق الزمني أو النطاق الترددي.

٣- النظام LTI المتقطع زمنياً يكون مستقراً إذا كانت كل أقطاب دالة عبور هذا النظام تقع في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة.

٤- الثلاثة أنواع الشهيرة للتوصيل البيني للأنظمة هي التوصيل المتتالي، والتوصيل المتوازي، والتوصيل مع التغذية العكسية.

٥- وحدة التتابع، والإشارة الجيبية إشارتان مهمتان عمليتان لاختبار خواص الأنظمة.

٦- يمكن للأنظمة المتقطعة زمنياً أن تحاكي بدرجة تقريب عالية الأنظمة المستمرة زمنياً، وهذا التقريب يتحسن مع زيادة معدل أخذ العينات.

٧- الطريقة المباشرة II، والبناء المتوالي والمتوازي هي طرق قياسية مهمة لبناء الأنظمة.

تمارين مع إجاباتها

الاستقرار

١- تحقق من استقرار الأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

(أ) $H(z) = \frac{z}{z-2}$ (ب) $H(z) = \frac{z}{z^2-7/8}$

(ت) $H(z) = \frac{z}{z^2-(3/2)z+9/8}$ (ث) $H(z) = \frac{z^2-1}{z^3-2z^2+3.75z-0.5625}$

الإجابة: ثلاثة أنظمة غير مستقرة وواحدة مستقرة

التوصيلات المتوالية، والمتوازية، والتغذية العكسية

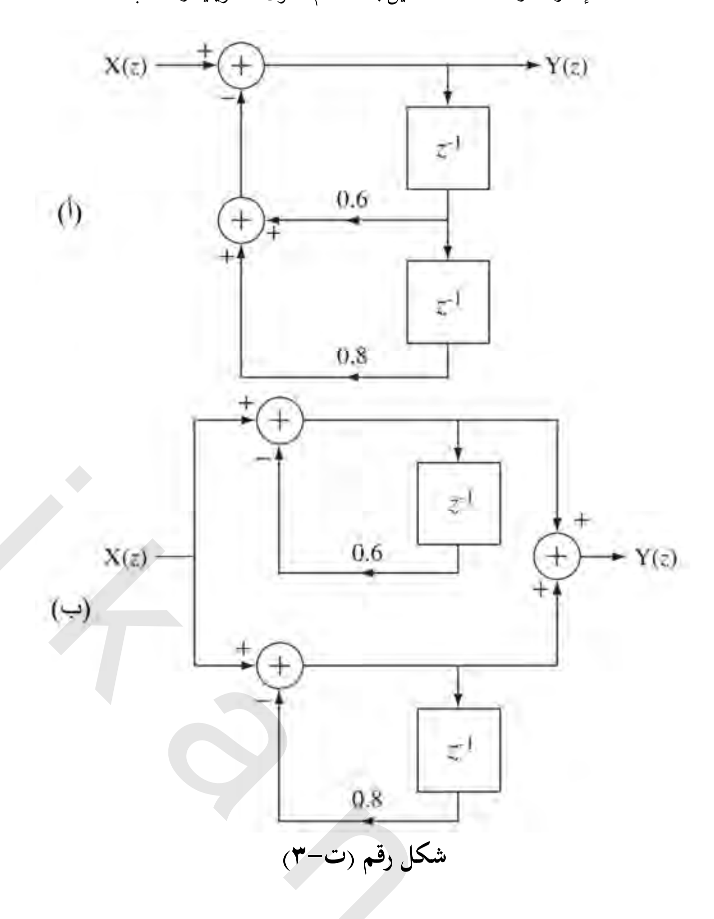
٢- نظام تغذية عكسية له دالة العبور التالية:

$$H(z) = \frac{K}{1+K\frac{z}{z-0.9}}$$

لأي مدي للـ K يكون هذا النظام مستقرا.

الإجابة: $K>-0.1$ أو $K<-1.9$

٣- أوجد دوال العبور للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٣) في صورة نسبة واحدة لكثيرتي حدود في المتغير z.



شكل رقم (ت-٣)

الإجابة:

$$\frac{z}{z+0.3}, \frac{z^2}{z^2+1.2z+0.27}$$

الاستجابة للإشارات القياسية

٤- أوجد الاستجابات $h_{-1}[n]$ للأنظمة التي لها دوال العبور التالية لتتابع الوحدة x[n]=u[n] :

(أ) $H(z) = \frac{z}{z-1}$ (ب) $H(z) = \frac{z-1}{z-1/2}$

الإجابة: $(1/2)^n$ ، و ramp[n+1]

٥- أوجد الاستجابة y[n] للأنظمة التي لها دوال العبور التالية للإشارة x[n]=cos(2πn/8)u[n]. بين أن الاستجابة المدفوعة ستكون هي نفسها كما لو تم الحصول عليها باستخدام الـ DTFT مع الإشارة x[n]=cos(2πn/8) :

(أ) $H(z) = \frac{z}{z-0.9}$ (ب) $H(z) = \frac{z^2}{z^2-1.6z+0.63}$

الإجابة:

$$y[n] = \{0.03482(0.7)^n + 1.454(0.9)^n + 1.9293cos(2\pi n/8 - 1.3145)\}\text{u}[n],$$
$$0.3232(0.9)^n\text{u}[n] + 1.3644cos(2\pi n/8 - 1.0517)\text{u}[n]$$

الموضع الجذري

٦- ارسم الموضع الجذري للأنظمة التالية التي لكل منها مسارات أمامية ومسارات تغذية عكسية كما يلي:

(أ) $H_1(z) = K\frac{z-1}{z+\frac{1}{2}}, \qquad H_2(z) = \frac{4z}{z-0.8}$

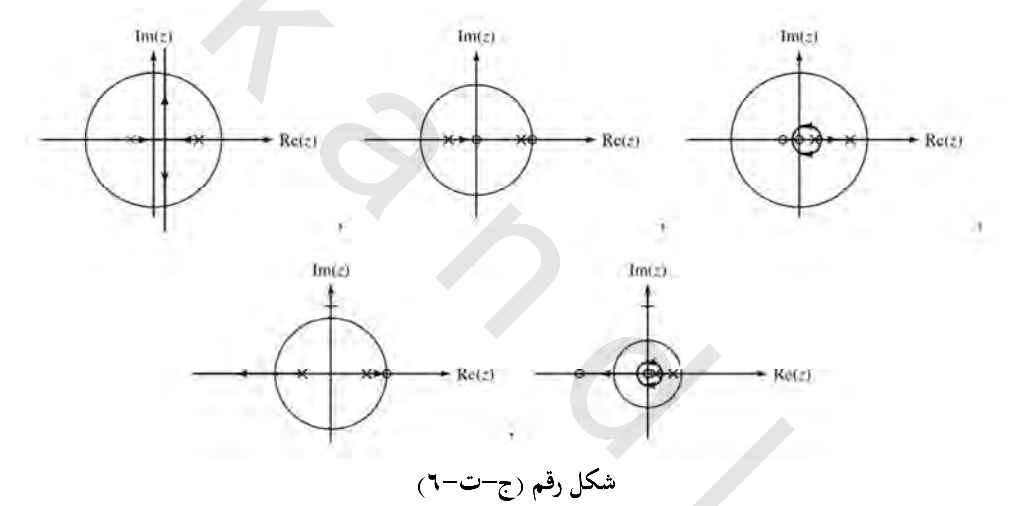
(ب) $H_1(z) = K\frac{z-1}{z+\frac{1}{2}}, \qquad H_2(z) = \frac{4}{z-0.8}$

(ت) $H_1(z) = K\frac{z}{z-\frac{1}{4}}, \qquad H_2(z) = \frac{z+\frac{1}{5}}{z-\frac{3}{4}}$

(ث) $H_1(z) = K\frac{z}{z-\frac{1}{4}}, \qquad H_2(z) = \frac{z+2}{z-\frac{3}{4}}$

(ج) $H_1(z) = K\frac{1}{z^2-\frac{1}{4}z-\frac{2}{9}}, \qquad H_2(z) = 1$

الإجابة:



شكل رقم (ج-ت-٦)

العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس

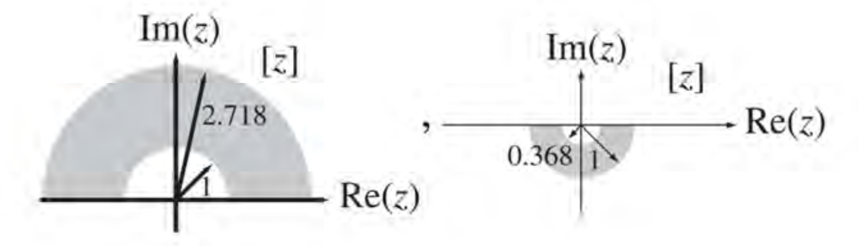
٧- ارسم المناطق التالية التي في المستوى s فيما يقابلها في المستوى z:

(أ) $0 < \sigma < 1/T_s, \quad 0 < \omega < \pi/T_s$

(ب) $-1/T_s < \sigma < 0, \quad -\pi/T_s < \omega < 0$

(ج) $-\infty < \sigma < \infty, \quad 0 < \omega < 2\pi/T_s$

الإجابة: كل المستوى z،



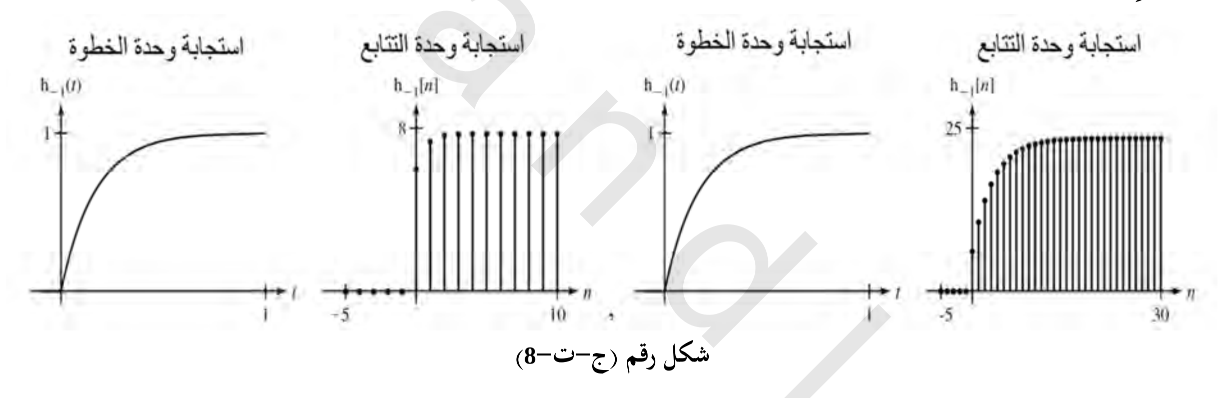
شكل رقم (ج–ت–٧)

أنظمة البيانات المعيننة

٨- باستخدام طريقة ثبات الصدمة للتصميم، صمم نظاماً يقارب الأنظمة التي لها دوال العبور التالية عند معدلات أخذ العينات المصاحبة لكل منها. قارن استجابات الصدمة واستجابات الخطوة (تتابع الوحدة) للأنظمة المستمرة زمنياً والمتقطعة زمنياً:

(أ) $H(s) = \frac{6}{s+6}, \quad f_s = 4 \text{ Hz}$ (ب) $H(s) = \frac{6}{s+6}, \quad f_s = 20 \text{ Hz}$

الإجابة:



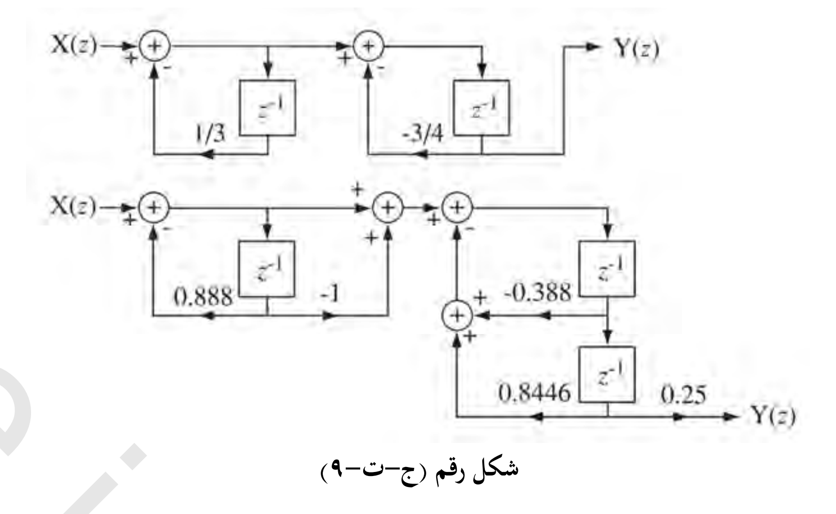
شكل رقم (ج–ت–8)

بناء الأنظمة

٩- ارسم المخطط الصندوقي للتوصيل المتتالي لكل من الأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

(أ) $H(z) = \frac{z}{(z+1/3)(z-3/4)}$ (ب) $H(z) = \frac{z-1}{4z^3+2z^2+2z+3}$

الإجابة:

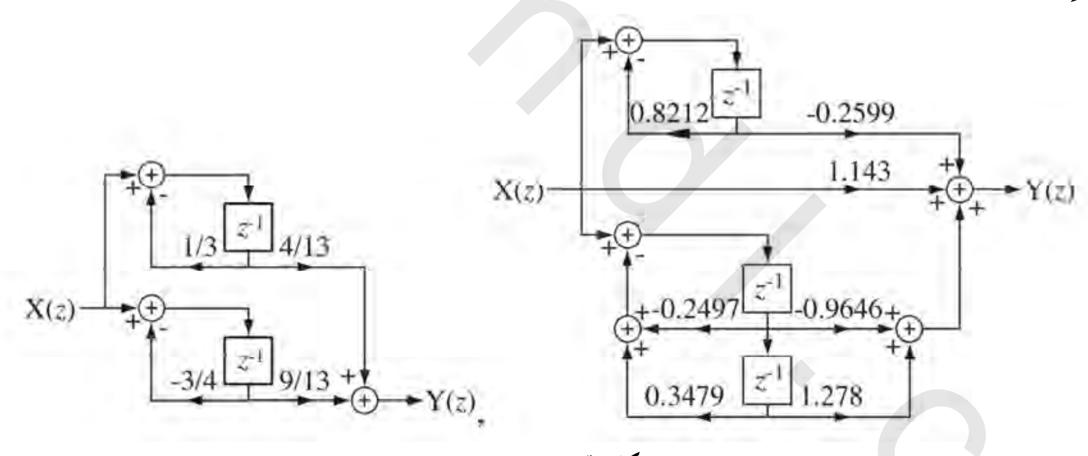


شكل رقم (ج–ت–٩)

١٠- ارسم المخطط الصندوقي للتوصيل المتوازي للأنظمة التي لها دوال العبور التالية :

(أ) $H(z) = \frac{z}{(z+1/3)(z-3/4)}$ (ب) $H(z) = \frac{8z^3-4z^2+5z+9}{7z^3+4z^2+z+2}$

الإجابة :



شكل رقم (ج–ت–١٠)

تمارين بدون إجابات

الاستقرار

١١- إذا كان :

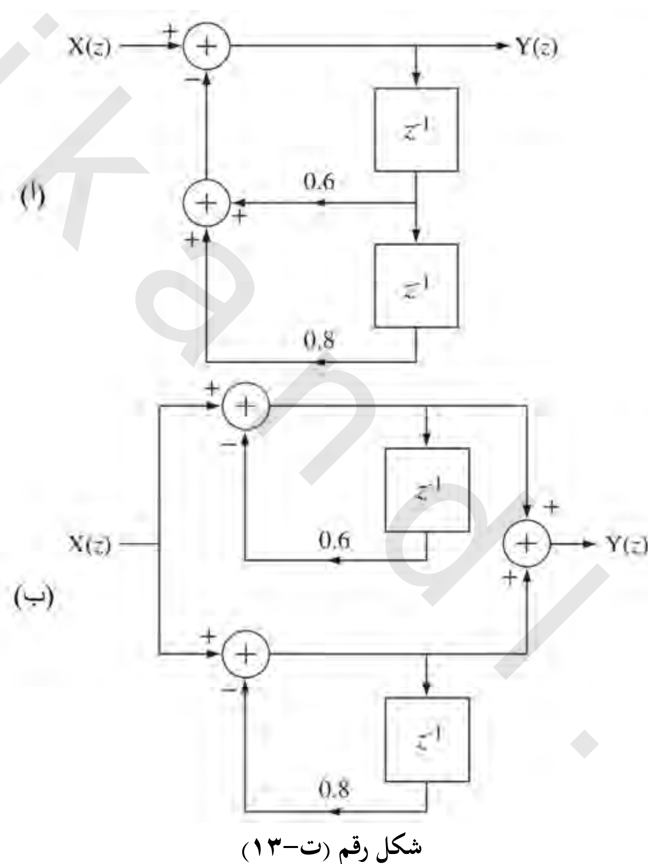
$$(1.1)^n cos(2\pi n/16) \overset{z}{\leftrightarrow} H_1(z),$$

و $h_2(z)=H_1(az)$، و $H_1(z)$ و $H_2(z)$ هما دوال العبور للنظام #1 والنظام #2 على التوالي، ما مدى قيم a التي تجعل النظام #2 مستقراً ويمكن بناؤه طبيعياً ؟

التوصيل المتوازي، والمتوالي، والتغذية العكسية

١٢- نظام تغذية عكسية له دالة عبور للمسار الأمامي كالتالي: $H_1(z)=Kz/(z-0.5)$ ودالة عبور للمسار المرتد كالتالي $H_2(z)=4z^{-1}$. لأي قيم للـ K سيكون هذا النظام مستقراً ؟

١٣- أوجد دوال العبور الكلية للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ١٣) في صورة نسبة واحدة من كثيرتي حدود في المتغير z:



شكل رقم (ت-١٣)

الاستجابة للإشارات القياسية

١٤- نظام له دالة العبور التالية:

$$H(z) = \frac{z}{z^2+z+0.24}.$$

إذا تم تطبيق تتابع الوحدة u[n] على هذا النظام، فما هي قيمة الاستجابات y[0]، و y[1]، و y[2] ؟

١٥- أوجد الاستجابات y[n] للأنظمة التي لها دوال العبور التالية عند تطبيق تتابع الوحدة x[n]=u[n]:

(أ) $H(z) = \frac{z}{z^2-1.8z+0.82}$

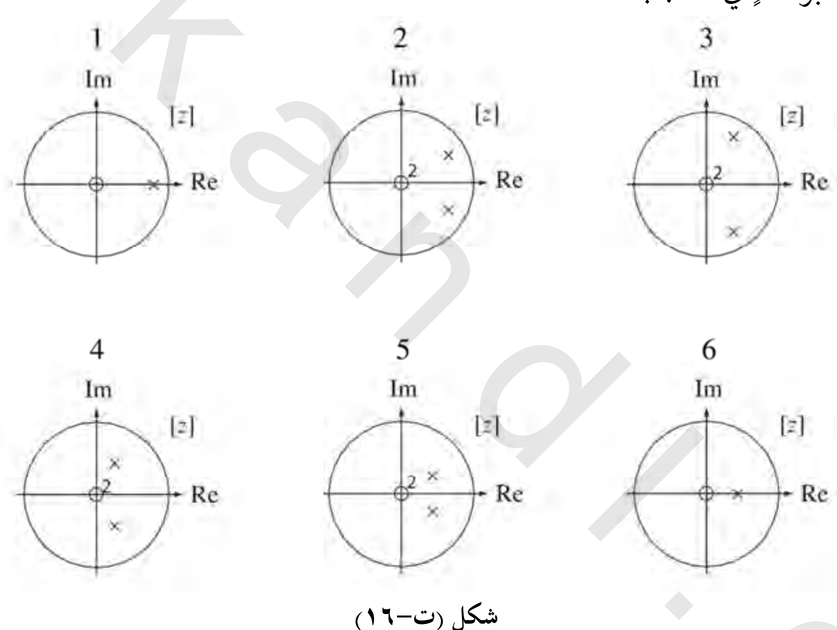
(ب) $H(z) = \frac{z^2-1.932z+1}{z(z-0.95)}$

١٦- في شكل (ت- ١٦) يوجد 6 مخططات للأقطاب والأصفار لدوال العبور لـ 6 أنظمة متقطعة زمنياً:

(أ) أي هذه الأنظمة تكون له استجابة صدمة متزايدة رتيبة؟

(ب) من بين هذه الأنظمة التي لها استجابة صدمة متزايدة، أي واحدة فيها يكون لها أسرع استجابة لوحدة تتابع ؟

(ج) من بين هذه الأنظمة أيها يكون له استجابة صدمة ترددية، وأي واحد فيها يكون له أسرع معدل تردد وله أكبر تخطٍ في استجابته:



شكل (ت-١٦)

١٧- أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) مرشح رقمي له استجابة صدمة $h[n]=0.6^n u[n]$. إذا تمت إثارته بوحدة تتابع، فما هي القيمة النهائية للاستجابة ؟

$$\left(\lim_{n\to\infty} g[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)G(z)\right)$$

(ب) مرشح رقمي له دالة العبور $H(z)=10z/(z-0.5)$. عند أي تردد زاوي Ω سيكون مقدار استجابته أقل ما يمكن؟

(ج) مرشح رقمي له دالة العبور H(z)=10(z-1)/(z-0.3). عند أي تردد زاوي Ω سيكون مقدار استجابته أقل ما يمكن؟

(د) مرشح رقمي له دالة العبور التالية H(z)=2z/(z-0.7). ما هو مقدار استجابته عند التردد الزاوي Ω=π/2 ؟

العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس

١٨- العلاقة بين المستوى s والمستوى z هي $z = e^{sT_s}$ حيث $T_s=1/f_s$ لأي قيمة لمعدل أخذ العينات f_s. بفرض أن $f_s=100$.

(أ) صف المسار المحيطي في المستوى z المقابل لكل المحور الحقيقي السالب σ في المستوى s؟

(ب) ما هو طول أقل مقطع خطي على المحور w في المستوى s المقابل لكل دائرة الوحدة في المستوى z ؟

(ج) أوجد قيم النقطتين المختلفتين s_1، و s_2 في المستوى s المقابلة للنقطة z=1 في المستوى z؟

أنظمة البيانات المعيننة

١٩- باستخدام طريقة الصدمة الثابتة للتصميم، صمم نظاماً يقارب الأنظمة التي لها دوال العبور التالية عند معدلات أخذ العينات المقابلة. قارن استجابات الصدمة ووحدة الخطوة (التتابع) للنظام المستمر زمنياً والنظام المتقطع زمنياً.

(أ) $H(s) = \frac{712s}{s^2+46s+240}, \quad f_s = 20 \text{ Hz}$

(ب) $H(s) = \frac{712s}{s^2+46s+240}, \quad f_s = 200 \text{ Hz}$

بناء الأنظمة

٢٠- ارسم مخططاً صندوقياً للصورة المتتالية للأنظمة التي لها دوال العبور التالية :

(أ) $H(z) = \frac{z^2}{z^2-0.1z-0.12} + \frac{z}{z-1}$

(ب) $H(z) = \frac{\frac{z}{z-1}}{1+\frac{z}{z-1}\frac{z^2}{z^2-1/2}}$

٢١- ارسم مخططاً صندوقياً للصورة المتوازية للأنظمة التي لها دوال العبور التالية :

(أ) $H(z) = (1+z^{-1})\frac{18}{(z-0.1)(z-0.7)}$

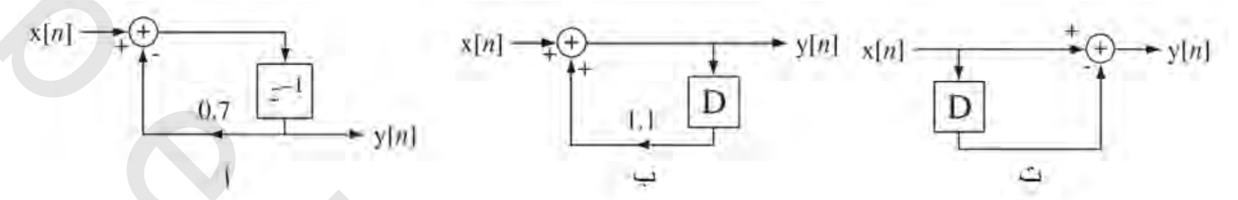
(ب) $H(z) = \frac{\frac{z}{z-1}}{1+\frac{z}{z-1}\frac{z^2}{z^2-1/2}}$

عموميات

٢٢- شكل (ت- ٢٢) يبين بعض توصيفات للأنظمة في أشكال مختلفة :

(أ) أي هذه الأنظمة يكون غير مستقر (بما في ذلك الاستقرار الهامشي) ؟

(ب) أي هذه الأنظمة يكون له واحد أو أكثر من الأصفار على دائرة الوحدة ؟



$$H(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

ث

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

ج

$$2\,y[n] - y[n-1] = x[n]$$

ح

$$H(z) = \frac{z^2+z+1}{z^2}$$

خ

$$Y(z) = X(z) - 0.8z^{-1}\,Y(z) + 1.1z^{-2}\,Y(z)$$

د

شكل رقم (ت-٢٢).



تحليل وتصميم المرشحات

(١٥.١) المقدمة والأهداف

تعتبر المرشحات من أهم الأنظمة العملية. كل نظام، يكون بمفوم معين هو مرشح، لأن كل نظام تكون له استجابة ترددية تقوم بقمع ترددات معينة أكثر من ترددات أخرى. يتم استخدام المرشحات لتطويع صوت الموسيقى بحيث تناسب الذوق الشخصي لكل فرد، ولتنعيم والتخلص من ضوضاء الإشارات، وللعمل على استقرار الأنظمة غير المستقرة، والتخلص من الضوضاء غير المرغوب فيها في الإشارات التي يتم استقبالها، وهكذا. دراسة تحليل وتصميم المرشحات تعتبر مثالاً جيداً على استخدام طرق التحويل.

أهداف الفصل

١- لكي نألف ونفهم أكثر أنواع المرشحات المستمرة زمنياً شيوعاً وأمثلية، ولنفهم أيضاً بأي مفهوم تكون هذه المرشحات مثالية، ولكي نكون قادرين على تصميم هذه المرشحات حتى تحقق متطلبات معينة.

٢- لكي نفهم ونألف أدوات تحليل وتصميم المرشحات باستخدام ماتلاب

٣- لكي نفهم كيفية تحويل نوع من المرشحات إلى نوع آخر من خلال تعديل المتغيرات .

٤- لنتعلم طرق محاكاة المرشحات المثالية المستمرة زمنياً بالمرشحات المتقطعة زمنياً ولنفهم المميزات والعيوب النسبية لكل طريقة.

٥- لنستكشف طرق تصميم المرشحات المتقطعة زمنياً ذات الفترة المحددة وغير المحددة ولنفهم المميزات والعيوب النسبية لكل واحدة من هذه الطرق.

(١٥.٢) المرشحات التماثلية أو التناظرية

في هذا الفصل سنسمي المرشحات المستمرة زمنياً بالمرشحات التماثلية، والمرشحات المتقطعة زمنياً بالمرشحات الرقمية. أيضاً، عند شرح كل من المرشحات التماثلية والرقمية، فإن الرمز الجانبي a سيستخدم للدلالة

على المعاملات أو الدوال عند تطبيقها على المرشحات التماثلية، وسنستخدم الرمز الجانبي d بالطريقة نفسها للدلالة على المعاملات والدوال المطبقة على المرشحات الرقمية.

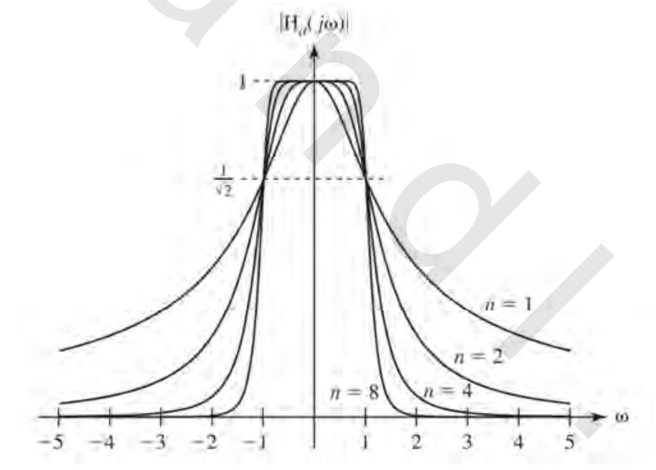
مرشحات بترورث (Butterworth)

مرشحات بترورث المطبعة

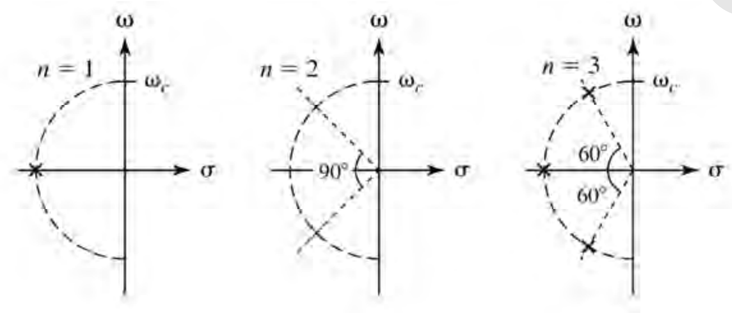
من الأنواع الشهيرة جداً للمرشحات التماثلية، المرشح بترورث، الذي أخذ هذا الاسم من اسم المهندس الإنجليزي S. Butterworth، الذي اكتشفه. المرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة من الدرجة n له الاستجابة الترددية التي مربع مقدارها يعطى بالمعادلة التالية:

$$|A_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^2}$$

يتم تصميم المرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة ليكون مسطحاً لأقصى حد بالنسبة للترددات الواقعة في مجال المرور، أو السماح $\omega<\omega_c$، مما يعني أن تغيره مع التردد في مجال المرور يكون تغيراً رتيباً ويقترب تفاضله من الصفر مع اقتراب التردد من الصفر. يبين شكل (١٥.١) الاستجابة الترددية للمرشح بترورث مع فرض التردد الركني $\omega_c=1$ لأربع قيم مختلفة للدرجة n. مع زيادة الدرجة يقترب مقدار استجابة المرشح من استجابة المرشح المثالي.



شكل رقم (١٥.١) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح بترورث حيث التردد الركني $\omega_c=1$، وعند أربع قيم مختلفة للدرجة n.



شكل رقم (١٥.٢) مواضع أقطاب المرشح بترورث

أقطاب المرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة تقع على نصف دائرة نصف قطرها يساوي ω_c والتباعد الزاوي بين الأقطاب (عندما n>1) يكون عادة π/n. إذا كانت n رقماً فردياً، سيكون هناك قطب على المحور الحقيقي السالب وكل الأقطاب الأخرى تحدث في صورة أزواج مركبة مترافقة. إذا كانت n رقماً زوجياً، فإن كل الأقطاب تكون في صورة أزواج مركبة مترافقة. باستخدام هذه الخواص، فإن دالة العبور للمرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة الذي معامل تكبيره يساوي الوحدة يمكن حسابها وعادة تكون على الصورة التالية:

$$A_a(s) = \frac{1}{(1-s/p_1)(1-s/p_2)\ldots(1-s/p_n)} = \prod_{\text{k=1}}^{n}\frac{1}{1-s/p_1} = \prod_{\text{k=1}}^{n}-\frac{pk}{\text{s}-\text{pk}}$$

حيث الـ p's تمثل مواضع الأقطاب.

صندوق الأدوات signal أو الإشارة في ماتلاب به دوال لتصميم مرشحات بترورث التماثلية. من هذه الدوال:

```
[za,pa,ka]=buttap(N) ;
```

التي تعطي الأصفار المحددة لهذا المرشح في المتجه za، والأقطاب المحددة في المتجه pa ومعاملات تكبير الوحدة في الكمية القياسية أو غير المتجهة ka، ومن الدرجة N وتكبيره يساوي واحد. للمرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة الذي له تردد ركني w_c=1. (لا يوجد هناك أصفار في دالة عبور المرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة، لذلك za يكون عادة متجهاً فاضياً، وحيث إن المرشح له معامل تكبير يساوي واحداً فإن ka تكون دائماً واحداً. يتم تضمين متجهات الأصفار ومعامل التكبير لأن هذا الشكل للنداء على الدالة يتم استخدامه مع أنواع أخرى من المرشحات، التي قد يكون لها أصفار محددة ومعامل تكبير يختلف عن الواحد).

```
>> [za,pa,ka] = buttap(4) ;
>> za
za =
  []
>> pa
pa =
          -0.3827 + 0.9239i
          -0.3827 - 0.9239i
          -0.9239 + 0.3827i
          -0.9239 - 0.3827i
>> ka
ka =
   1
```

تحويلات المرشح

بمجرد تصميم المرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة بدرجة معينة وبتردد ركني ω_c=1، فإنه يمكن تحويل هذا المرشح إلى مرشح آخر له تردد ركني مختلف، أو تحويله إلى مرشح منفذ للترددات العالية، أو منفذ أو معوق

لمجال من الترددات وذلك عن طريق تغيير المعاملات الترددية. يسمح ماتلاب للمصممين بالتصميم السريع للمرشح بترورث من الدرجة n والمنفذ للترددات المنخفضة بمعامل تكبير يساوي الواحد وتردد ركني $\omega_c=1$. تغيير معامل التكبير إلى قيمة غير مساوية للواحد تعتبر عملية سهلة حيث إنها ببساطة تشتمل على تغيير معامل تكبير المرشح. أما تغيير التردد الركني أو نوع المرشح فيحتاج لتفاصيل أكثر قليلاً.

لتغيير التردد الركني للاستجابة الترددية للمرشح من القيمة $\omega_c=1$ إلى أي قيمة أخرى $\omega_c\neq1$، نقوم بهذا التحويل في المتغير المستقل $s\rightarrow s/\omega_c$ في دالة العبور. فمثلاً، دالة العبور للمرشح بترورث المطبع من الدرجة الأولى ومعامل تكبير يساوي الواحد هي:

$$H_{norm}=\frac{1}{s+1}$$

إذا كنا نريد تحريك التردد الركني إلى القيمة $\omega_c=10$، فإن دالة العبور الجديدة ستكون على الصورة التالية:

$$H_{10}(s)=H_{norm}(s/10)=\frac{1}{s/10+1}=\frac{10}{s+10}$$

وهذه تعتبر دالة عبور مرشح منفذ للترددات المنخفضة له معامل تكبير الوحدة وتردد ركني $\omega_c=10$.

القوة الحقيقية لعملية تحويل المرشح يمكن رؤيتها في عملية تحويل المرشح المنفذ للترددات المنخفضة إلى آخر منفذ للترددات العالية. إذا قمنا بالتحويل $s=1/s$ في دالة العبور سنحصل على ما يلي:

$$H_{HP}(s)=H_{norm}(1/s)=\frac{1}{1/s+1}=\frac{s}{s+1}$$

حيث $H_{HP}(s)$ تمثل دالة العبور لمرشح منفذ للترددات العالية من الدرجة الأولى ومعامل تكبير الوحدة وتردد ركني $\omega_c=1$. يمكن أيضاً بالتزامن أن نغير التردد الركني بعمل التحويل $s\rightarrow\omega_c/s$. حيث يكون لدينا الآن دالة عبور لها قطب محدد واحد وصفر محدد عند $s=0$. في الصورة العامة لدالة العبور المطبعة لمرشح بترورث منفذ للترددات المنخفضة يمكن وضعها على الصورة التالية:

$$H_{norm}(s)=\prod_{k=1}^{n}\frac{-pk}{s-pk}$$

عندما نقوم بالتحويل $s\rightarrow1/s$ سنحصل على:

$$H_{HP}(s)=\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{-pk}{s-pk}\right]_{s\rightarrow1/s}=\prod_{k=1}^{n}\frac{-pk}{1/s-pk}=\prod_{k=1}^{n}\frac{pks}{p_k s-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{-pk}{s-1/pk}$$

أقطاب هذه الدالة تقع عند $s=1/p_k$. إنها تمثل مقلوب أقطاب المرشح المطبع المنفذ للترددات المنخفضة، وكلها لها مقدار يساوي الواحد. مقلوب أي عدد مركب يكون عند زاوية تساوي سالب زاوية العدد المركب. في هذه الحالة، حيث أن مقادير الأقطاب لم تتغير، فإن الأقطاب تتحرك إلى المواضع المركبة المرافقة ولكن التركيبة العامة للأقطاب لن تتغير. أيضاً أصبح هناك الآن عدد n من الأصفار عند $s=0$. إذا قمنا بالتحويل $s\rightarrow\omega_c/s$، فإن الأقطاب ستكون لها الزوايا نفسها ولكن مقاديرها تصبح الآن ω_c بدلاً من الواحد.

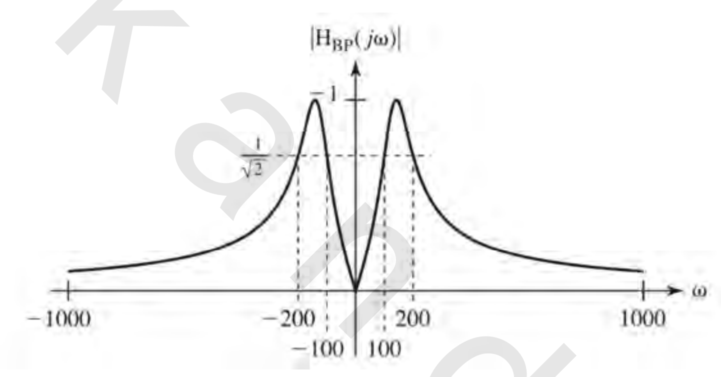
تحويل المرشح المنفذ للترددات المنخفضة إلى آخر منفذ لمجال من الترددات يكون أكثر تعقيدا. يمكننا عمل ذلك بإجراء التحويل التالي:

$$\rightarrow \frac{s^2+\omega_L\omega_H}{s(\omega_H-\omega_L)}$$

حيث ω_L هي التردد الركني الموجب المنخفض، و ω_H هي التردد الركني الموجب العلوي للمرشح المنفذ لمجال من الترددات. مثلا، دعنا نصمم مرشحاً منفذاً لمجال من الترددات من الدرجة الأولى ومعامل تكبير الوحدة حيث يمتد مجال المرور له من $\omega=100$ حتى $\omega=200$ كما في شكل (١٥.٣).

$$H_{BP}(s) = H_{norm}\left(\frac{s^2+\omega_L\omega_H}{s(\omega_H-\omega_L)}\right) = \frac{1}{\frac{s^2+\omega_L\omega_H}{s(\omega_H-\omega_L)}+1} = \frac{s(\omega_H-\omega_L)}{s^2+s(\omega_H-\omega_L)+\omega_L\omega_H}$$

$$H_{BP}(j\omega) = \frac{j\omega(\omega_H-\omega_L)}{-\omega^2+j\omega(\omega_H-\omega_L)+\omega_L\omega_H}$$



شكل رقم (١٥.٣) مقدار الاستجابة الترددية لمرشح بتروث من الدرجة الأولى منفذ لمجال من الترددات بمعامل تكبير الوحدة

بتبسيط المعادلة السابقة والتعويض بالقيم العددية نحصل على:

$$H_{BP}(j\omega) = \frac{j100\omega}{-\omega^2+j100\omega+20{,}000} = \frac{j100\omega}{(j\omega+50+j132.2)(j\omega+50-j132.2)}$$

قمة الاستجابة المنفذة لمجال من الترددات تحدث عندما يكون تفاضل هذه الاستجابة بالنسبة للتردد يساوي صفر كما يلي:

$$\frac{d}{d\omega}H_{BP}(j\omega) = \frac{(-\omega^2+j\omega(\omega_H-\omega_L)+\omega_L\omega_H)j(\omega_H-\omega_L)-j\omega(\omega_H-\omega_L)(-2\omega+j(\omega_H-\omega_L))}{[-\omega^2+j\omega(\omega_H-\omega_L)+\omega_L\omega_H]} = 0$$

$$(-\omega^2 + j\omega(\omega_H - \omega_L) + \omega_L\omega_H) + 2\omega^2 - j\omega(\omega_H - \omega_L) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega_L\omega_H = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{\omega_L\omega_H}$$

وبالتالي فإن التردد الزاوي الطبيعي سيكون $\omega_n = \pm\sqrt{\omega_L\omega_H}$. أيضاً للتحقق من دالة العبور القياسية من الدرجة الثانية على الصورة:

$$j2\zeta\omega_n\omega = j\omega(\omega_H - \omega_L) \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_H-\omega_L}{2\sqrt{\omega_L\omega_H}}$$

وبالتالي ستكون نسبة الإخماد على الصورة:

$$\zeta = \frac{\omega_H-\omega_L}{2\sqrt{\omega_L\omega_H}}$$

في النهاية يمكننا تحويل المرشح المنفذ للترددات المنخفضة إلى آخر معوق أو محبط لمجال من الترددات باستخدام التحويل التالي:

$$s \rightarrow \frac{s(\omega_H-\omega_L)}{s^2+\omega_L\omega_H}$$

لاحظ أنه للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة من الدرجة n تكون درجة المقام لدالة العبور هي n، ولكن بالنسبة للمرشح المنفذ لمجال من الترددات من الدرجة n تكون درجة المقام لدالة العبور هي 2n. بالطريقة نفسها تكون درجة المقام للمرشح المنفذ للترددات العالية هي n ودرجة المقام للمرشح المعوق لمجال من الترددات هي 2n.

أدوات تصميم المرشحات في ماتلاب

يحتوي ماتلاب على أوامر لتحويل المرشحات المطبعة وهي كالتالي:

lp2bp دالة تحويل المرشح التماثلي المنفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح منفذ لمجال من الترددات.

lp2bs دالة تحويل المرشح التماثلي المنفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح معوق لمجال من الترددات.

lp2hp دالة تحويل المرشح التماثلي المنفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح منفذ للترددات العالية.

lp2lp دالة تحويل المرشح التماثلي المنفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح منفذ للترددات المنخفضة.

الصورة العامة للدالة lp2bp هي:

$$[numt, dent] = 1p2bp\ (num, den, w0, bw)$$

حيث num و den هي متجهات لمعاملات المتغير s في كل من البسط والمقام لدالة عبور المرشح المنفذ للترددات المنخفضة المطبعة على التوالي، ω_0 هي التردد المركزي للمرشح المنفذ لمجال من الترددات، و bw هي عرض مجال هذا المرشح وكل منهما تكون بالوحدات rad/s، و numt، و dent هي متجهات معاملات المتغير s في كل من البسط والمقام للمرشح المنفذ لمجال من الترددات. الصورة العامة لباقي الدوال تكون بالطريقة نفسها. كمثال يمكننا أن نصمم مرشح بترورث منفذاً للترددات المنخفضة مطبعاً باستخدام الأمر buttap كما يلي:

```
»[z,p,k] = buttap(3) ;
»z
z =
   []
»p
p =
        -0.5000 + 0.8660i
        -1.0000
        -0.5000 - 0.8660i
»k
k =
    1
```

وهذه النتيجة تبين أن الاستجابة الترددية لمرشح بتروورث منفذ للترددات المنخفضة من الدرجة الثالثة ستكون كما يلي :

$$H_{LP}(s)=\frac{1}{(s+1)(s+0.5+j0.866)(s+0.5-j0.866)}$$

يمكن تحويل هذه الصورة إلى صورة النسبة بين كثيرتي حدود باستخدام أمر ماتلاب التالي :

```
»[num,den] = tfdata(zpk(z,p,k),'v') ;
»num
num =
   0 0 0 1
»den
den =
1.0000 2.0000+0.0000i 2.0000+0.0000i 1.0000+0.0000i
```

وهذا يوضح أن الاستجابة الترددية للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة، المطبع ، يمكن كتابته بصورة أكثر إدماجاً كما يلي :

$$\mathrm{H_{LP}(s)}=\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

باستخدام هذه النتيجة يمكن تحويل المرشح المنفذ المطبع المنفذ للترددات المنخفضة إلى آخر غير مطبع منفذ لمجال من الترددات بتردد مركزي ω=8 وعرض مجال Δω=2 كما يلي :

```
»[numt,dent] = lp2bp(num,den,8,2) ;
»numt
numt =
   Columns 1 through 4
         0 0.0000-0.0000i 0.0000-0.0000i 8.0000-0.0000i
Columns 5 through 7
         0.0000-0.0000i 0.0000-0.0000i 0.0000-0.0000i
»dent
dent =
   1.0e+05 *
Columns 1 through 4
         0.0000 0.0000+0.0000i 0.0020+0.0000i 0.0052+0.0000i
Columns 5 through 7
         0.1280+0.0000i 0.1638+0.0000i 2.6214-0.0000i
»bpf = tf(numt,dent) ;
»bpf
Transfer function:
                  1.542e-14s^5+2.32e-13s^4+8s^3+3.644e-11s^2+9.789e-11s+9.952e-10
-----------------------------------------------------
                     s^6+4s^5+200s^4+520s^3+1.28e04s^2+1.638e04s+2.621e05
»
```

وهذه النتيجة توضح أن دالة عبور المرشح المنفذ لمجال من الترددات يمكن كتابتها على الصورة التالية :

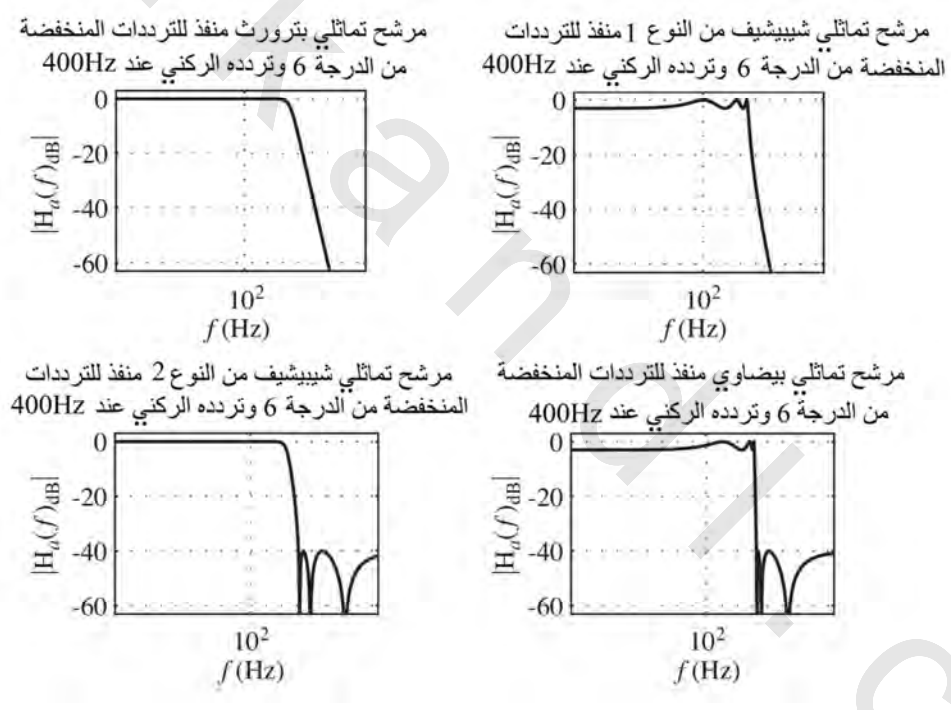
$$H_{BP}(s)=\frac{8s^3}{s^6+4s^5+200s^4+520s^3+12800s^2+16380s+262100}$$

(المعاملات متناهية الصغر وغير المساوية للصفر في بسط دالة العبور الناتجة من ماتلاب تكون نتيجة لتقريب الأخطاء في حسابت ماتلاب ويتم إهمالها. لاحظ أنها لا تظهر في دالة numt)

المرشحات شيبيشيف (chebyshev) والبيضاوية (elliptic) والبيسيل (Bessel)

لقد رأينا كيف يمكن استخدام الأمر buttap في ماتلاب لتصميم المرشحات من النوع بتروورث المطبعة وكيف يمكن أن نحولها لأنواع أخرى من مرشحات بتروورث غير المطبعة. هناك عدد من أوامر ماتلاب الأخرى التي تكون مفيدة في تصميم المرشحات التماثلية. هناك أربعة أوامر "ap...." أخرى وهي cheb1ap، و cheb2ap، و ellipap، و besselap تستخدم في تصميم المرشحات التماثلية المثالية من الأنواع المختلفة عن بتروورث. الأنواع الأخرى من المرشحات التماثلية المثالية هي المرشح شيبيشيف، والمرشح البيضاوي، والمرشح بيسيل. كل واحد من هذه المرشحات يعمل على أمثلة أداء المرشح تبعاً لشروط معينة مختلفة.

المرشح شيبيشيف يشابه المرشح بتروورث ولكنه له درجة إضافية من حرية التصميم كما في شكل (١٥.٤).



شكل رقم (١٥.٤) مقدار الاستجابة الترددية للمرشحات المثالية بتروورث، و شيبيشيف، والبيضاوية

يطلق على المرشح بتروورث بأنه المرشح الأعظم استقامة أو تسطيحاً؛ لأنه يتزايد في كل من مجالي المرور والإعاقة وتقترب استجابته من الاستقامة في مجال المرور مع زيادة درجته. هناك نوعان من المرشح شيبيشيف وهما النوع الأول والنوع الثاني. النوع الأول من المرشح شيبيشيف تكون له استجابة ترددية ليست مستمرة في مجال المرور ولكنها مستمرة في مجال الإعاقة. استجابته الترددية تتردد (تتغير ارتفاعاً وانخفاضاً مع التردد) في مجال المرور. وجود هذه التذبذبات في مجال المرور ليست مرغوبة في حد ذاتها ولكنها تسمح بأن يكون العبور من مجال المرور إلى مجال

الإعاقة أسرع من نظيره في المرشح بترورث، الذي من الدرجة نفسها. بمعنى آخر أننا ضحينا باستمرارية الاستجابة الترددية في مجال المرور في مقابل أن نضيق مجال العبور (الانتقال من مجال المرور إلى مجال الإعاقة). كلما نسمح بتذبذبات أكثر في مجال المرور، كان مجال العبور أضيق. النوع الثاني من المرشح شيبيشيف هو ببساطة عكس النوع الأول، له مجال مرور مستمر أو منبسط وهناك تذبذبات في مجال الإعاقة، تسمح أيضاً بأن يكون هذا المرشح له مجال عبور أضيق من نظيره في المرشح بترورث الذي من الدرجة نفسها.

المرشح البيضاوي به تذبذبات في كل من مجالي المرور والإعاقة، ولدرجة المرشح نفسها فإنه يكون له مجال عبور أضيق من كل من نوعي المرح شيبيشيف. لقد تم أمثلة مرشح بيسيل على أساس مختلف. لقد تمت أمثلته على أساس خطية الطور أو الزاوية في مجال المرور بدلاً من أن تكون الأمثلة على أساس استمرارية المقدار في مجال المرور أو مجال الإعاقة أو على أساس مجال العبور الضيق.

الصورة العامة لتصميم كل نوع من هذه المرشحات في ماتلاب كما يلي:

```
[z,p,k] = cheb1ap(N,Rp) ;
[z,p,k] = cheb2ap(N,Rs) ;
[z,p,k] = ellipap(N,Rp,Rs) ;
[z,p,k] = besselap(N) ;
```

حيث N هي درجة المرشح، و Rp هي الذبذبات المسموح بها في مجال المرور بالديسبل dB، و Rs هي الذبذبات المسموح بها في مجال الإعاقة بالديسبل أيضاً.

بمجرد تصميم المرشح يمكن إيجاد استجابته الترددية باستخدام إما الأمر bode الذي تم تقديمه فيما سبق، باستخدام الأمر freqs. الصورة العامة للدالة freqs هي كما يلي:

```
H=freqs(num , den, ω)     ;
```

حيث H هي متجه الاستجابة عند النقاط الحقيقية على المحور الحقيقي الزاوي في المتجه ω، ومتجهات البسط والمقام تحوي معاملات الـ s في البسط والمقام لدالة عبور المرشح.

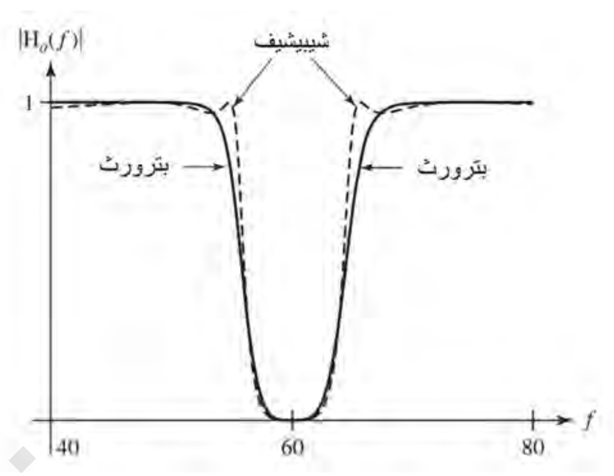
مثال ١٥.١

مقارنة بين مرشح بترورث معوق لمجال من الترددات من الدرجة الرابعة وآخر شيبيشيف باستخدام ماتلاب

باستخدام ماتلاب، صمم مرشح بترورث منفذاً للترددات المنخفضة من الدرجة الرابعة ومطبعاً، حوِّلْ هذا المرشح إلى آخر غير مطبع، معوقاً لمجال من الترددات بتردد مركزي 60Hz وعرض مجال مقداره 10Hz، ثم قارن بين الاستجابة الترددية لهذا المرشح مع آخر شيبيشيف من النوع الأول معوقاً لمجال من الترددات بنفس الدرجة والترددات الركنية وتذبذبات في مجال المرور الذي مقداره 0.3dB.

```
% تصميم المرشح بترورث
% تصميم مرشح بترورث من الدرجة الرابعة مطبع ووضع الأصفار والأقطاب والتكبير
% zb, pb, kb في المتجهات
[zb,pb,kb] = buttap(4) ;
% نستخدم أدوات النظام في ماتلاب للحصول على متجهات معاملات البسط والمقام
% numb and denb
[numb,denb] = tfdata(zpk(zb,pb,kb),'v') ;
% وضع التردد المركزي الدوري وعرض المجال
% ثم وضع التردد المركزي الزاوي وعرض المجال الزاوي
f0 = 60 ; fbw = 10 ; w0 = 2*pi*f0 ; wbw = 2*pi*fbw ;
% تحويل البترورث المنفذ للترددات المنخفضة إلى بترورث معوق لمجال من الترددات
[numbsb,denbsb] = lp2bs(numb,denb,w0,wbw) ;
% توليد متجه الترددات الدورية لاستخدامه في رسم الاستجابة الترددية
% ثم توليد متجه الترددات الزاوية المقابل ثم حساب الاستجابة الترددية
wbsb = 2*pi*[40:0.2:80]' ;
Hbsb = freqs(numbsb,denbsb,wbsb) ;
% تصميم المرشح شيبيشيف
% تصميم مرشح شيبيشيف منفذ للترددات المنخفضة مطبع من الدرجة الرابعة
% zc, pc, kc ووضع الأصفار والأقطاب والتكبير في المتجهات
[zc,pc,kc] = cheb1ap(4,0.3) ; wc = wb ;
% استخدام أدوات النظام في ماتلاب للحصول على متجهات معاملات البسط والمقام
% numc , denc
[numc,denc] = tfdata(zpk(zc,pc,kc),'v') ;
% تحويل الشيبيشيف المنفذ للترددات المنخفضة إلى آخر معوق لمجال من الترددات
[numbsc,denbsc] = lp2bs(numc,denc,w0,wbw) ;
% استخدام متجهات التردد الزاوي نفسها المستخدمة مع البترورث
% تصميم وحساب الاستجابة الترددية للمرشح شيبيشيف المعوق لمجال من الترددات
wbsc = wbsb ; Hbsc = freqs(numbsc,denbsc,wbsc) ;
```

مقدار الاستجابات الترددية تمت مقارنتها في شكل (١٥.٥). لاحظ أن استجابة المرشح بترورث يكون انسيابياً أو مستمراً في مجال المرور بينما المرشح شيبيشيف ليس كذلك، ولكن المرشح شيبيشيف له ميل أسرع لمنحنى مجال العبور بين مجالي المرور والإعاقة وله أيضاً إعاقة أفضل قليلاً في مجال الإعاقة.



شكل رقم (١٥.٥) مقارنة بين مقدار الاستجابة الترددية لمرشح بترورث وآخر شيبيشيف

(١٥.٣) المرشحات الرقمية

تحليل وتصميم المرشحات التماثلية يعتبر من الموضوعات الكبيرة والمهمة. على الدرجة نفسها من الأهمية (وقد يكون أكثر أهمية) يكون موضوع تصميم المرشحات الرقمية التي تحاكي بعض الأنواع الشائعة من المرشحات التماثلية القياسية. تقريباً كل الأنظمة المتقطعة زمنياً يمكن اعتبارها مرشحات، بمفهوم أن لها استجابات ترددية لا تكون ثابتة مع التردد.

محاكاة المرشحات التماثلية

هناك طرق قياسية مثلي عديدة لتصميم المرشحات التماثلية. واحدة من الطرق الشهيرة لتصميم المرشحات الرقمية هي محاكاة المرشحات التماثلية المثبتة. كل المرشحات التماثلية القياسية الشائعة الاستخدام تكون لها دالة عبور في النطاق s وهي نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s ولذلك يكون لها استجابة صدمة تكون موجودة لأزمنة لا نهائية. هذا النوع من استجابة الصدمة يسمى استجابة الصدمة غير المحدودة الزمن infinite duration impulse response, IIR. العديد من الطرق التي تحاكي المرشحات التماثلية بمرشحات رقمية يكون لها استجابة صدمة غير محدودة الزمن، وهذه الأنواع من المرشحات الرقمية تسمى المرشحات IIR. طريقة أخرى شهيرة لتصميم المرشحات الرقمية باستخدام استجابة الصدمة المحدودة الزمن finite duration impulse response, FIR وهذه المرشحات تسمى المرشحات FIR.

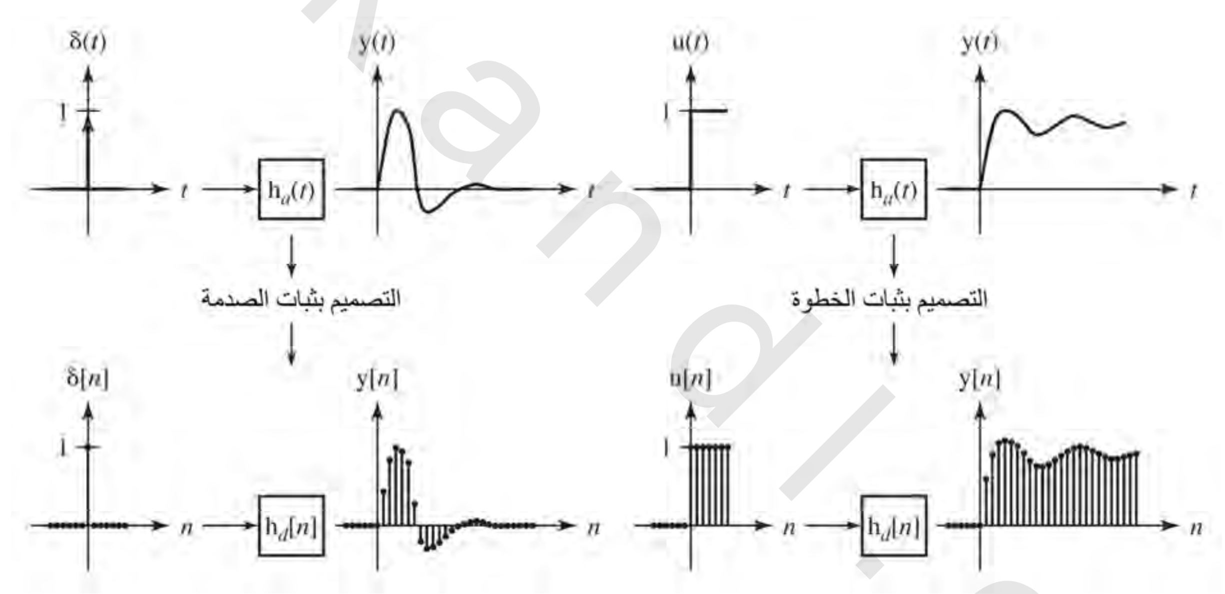
في الشرح التالي لمحاكاة المرشحات التماثلية باستخدام المرشحات الرقمية سنرمز لاستجابة الصدمة للمرشح التماثلي بالرمز $h_a(t)$، ودالة العبور له ستكون $H_a(s)$، واستجابة الصدمة للمرشحات الرقمية ستكون $h_d[n]$، ودالة العبور لها ستكون $H_d(z)$.

طرق تصميم المرشحات

تصميم المرشحات IIR

طرق النطاق الزمني

التصميم بثبات الصدمة impulse invariant : أحد الطرق لتصميم المرشحات الرقمية هي أن نجعل استجابة المرشح الرقمي للإثارة الرقمية القياسية تساوي نسخة معيننة من استجابة المرشح التماثلي للإثارة القياسية التماثلية المقابلة في الزمن المستمر. في حالة التصميم مع ثبات الصدمة فإننا نجعل استجابة المرشح الرقمي لوحدة الصدمة المتقطعة زمنياً تكون نسخة معيننة لاستجابة المرشح التماثلي لوحدة الصدمة المستمرة زمنياً. التصميم بثبات الخطوة يجعل استجابة المرشح الرقمي لوحدة التتابع تساوي نسخة معيننة من استجابة المرشح التماثلي لوحدة الخطوة. كل واحدة من هذه الطرق التصميمية تعطي مرشحاً IIR كما في شكل (١٥.٦).



شكل رقم (١٥.٦) طرق تصميم المرشحات الرقمية باستخدام ثبات الصدمة وثبات الخطوة

نحن نعرف من نظرية العيننة ، أنه يمكننا أن نأخذ عينات صدمية من استجابة الصدمة للمرشح التماثلي $h_a(t)$ لنحصل على $H_\delta(t)$ التي لها تحويل لابلاس $H_\delta(s)$ ولها CTFT على الصورة التالية :

$$H_\delta(j\omega) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j(\omega - k\omega_s)\right)$$

حيث $H_a(s)$ هي دالة عبور المرشحات التماثلية و $\omega_s=2\pi f_s$. نحن نعرف أيضاً أنه يمكننا عيننة $h_a(t)$ لنحصل على $h_d[n]$ التي لها تحويل z يساوي $H_d(z)$ ولها DTFT على الصورة التالية :

$$H_d(e^{j\Omega}) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(jf_s(\Omega - 2\pi k)\right) \qquad \text{المعادلة رقم (١٥.١)}$$

لذلك، فمن الواضح أن الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي هي مجموع الصور المستعارة الموزونة أو المضروبة في ثابت للاستجابة الترددية للمرشح التماثلي. كمثال على التصميم بالثبات الصدمي، سنفترض أن $H_a(s)$ هي دالة العبور للمرشح بترورث من الدرجة الثانية المنفذ للترددات المنخفضة والذي له معامل تكبير عند الترددات المنخفضة يساوي A وتردد القطع هو ω_c راديان على الثانية:

$$H_a(s) = \frac{A\omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\omega_c s+\omega_c^2}$$

فبالتالي فإن تحويل لابلاس العكسي لهذه الدالة سيكون:

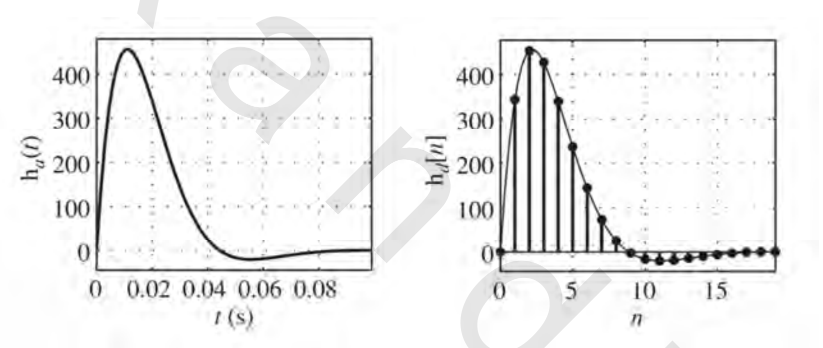
$$H_a(t) = \sqrt{2}\omega_c e^{-\omega_c/\sqrt{2}} sin(\omega_c t/\sqrt{2})u(t)$$

الآن سنقوم بعينة هذه الدالة بالمعدل f_s على الصورة التالية وكما في شكل (١٥.٧):

$$H_d[t] = \sqrt{2}\omega_c e^{-\omega_c nT_s/\sqrt{2}} sin(\omega_c nT_s/\sqrt{2})u[t]$$

وبالتالي:

$$H_d(z) = \sqrt{2}A\omega_c \frac{ze^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} sin(\omega_c T_s/\sqrt{2})}{z^2-2e^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} cos(\omega_c T_s/\sqrt{2})z+e^{-2\omega_c T_s/\sqrt{2}}}$$



شكل رقم (١٥.٧) استجابات الصدمة للمرشح التماثلي والرقمي

أو:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \sqrt{2}A\omega_c \frac{e^{j\Omega}e^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} sin(\omega_c T_s/\sqrt{2})}{e^{j2\Omega}-2e^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} cos(\omega_c T_s/\sqrt{2})e^{j\Omega}+e^{-2\omega_c T_s/\sqrt{2}}}$$ المعادلة رقم (١٥.٢)

بمساواة المعادلتين (١٥.١) و (١٥.٢) نحصل على:

$$H_d(e^{j\Omega}) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A\omega_c^2}{[jf_s(\Omega-2\pi k)]^2+j\sqrt{2}\omega_c f_s(\Omega-2\pi k)+\omega_c^2}$$

$$= \sqrt{2}A\omega_c \frac{e^{j\Omega}e^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} sin(\omega_c T_s/\sqrt{2})}{e^{j2\Omega}-2e^{-\omega_c T_s/\sqrt{2}} cos(\omega_c T_s/\sqrt{2})e^{j\Omega}+e^{-2\omega_c T_s/\sqrt{2}}}$$

إذا وضعنا A=10، و ω_c=100 وقمنا بأخذ العينات بالمعدل 200 عينة/الثانية، سنحصل على:

$$H_d(e^{j\Omega}) = 2000 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[j2(\Omega-2\pi k)]^2+j2\sqrt{2}(\Omega-2\pi k)+1}$$

أو:

$$H_d(e^{j\Omega}) = 1000\sqrt{2}\frac{e^{j\Omega}e^{-1/2\sqrt{2}}sin(1/2\sqrt{2})}{e^{j2\Omega}-2e^{-1/2\sqrt{2}}cos(1/2\sqrt{2})e^{j\Omega}+e^{-1/\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{343.825e^{j\Omega}}{e^{j2\Omega}-1.31751e^{j\Omega}+0.49306}$$

للتحقق من ذلك قارن الصورتين عندما $\Omega=0$.

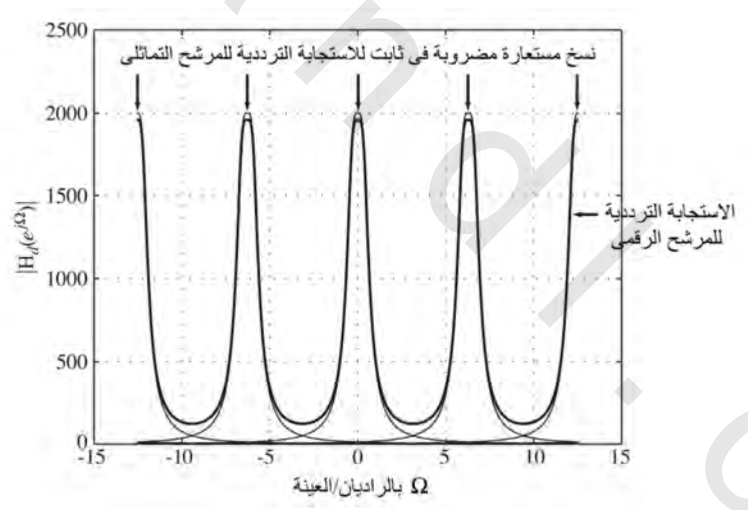
شكل (١٥.٨) يبين الاستجابة الترددية الكاملة للمرشح الرقمي. الخط الثقيل يمثل الاستجابة الترددية الحقيقية والخطوط الخفيفة تمثل النسخ المستعارة المنفردة للاستجابة الترددية للمرشح التماثلي. الفرق بين استجابة المرشح التماثلي عند التردد صفر واستجابة المرشح الرقمي عند التردد صفر أيضاً تكون حوالي 2%- نتيجة تأثير عملية النسخ المستعار.

هذا المرشح يمكن بناؤه من دالة العبور الخاصة به بالطريقة المباشرة II كما يلي :

$$H_d(z) = \frac{Y_d(z)}{X_d(z)} = \frac{343.825z}{z^2-1.31751z+0.49306}$$

أو :

$$z^2Y_d(z) - 1.31751zY_d(z) + 0.49306Y_d(z) = 343.825zX_d(z)$$



شكل رقم (١٥.٨) الاستجابة الترددية لمرشح رقمي توضح تأثيرات النسخ المستعار

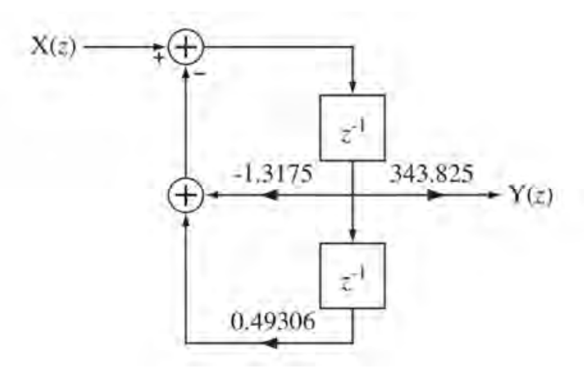
بإعادة ترتيب المعادلة السابقة والحل للحصول على $Y_d(z)$:

$$Y_d(z) = 343.825z^{-1}X_d(z) + 1.31751z^{-1}Y_d(z) - 0.49306z^{-2}Y_d(z)$$

بإجراء تحويل z العكسي :

$$y_d[n] = 343.825x_d[n-1] + 1.31751y_d[n-1] - 0.49306y_d[n-2]$$

انظر شكل (١٥.٩).



شكل رقم (١٥.٩) مخطط صندوقي لمرشح رقمي منفذ للترددات المنخفضة مصمم باستخدام طريقة ثبات الصدمة

لكي نبين دقة الطريقة السابقة، سنفترض المرشح التماثلي من الدرجة الأولى المنفذ للترددات المنخفضة الذي له دالة عبور كالتالي:

$$H_a(s) = \frac{A\omega_c}{s+\omega_c} \Rightarrow H_a(j\omega) = \frac{A\omega_c}{j\omega+\omega_c}$$

واستجابة الصدمة له ستكون:

$$H_a(t) = A\omega_c e^{-\omega_c t}u(t)$$

بأخذ العينات بالمعدل f_s لتكوين $h_d[n] = Aw_c e^{-w_c n T_s}u[n]$، وبالتالي:

$$H_d(z) = A\omega_c \frac{z}{z-e^{-\omega_c T_s}} \Rightarrow H_d(e^{j\Omega}) = A\omega_c \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-e^{-\omega_c T_s}}$$ المعادلة رقم (١٥.٣)

ويمكن كتابة الاستجابتين الترددتين في الصورتين المتكافئتين التاليتين:

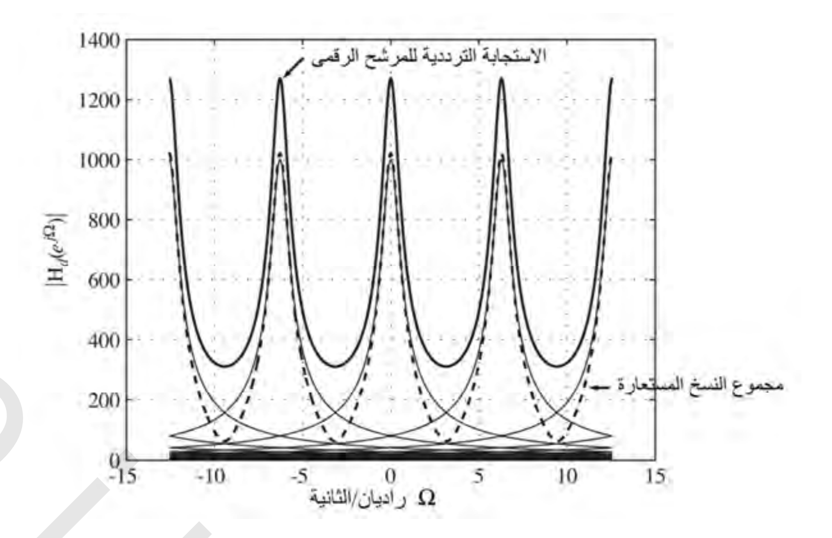
$$H_d(e^{j\Omega}) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A\omega_c}{jf_s(\Omega-2\pi k)\omega_c+\omega_c} = A\omega_c \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-e^{-\omega_c T_s}}$$

بفرض $a=10$، و $w_c=50$، و $f_s=100$ وسنتحقق من التساوي عند $\Omega=0$:

$$f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A\omega_c}{jf_s(\Omega-2\pi k)\omega_c+\omega_c} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{50000}{-j200\pi k+50} = 1020.7$$

$$A\omega_c \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-e^{-\omega_c T_s}} = 500\frac{1}{1-e^{-1/2}} = 1270.7$$

هاتان النتيجتان، من المفروض أن تكونا متساويتين، ولكنهما يختلفان بحوالي 25% عند التردد $\Omega=0$. شكل (١٥.١٠) يبين الاستجابتين الترددتين.



شكل رقم (١٥.١٠) استجابة المرشح الرقمي توضح وجود خطأ ظاهر بين الاستجابتين الترددتين اللتين يجب أن تكونا متساويتين

السؤال هنا بالطبع هو لماذا تختلف الاستجابتان ؟ هذا الخطأ يأتي من العبارة السابقة بأن استجابة الصدمة للمرشح الرقمي التي تم الحصول عليها عن طريق عيننة استجابة الصدمة للمرشح التماثلي تكون على الصورة $h_d[n] = A\omega_c e^{-\omega_c n T_s} u[n]$. استجابة الصدمة التماثلية بها عدم اتصال عند t=0. على ذلك ماذا ستكون قيمة العينة عند هذه النقطة ؟ استجابة الصدمة التي على الصورة $h_d[n] = A\omega_c e^{-w_c n T_s} u[n]$ تعني أن قيمة العينة عند t=0 هي $A\omega_c$. لماذا لا تكون قيمة العينة تساوي صفراً حيث إن عدم الاتصال يمتد من الصفر حتى $A\omega_c$ ؟ إذا استبدلنا قيمة العينة الأولى $A\omega_c$ بالقيمة $A\omega_c/2$ التي هي القيمة المتوسطة لاستجابة الصدمة عند t=0 فإن شكلي الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي يتوافقان تماماً. لذلك، فإنه يبدو أنه عند أخذ عينات عند نقطة عدم اتصال، فإن أفضل طريقة هي أخذ القيمة المتوسطة للعينة عند هذه النقطة. إن ذلك يتوافق مع نظرية تحويل فورير التي تنص على أن تحويل فورير لإشارة غير متصلة يأخذ عادة القيمة المتوسطة عند نقطة الاتصال. هذه المشكلة لم تظهر في التحليل السابق للمرشح بترورث من الدرجة الثانية المنفذ للترددات المنخفضة؛ لأن استجابة الصدمة له كانت متصلة.

بمعلومية الخطأ في تصميم المرشح الرقمي من الدرجة الأولى المنفذ للترددات المنخفضة نتيجة أخذ العينات عند نقاط عدم الاتصال، فإنه من الممكن أن نقترح لتجنب هذه المشكلة، أن نؤخر ببساطة استجابة الصدمة للمرشح التماثلي بكمية زمنية بسيطة (أقل من الزمن بين العينات) وتجنب أخذ العينة عند نقطة عدم الاتصال. يمكن تنفيذ ذلك وشكلي الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي سيتوافقان مرة أخرى.

يحتوي صندوق أدوات الإشارة في ماتلاب على الأمر impinvar التي تقوم بتصميم مرشح رقمي بطريقة ثبات الصدمة. الصورة العامة لهذا الأمر هي:

```
[bd, ad]=impinvar(ba, aa, fs)
```

حيث ba هي متجه معاملات المتغير s في بسط دالة عبور المرشح التماثلي، و aa هي متجه معاملات المتغير s في مقام دالة عبور المرشح نفسه ، و f_s هي معدل أخذ العينات بالهرتز، bd هي متجه معاملات المتغير z في بسط دالة عبور المرشح الرقمي و ad هي متجه معاملات المتغير z في مقام دالة عبور المرشح الرقمي. دالة العبور لن تكون مماثلة تماماً لنتيجة التصميم باستخدام تصميم الثبات الصدمي المعطاة هنا. سيكون هناك اختلاف في معامل التكبير وإزاحة زمنية، ولكن شكل استجابة الصدمة ستكون هي نفسها. انظر مثال (١٥.٢).

مثال ١٥.٢

تصميم مرشح رقمي لمجال ترددات باستخدام طريقة ثبات الصدمة

باستخدام طريقة التصميم بثبات الصدمة، صمِّمْ مرشحاً رقمياً لمحاكاة مرشح تماثلي من الدرجة الثانية منفذ لمجال من الترددات وله معامل تكبير الوحدة وتردد ركني 150Hz ، و 200Hz ومعدل عينة 1kHz. دالة العبور ستكون على الصورة:

$$H_a(s) = \frac{9.87\times10^4 s^2}{s^4+444.3s^3+2.467\times10^6 s^2+5.262\times10^8 s+1.403\times10^{12}}$$

وستكون استجابة الصدمة على الصورة:

$$h_a(t) = [246.07e^{-122.41t}cos(1199.4t-1.48) + 200.5e^{-99.74t}cos(977.27t+1.683)]u(t)$$

قارن بين الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي والمرشح الرقمي.

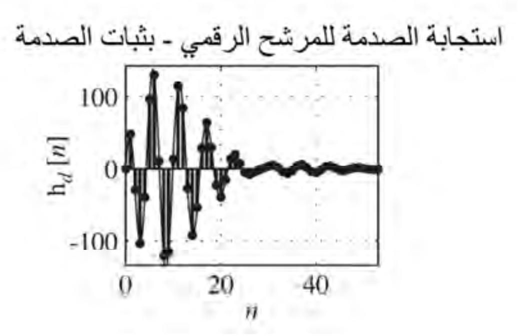
استجابة الصدمة هذه هي مجموع اثنين من الدوال الجيبية المتناقصة أسياً مع الزمن وبثابت زمني مقداره 8.2ms و 10ms، وترددات الدالة الجيبية هي 1199.4/2π≈190.9Hz، و 977.27/2π≈155.54Hz. للوصول إلى محاكاة أكثر دقة يمكننا اختيار معدل عينة بحيث تكون الدالة الجيبية متخطية لحد العينة وأن يكون هناك العديد من العينات للدالة الأسية خلال كل ثابت زمني. افترض أن معدل أخذ العينات يساوي 1kHz ، بالتالي ستكون استجابة الصدمة المتقطعة زمنياً كما يلي:

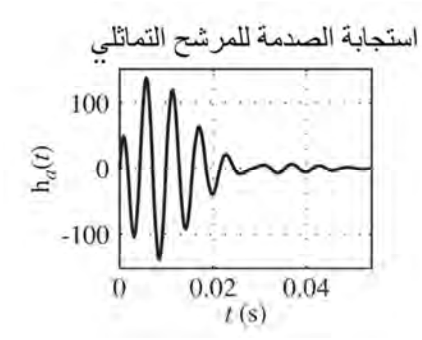
$$h_a[t] = [246.07e^{-0.12241n}cos(1.1994n-1.48) + 200.5e^{-0.9974n}cos(0.97727t+1.683)]u[t]$$

تحويل z لاستجابة الصدمة المتقطعة زمنياً ستكون هي دالة العبور:

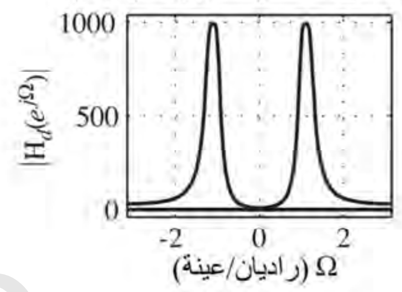
$$H_a(z) = \frac{48.4z^3-107.7z^2+51.46z}{z^4+1.655z^3+2.252z^2-51.319z+0.6413}$$

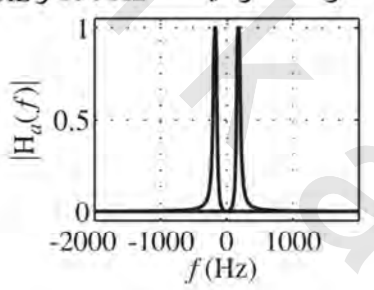
شكل (١٥.١١) يبين استجابة الصدمة للمرشح الرقمي والتماثلي.



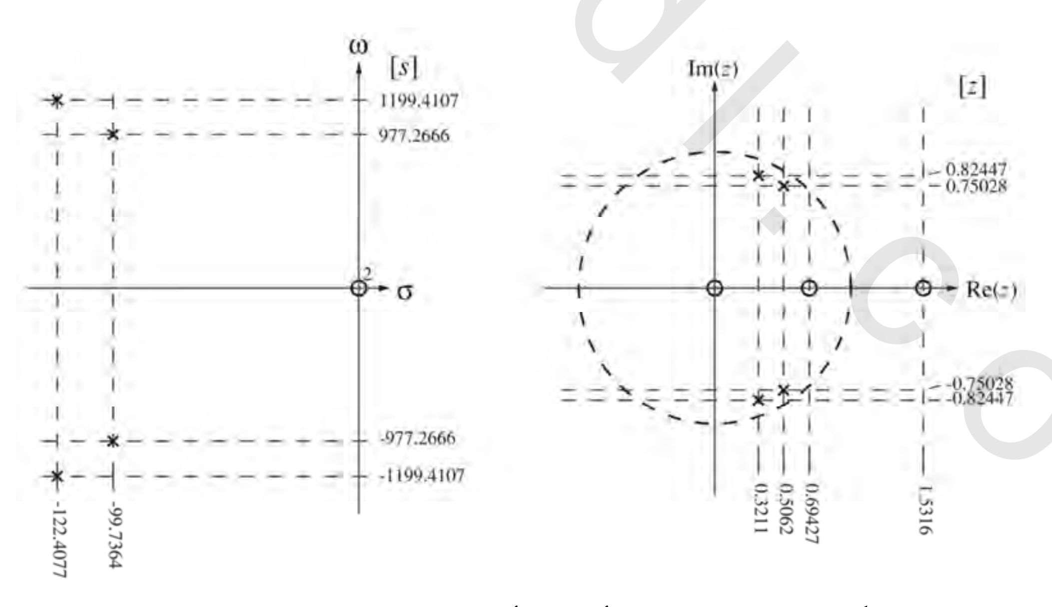


شكل رقم (١٥.١١) استجابات الصدمة الرقمية والتماثلية





شكل رقم (١٥.١٢) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة ثبات استجابة الصدمة



شكل رقم (١٥.١٣) مخطط الأقطاب والأصفار للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له بطريقة ثبات الصدمة

مقدار الاستجابات الترددية للمرشحين التماثلي والرقمي موضحتان في شكل (١٥.١٢) ومخططات الأقطاب والأصفار لكل منهما موضحة في شكل (١٥.١٣).

شيئان مهمان فوريان يظهران الآن بخصوص هذا التصميم. الأول، أن المرشح التماثلي تكون له استجابة صفرية عند التردد f=0 بينما المرشح الرقمي لا يكون كذلك. استجابة المرشح الرقمي عند التردد Ω=0 تكون حوالي ٨٥٪ من قمة استجابته الترددية. حيث أن هذا المرشح يمثل مرشح منفذ لمجال من الترددات، فإن هذه تكون نتيجة غير مرغوب فيها. معامل تكبير المرشح الرقمي يكون أكبر كثيراً من معامل تكبير المرشح التماثلي. يمكن جعل معامل التكبير متساوياً وكل منهما يساوي تكبير المرشح التماثلي ببساطة عن طريق ضبط معامل الضرب في معادلة الـ $H_d(z)$. أيضاً على الرغم من أن الاستجابة الترددية تكون قمتها عند التردد الصحيح، فإن قمع المرشح الرقمي في مجال القمع أو الوقف ليس بجودة نظيره في المرشح التماثلي. إذا تم استخدام معدل عينة أعلى، فإن هذا القمع من الممكن أن يكون أفضل.

يمكن عمل ذلك من خلال الأمر impinvar في ماتلاب كما يلي:

```
>> [bd,ad] = impinvar([9.87e4 0 0],[1 444.3 2.467e6 5.262e8 1.403e12],1000)
bd =
  -0.0000 0.0484 -0.1077 0.0515
ad =
   1.0000 -1.6547 2.2527 -1.3188 0.6413
```

دالة العبور الناتجة ستكون:

$$H_M(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.0484z^2 - 0.1077z + 0.0515}{z^4 - 1.655z^3 + 2.252z^2 - 1.319z + 0.6413}$$

قارن هذا مع النتيجة السابقة:

$$H_d(z) = \frac{48.4z^3 - 107.7z^2 + 51.46z}{z^4 - 1.655z^3 + 2.252z^2 - 1.319z + 0.6413}$$

سنجد العلاقة بينهما ستكون:

$$H_M(z) = (z^{-1}/f_s)H_d(z)$$

لذلك فإن تصميم المرشح بثبات الصدمة باستخدام ماتلاب تقسم دالة العبور على معدل أخذ العينات، وتغير معامل تكبير المرشح وتضرب دالة العبور في z^{-1}، مما يسبب تأخير الاستجابة بمقدار وحدة من الزمن المتقطع. الضرب في ثابت والإزاحة الزمنية هما الشيئان اللذات يمكن عملهما على أى إشارة بدون تشويهها. لذلك فإن استجابتي الصدمة، على الرغم من أنهما غير متماثلتين تماماً، فإن لهما الشكل نفسه.

تصميم ثبات الخطوة: طريقة قريبة من ذلك هي تصميم المرشحات الرقمية باستخدام طريقة ثبات الخطوة. في هذه الطريقة يتم تصميم المرشح الرقمي بحيث تكون استجابة وحدة التتابع للمرشح الرقمي متوافقة تماماً مع استجابة الخطوة للمرشح التماثلي عند لحظات أخذ العينات. إذا كانت دالة العبور للمرشح التماثلي هي $H_a(s)$، فإن تحويل لابلاس لاستجابة الخطوة لهذا المرشح ستكون $H_a(s)/s$. استجابة وحدة الخطوة هي تحويل لابلاس العكسي:

$$h_{-1a}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H_a(a)}{s}\right)$$

بالتالي ستكون استجابة وحدة التتابع المتقطعة زمنياً على الصورة:

$$h_{-1d}[n] = h_{-1a}(nT_s)$$

تحويل z لها يساوي حاصل ضرب دالة العبور في النطاق z وتحويل z لوحدة التتابع:

$$z(h_{-1d}[n]) = \frac{z}{z-1}H_d(z)$$

يمكننا أن نلخص ذلك بالقول التالي: بمعلومية دالة العبور في النطاق s وهي $H_a(s)$، فإنه يمكننا إيجاد دالة العبور المقابلة في النطاق z وهي $H_d(z)$ كما يلي:

$$\mathrm{H_d(z)} = \frac{z-1}{z}z\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H_a(s)}{s}\right)_{(t)\to(nT_s)\to[n]}\right)$$

في هذه الطريقة نقوم بأخذ عينات استجابة وحدة الخطوة للحصول على استجابة وحدة التتابع. إذا قمنا بأخذ العينات الصدمية لاستجابة الخطوة للمرشح التماثلي $h_{-1a}(t)$ لتكوين $h_{-1\delta}(t)$ التي لها تحويل لابلاس يساوي $H_{-1\delta}(s)$ و CTFT لها هو:

$$H_{-1\delta}(j\omega) = f_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_{-1a}\big(j(\omega - k\omega_s)\big)$$

حيث $H_{-1a}(s)$ هي تحويل لابلاس لاستجابة الخطوة للمرشح التماثلي و $\omega_s=2\pi f_s$. نحن نعرف أيضاً أنه يمكننا أن نأخذ عينات $h_{-1a}(t)$ لنكون $h_{-1d}[n]$ التي لها تحويل z يساوي $H_{-1d}(z)$ و DTFT لها هو:

$$H_{-1d}(e^{j\Omega}) = f_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_{-1a}\big(jf_s(\Omega - 2\pi k)\big) \qquad \text{المعادلة رقم (١٥.٤)}$$

وبذلك تكون العلاقة بين دالة العبور التماثلية والرقمية:

$$H_{-1d}(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1}H_d(e^{j\Omega})$$

و:

$$H_{-1a}(j\omega) = H_a(j\omega)/j\omega$$

$$H_d(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}}H_{-1d}(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}}f_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{H_a\big(jf_s(\Omega-2\pi k)\big)}{jf_s(\Omega-2\pi k)}$$

مثال ١٥.٣

تصميم مرشح رقمي منفذ لمجال من الترددات باستخدام طريقة ثبات الخطوة

باستخدام طريقة ثبات الخطوة، صممٍّ مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي الذي له دالة عبور هي نفسها التي في المثال ١٥.٢.

$$H_a(s) = \frac{9.87\times10^4 s^2}{s^4+444.3s^3+2.467\times10^6 s^2+5.262\times10^8 s+1.403\times10^{12}}$$

بمعدل أخذ العينات نفسها f_s=1kHz.

استجابة وحدة الخطوة ستكون:

$$h_{-1a}(t) = [0.2041e^{-122.408t}cos(1199.4t + 3.1312) + 0.2041e^{-99.74t}cos(977.27t + 0.01042)]u(t)$$

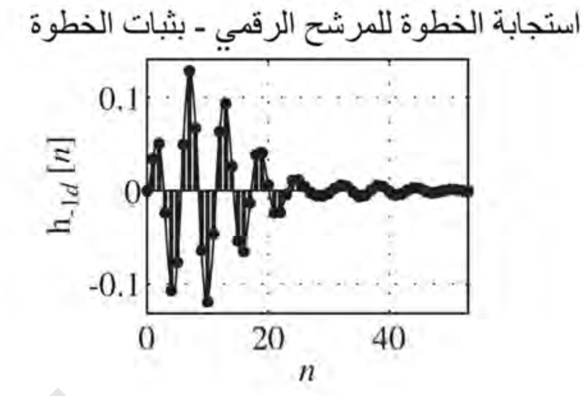
وستكون استجابة وحدة التتابع كما يلي:

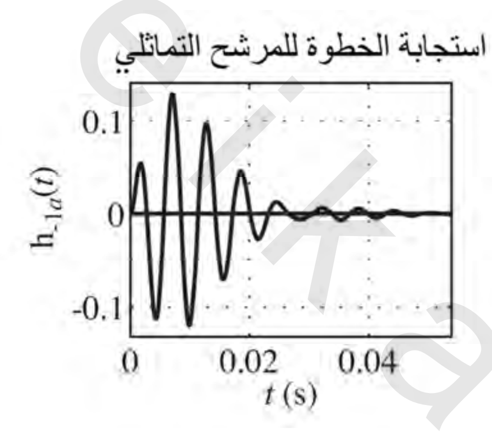
$$h_{-1d}[n] = [0.2041(0.8847)^n cos(1199.4n + 3.1312) + 0.2041(0.9051)^n cos(977.27n + 0.0102)]u[n]$$

ودالة عبور المرشح الرقمي ستكون :

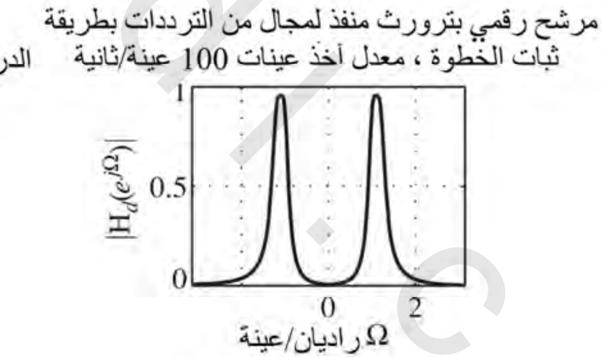
$$H_d(z) = \frac{0.03443z^3 - 0.03905z^2 - 1.139z + 0.6413}{z^4 - 1.655z^3 + 2.252z^2 - 1.319z + 0.6413}$$

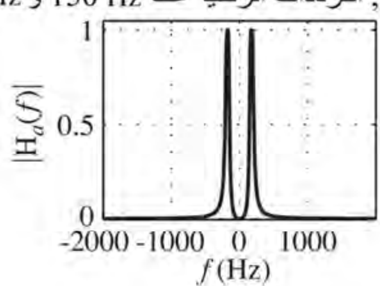
استجابات الخطوة، ومقدار الاستجابات الترددية، ومخططات الأقطاب والأصفار للمرشحات التماثلية والرقمية تمت مقارنتها في الأشكال (١٥.١٤) و (١٥.١٥) و (١٥.١٦).



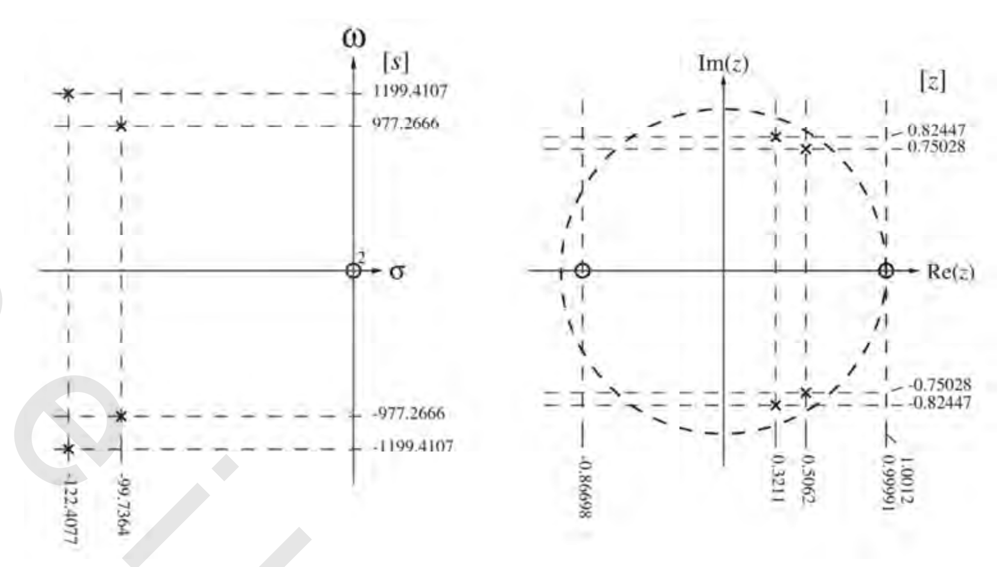


شكل رقم (١٥.١٤) استجابات الخطوة للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة ثبات الخطوة





شكل رقم (١٥.١٥) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له بطريقة ثبات الخطوة



شكل رقم (١٦.١٥) مخططات الأقطاب والأصفار للمرشح التماثلي ومثيله الرقمي باستخدام طريقة ثبات الخطوة

على العكس من طريقة ثبات الصدمة، فإن هذا المرشح الرقمي له استجابة صفرية عند $\Omega=0$. أيضاً، فإن قمة الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي في مجال العبور وقمة الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي في مجال العبور يختلفان عن بعضهما بأقل من 0.1%.

التصميم بالفروق المحددة: طريقة أخرى لتصميم المرشحات الرقمية لتحاكي المرشحات التماثلية هي بتقريب المعادلة التفاضلية التي تصف النظام الخطي بأخرى فرقية. الفكرة الأساسية في هذه الطريقة هي أن نبدأ بدالة عبور مرغوبة للمرشح التماثلي $H_a(s)$ ونوجد المعادلة الفرقية المقابلة لها في النطاق الزمني. بالتالي فإن التفاضلات المستمرة زمنياً يتم تقريبها بفروق محددة في الزمن المتقطع والتعبير الناتج من ذلك سيكون دالة عبور المرشح الرقمي التي تقارب دالة عبور المرشح التماثلي الأصلي. مثلا، افترض المعادلة التالية:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+a}$$

حيث إن دالة العبور تكون نسبة بين الاستجابة $Y_a(s)$ والإثارة $X_a(s)$:

$$\frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{1}{s+a}$$

بالتالي فإن:

$$Y_a(s)(s+a) = X_a(s)$$

بإجراء تحويل لابلاس العكسي للجانبين:

$$\frac{d}{dt}\left(y_a(t)\right) + a y_a(t) = x_a(t)$$

يمكن تقريب التفاضل بتعبيرات فرقية محددة مختلفة وكل اختيار منها يكون له تأثير مختلف قليلاً على تقريب المرشح الرقمي للمرشح التماثلي. سنفترض في هذه الحالة أن التفاضل يتم تقريبه بفرق أمامي كما يلي:

$$\frac{d}{dt}\left(y_a(t)\right) \cong \frac{y_d[n+1]-y_a[n]}{T_s}$$

وبالتالي ، فإن تقريب المعادلة التفاضلية بمعادلة فرقية سيكون كما يلي :

$$\frac{y_d[n+1]-y_d[n]}{T_s} + ay_d[n] = x_d[n]$$

والصور التكرارية المقابلة لهذه العلاقة ستكون :

$$y_d[n+1] = x_d[n]T_s + (1 - aT_s)y_d[n]$$

يمكن إيجاد دالة عبور المرشح الرقمي بإجراء تحويل z لهذه المعادلة كالتالي :

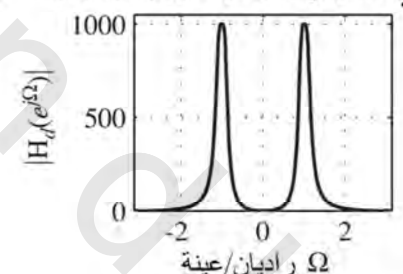
$$z(Y_d(z) - y_d[0]) = T_sX_d(z) + (1 - aT_s)Y_d(z)$$

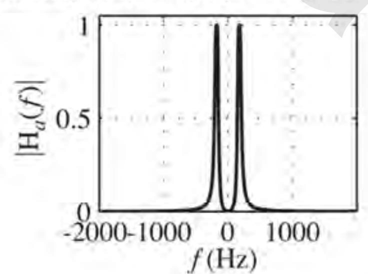
يتم حساب دوال العبور على أساس افتراض أن النظام يكون في البداية في الحالة المستقرة صفراً. لذلك فإن $y_d[0]=0$

وبالتالي يمكن كتابة :

$$H_d(z) = \frac{Y_d(z)}{X_d(z)} = \frac{T_s}{z-(1-aT_s)}$$ المعادلة رقم (١٥.٥)

شكل (١٥.١٧) يوضح بناء باستخدام المخطط الصندوقي للمرشح السابق.





شكل رقم (١٥.١٧) مخطط صندوقي لمرشح رقمي تم تصميمه عن طريق تقريب المعادلة التفاضلية بمعادلة فرقية باستخدام الفروق الأمامية

كان من الممكن أن يعتمد المرشح الرقمي على تقريب التفاضل بالفروق العكسية كما يلي :

$$\frac{d}{dt}(y_a(t)) \cong \frac{y_d[n]-y_a[n-1]}{T_s}$$

أو تقريب التفاضل بفرق مركزي كما يلي :

$$\frac{d}{dt}(y_a(t)) \cong \frac{y_d[n+1]-y_a[n-1]}{2T_s}$$

يمكن تعميم ذلك بمعلومية أن كل s في أي معادلة في النطاق s تمثل تفاضلاً في النطاق الزمني :

$$\frac{d}{dt}(x_a(t)) \overset{£}{\leftrightarrow} s\,X_a(s)$$

(للمرة الثانية نفترض أن النظام يكون في البداية في الحالة المستقرة صفراً). يمكن تقريب التفاضلات بفروق أمامية أو خلفية أو مركزية ،

$$\frac{d}{dt}(x_a(t)) \cong \frac{x_a(t+T_s)-x_a(t)}{T_s} = \frac{x_d[n+1]-x_d[n]}{T_s}$$

أو:

$$\frac{d}{dt}\left(x_a(t)\right) \cong \frac{x_a(t)-x_a(t-\mathrm{T}_s)}{\mathrm{T}_s} = \frac{x_d[n]-x_d[n-1]}{\mathrm{T}_s}$$

أو:

$$\frac{d}{dt}\left(x_a(t)\right) \cong \frac{x_a(t+\mathrm{T}_s)-x_a(t-\mathrm{T}_s)}{2\mathrm{T}_s} = \frac{x_d[n+1]-x_d[n-1]}{2\mathrm{T}_s}$$

تحويل z لهذه الفروق سيكون كما يلي:

$$\frac{x_d[n+1]-x_d[n]}{\mathrm{T}_s} \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z-1}{\mathrm{T}_s} x_d(z)$$

أو:

$$\frac{x_d[n]-x_d[n-1]}{\mathrm{T}_s} \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1-z^{-1}}{\mathrm{T}_s} X_d(z) = \frac{z-1}{z\mathrm{T}_s} X_d(z)$$

أو:

$$\frac{x_d[n+1]-x_d[n-1]}{2\mathrm{T}_s} \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{T}_s} X_d(z) = \frac{z^2-1}{z\mathrm{T}_s} X_d(z)$$

الآن يمكننا استبدال كل s في معادلة النطاق s بالنطاق z المقابل. بالتالي فإنه يمكننا تقريب دالة عبور النطاق s التي على الصورة:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+a}$$

باستخدام التقريب الأمامي للتفاضل نحصل على:

$$H_d(z) = \left(\frac{1}{s+a}\right)_{s\to\frac{z-1}{\mathrm{T}_s}} = \frac{1}{\frac{z-1}{\mathrm{T}_s}+a} = \frac{\mathrm{T}_s}{z-1+a\mathrm{T}_s} \qquad \text{المعادلة رقم (١٥.٦)}$$

وهي تساوي تماماً ما حصلنا عليه في المعادلة (١٥.٥)، وهذا يجنبنا عملية كتابة المعادلة التفاضلية والتعويض فيها عن كل تفاضل بالفرق المقابل.

هناك جانب مهم في طريقة تصميم المرشحات الرقمية بالفروق المحددة يجب أن نتذكره دائماً. من الممكن بهذه الطريقة تقريب مرشح تماثلي مستقر بآخر رقمي غير مستقر. إفترض دالة العبور في المعادلة (١٥.٥) كمثال. هذه المعادلة لها قطب عند $z=1-a\mathrm{T}_s$، بينما المرشح التماثلي كان قطبه عند $s=-a$. إذا كان المرشح التماثلي مستقراً عندما $a>0$، فإن $1-a\mathrm{T}_s$ يجب أن تكون عند الموضع $z=\mathrm{Re}(z)<1$ على المحور الحقيقي في المستوى z. إذا كانت $a\mathrm{T}_s$ أكبر من أو تساوي اثنين، فإن القطب في المستوى z سيكون خارج دائرة الوحدة وبالتالي سيكون المرشح الرقمي غير مستقر.

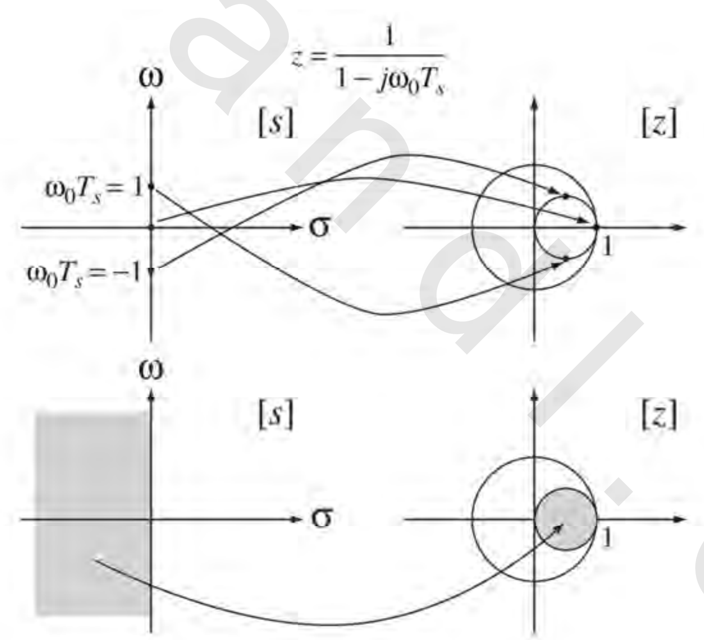
يمكن التعبير عن دالة عبور المرشح الرقمي في الكسور الجزيئية، بحيث تكون هناك كمية كسرية لكل قطب، وبعض هذه الأقطاب من الممكن أن يكون مركباً. القطب الذي عند $s=s_0$ في المستوى s ينتقل إلى قطب عند $z=1+s_0\mathrm{T}_s$ في المستوى z. وبالتالي فإن عملية النقل $s\to 1+s_0\mathrm{T}_s$ تنقل المحور ω في المستوى s إلى الخط $z=1$، والنصف الأيسر من المستوى s إلى داخل الدائرة $z=1$. لكي يكون النظام مستقراً فإن كل الأقطاب يجب أن تقع داخل دائرة الوحدة. لذلك

فإن عملية النقل هذه لن تضمن الحصول على مرشح رقمي مستقر. الثابت s_0 يتم تحديده بواسطة المرشح التماثلي ولا يمكن تغييرها. لذلك لكي نحل مشكلة عدم الاستقرار، فإننا نقلل T_s وهذا يعني زيادة معدل العينة.

إذا استخدمنا الفرق العكسي بدلاً من الفرق الأمامي في المعادلة (١٥.٦) سنحصل على دالة عبور المرشح الرقمي التالية:

$$H_d(z) = \left(\frac{1}{s+a}\right)_{s\to\frac{z-1}{zT_s}} = \frac{1}{\frac{z-1}{zT_s}+a} = \frac{zT_s}{z-1+azT_s} = \frac{T_s}{1+aT_s}\frac{zT_s}{z-1/(1+aT_s)}$$

الآن أصبح القطب عند $z=1/(1+aT_s)$. عملية النقل $a\to1/(1+aT_s)$ تنقل القيم الموجبة للـ a (للمرشحات التماثلية المستقرة) إلى المحور الحقيقي في المستوى z بين $z=0$ و $z=1$. بالتالي فإن القطب يكون داخل دائرة الوحدة وسيكون النظام مستقراً بصرف النظر عن قيمة كل من a و T_s. أي أنه عموماً، إذا كان المرشح التماثلي له قطب عند $s=s_0$، فإن المرشح الرقمي سيكون له قطب عند $z=1/(1-s_0T_s)$. إن ذلك سينقل المحور ω في المستوى s إلى دائرة في المستوى z يكون نصف قطرها يساوي ½ ومركزها عند $z=1/2$ وينقل كل النصف الأيسر من المستوى s إلى داخل هذه الدائرة كما في شكل (١٥.١٨).



شكل رقم (١٥.١٨) عملية النقل z=1/(1-s0Ts)

على الرغم من أن عملية النقل هنا تضمن الحصول على مرشح رقمي مستقر من مرشح تماثلي مستقر، إلا أنها تحد أيضاً من نوع المرشح الرقمي التي يمكن تصميمها بفاعلية باستخدام هذه الطريقة. المرشحات التماثلية المنفذة للترددات المنخفضة التي تقع أقطابها على المحور الحقيقي السالب في المستوى s تصبح مرشحات رقمية منفذة للترددات المنخفضة، تقع أقطابها على المحور الحقيقي للمستوى z في الفترة $0<z<1$. إذا كان المرشح التماثلي له قطب

عند $\sigma_0 \pm j\omega_0$ حيث $\omega_0 >> \sigma_0$، مما يعني أن المرشح التماثلي يستجيب بقوة لتنغيمات الترددات القريبة من ω_0، وإذا كانت $\omega_0 T_s > 1$ فإن أقطاب المستوى z لن تقع بالقرب من دائرة الوحدة واستجابتها لن تكون تقريباً بالقوة نفسها عند التنغيمات الترددية المقابلة المتقطعة زمنياً.

مثال ١٥.٤

تصميم مرشح رقمي لمجال من الترددات باستخدام طريقة الفروق المحددة

باستخدام طريقة التصميم بالمعادلة الفرقية مع الفروق العكسية، صَمِّمْ مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي في مثال ١٥.٢ الذي دالة عبوره كما يلي:

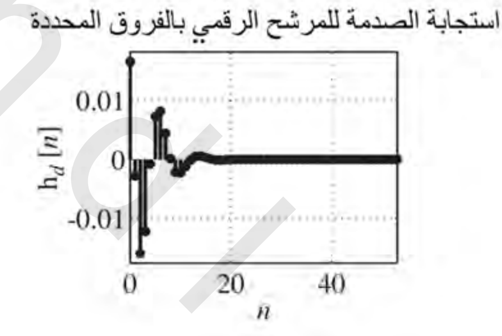
$$H_a(s) = \frac{9.87\times10^4 s^2}{s^4+444.3s^3+2.467\times10^6 s^2+5.262\times10^8 s+1.403\times10^{12}}$$

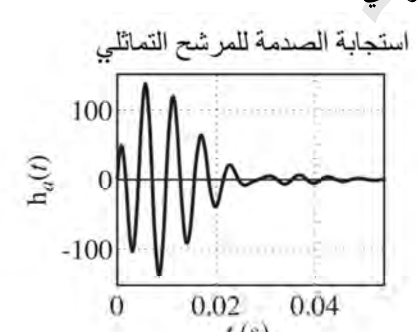
باستخدام معدل العينة نفسه f_s=1kHz . قارن بين الاستجابة الترددية للمرشحين.

إذا اخترنا نفس معدل العينة في مثال ١٥.٢ ، f_s=1000 ، فإن دالة العبور في النطاق z ستكون:

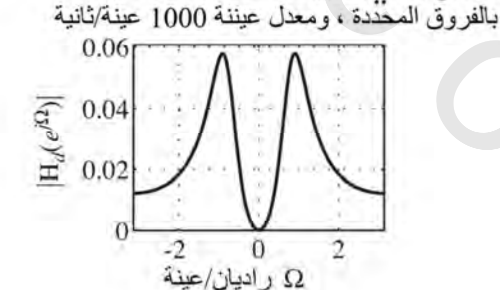
$$H_d(z) = \frac{0.169z^2(z-1)^2}{z^4-1.848z^3+1.678z^2-0.7609z+0.1712}$$

الأشكال (١٥.١٩) و(١٥.٢٠) و(١٥.٢١) توضح استجابات الصدمة، ومقدار الاستجابة الترددية، ومخططات الأقطاب والأصفار لكل من المرشح التماثلي والمرشح الرقمي للمقارنة.



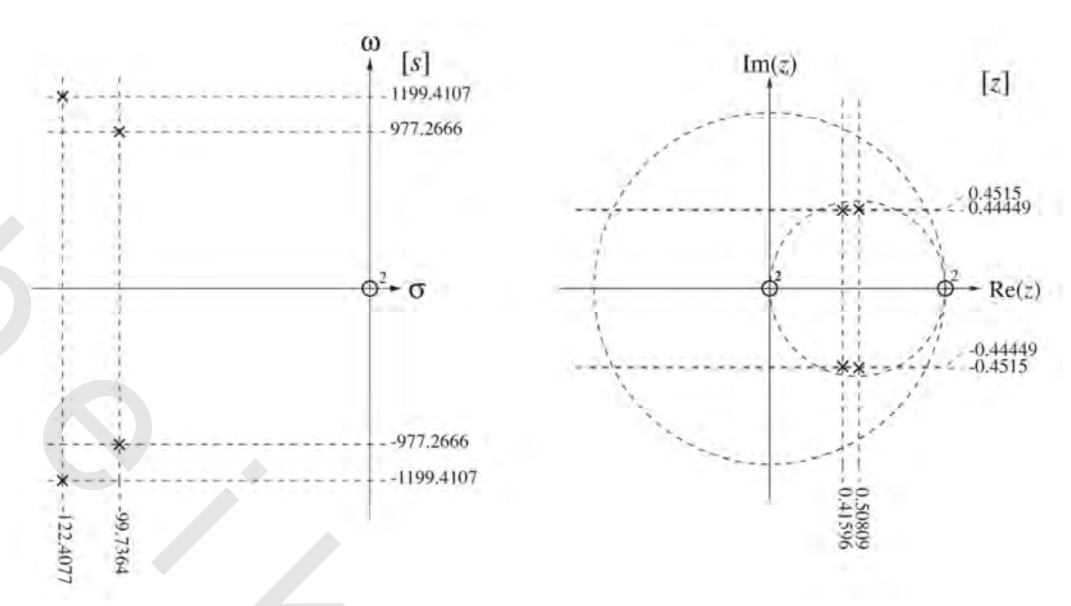


شكل رقم (١٥.١٩) استجابات الصدمة للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة الفروق المحددة



مرشح تماثلي بترورث منفذ لمجال من الترددات الدرجة 2، الترددات الركنية 150 Hz و 200 Hz

شكل رقم (١٥.٢٠) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة الفروق المحددة



شكل رقم (١٥.٢١) مخططات الأقطاب والأصفار للمرشح التماثلي ومحاكاته الرقمية باستخدام طريقة الفروق المحددة

استجابة الصدمة للمرشح الرقمي لا تشبه كثيراً استجابة الصدمة المعيننة للمرشح التماثلي وعرض مجال المرور للمرشح الرقمي يكون أكبر كثيراً، أيضاً فإن الإعاقة عند الترددات المرتفعة تكون أسوأ كثيراً، هذه النتيجة أسوأ كثيراً من الطريقتين السابقتين للتصميم.

مثال ١٥.٥

تصميم مرشح رقمي للترددات المنخفضة باستخدام طريقة الفروق المحددة

باستخدام طريقة التصميم بالمعادلات الفرقية مع الفروق الأمامية، صَمِّمْ مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي الذي له دالة العبور التالية:

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2+600s+4\times10^5}$$

استخدم معدل عينة f_s=500Hz.

دالة العبور في النطاق z ستكون كالتالي:

$$H_d(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T_s}\right)^2+600\frac{z-1}{T_s}+4\times10^5}$$

أو:

$$H_d(z) = \frac{T_s^2}{z^2+(600T_s-2)z+\left(1-600T_s+4\times10^5T_s^2\right)}$$

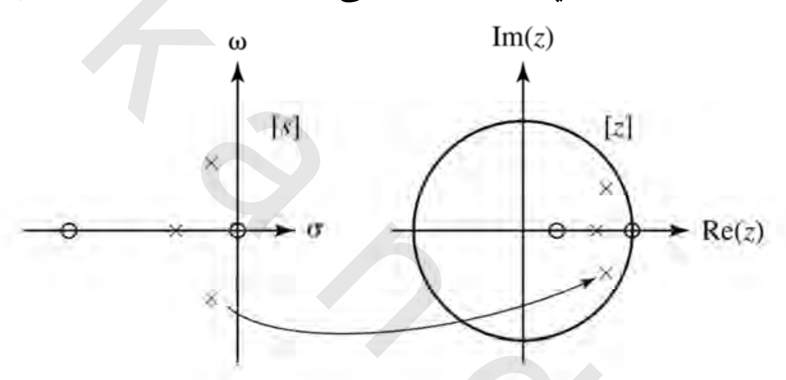
أو:

$$H_d(z) = \frac{4\times10^{-6}}{z^2-0.8z+1.4}$$

هذه النتيجة قد تبدو بسيطة ومباشرة ولكن أقطاب دالة العبور هذه في النطاق z تكون خارج دائرة الوحدة وبالتالي، فالمرشح غير مستقر، على الرغم من أن دالة العبور في النطاق s كانت مستقرة. يمكن استعادة استقرار المرشح عن طريق زيادة معدل العينة أو باستخدام طريقة الفروق العكسية.

طرق المجال الترددي

التعويض المباشر وتحويل z المتوافق: طريقة مختلفة لتصميم المرشحات الرقمية هي عن طريق التغيير المباشر في المتغير s إلى المتغير z الذي ينقل المستوى s إلى المستوى z، وينقل أقطاب وأصفار دالة العبور في المستوى s إلى الأماكن المناسبة المقابلة في المستوى z التي تحول المرشحات التماثلية المستقرة إلى مرشحات رقمية مستقرة. أشهر هذه الطرق التي تستخدم هذه الفكرة هي طريقة تحويل z المتوافق والتعويض المباشر، وطريقة التحويل ثنائي الخطية bilinear transformation. هذه الطريقة تعطي مرشحات من النوع IIR كما في شكل (١٥.٢٢).



شكل رقم (١٥.٢٢) نقل الأقطاب والأصفار من المستوى s إلى المستوى z

طريقتا التعويض المباشر وتحويل z المتوافق تتشابهان بدرجة كبيرة. تعتمد هاتان الطريقتان على فكرة النقل البسيط لأقطاب وأصفار دالة العبور في النطاق s إلى النطاق z من خلال العلاقة $z = e^{sT_s}$.

مثلاً، لتحويل الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي التالي:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+a}$$

الذي له قطب عند s=-a، فإننا سننقل القطب عند a– إلى الموضع المقابل له في النطاق z، بالتالي سيصبح موضع قطب المرشح الرقمي سيكون $z = e^{-aT_s}$. طريقة التعويض المباشر تنفذ التحويل $s\text{-}a \to z - e^{aT_s}$

بينما طريقة تحويل z المتوافق تنفذ التحويل $s - a \to 1 - e^{aT_s}z^{-1}$. دوال العبور في النطاق z الناتجة في هذه الحالة ستكون:

التعويض المباشر:

$$H_d(z) = \frac{1}{z-e^{aT_s}} = \frac{z^{-1}}{1-e^{aT_s}z^{-1}}$$

حيث هناك قطب عند $z = e^{-aT_s}$ ولا يوجد أي أصفار محددة.

تحويل z المتوافق:

$$H_d(z) = \frac{1}{1-e^{aT_s}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT_s}}$$

حيث هناك قطب عند $z = e^{-aT_s}$ وصفر عند z=0.

لاحظ أن طريقة تحويل z المتوافق تعطي النتيجة نفسها تماماً التي تم الحصول عليها باستخدام طريقة ثبات الصدمة، وطريقة التعويض المباشر تعطي النتيجة نفسها فيما عدا التأخير البسيط الوحيد نتيجة المعامل z^{-1}. في حالة دوال العبور الأكثر تعقيداً في النطاق s، فإن هاتين النتيجتين لا يكونان على هذه الدرجة من التشابه. هذه الطرق لا تحتوي أي تحليل في النطاق الزمني، حيث يتم التصميم بالكامل في النطاقين s و z. التحويلان $s-a \to z-e^{aT}$ و $s-a \to 1-e^{aT}z^{-1}$، كل منهما ينقل أي قطب في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s إلى قطب في الداخل المفتوح من دائرة الوحدة في المستوى z، ولذلك فإن المرشحات التماثلية المستقرة سيتم تحويلها إلى مرشحات رقمية مستقرة.

مثال ١٥.٦

تصميم مرشح رقمي منفذ لمجال من الترددات باستخدام طريقة تحويل z المتوافق

باستخدام طريقة تحويل z المتوافق صمم مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي في مثال ١٥.٢ الذي دالة عبوره كما يلي:

$$H_a(s) = \frac{9.87\times10^4 s^2}{s^4+444.3s^3+2.467\times10^6 s^2+5.262\times10^8 s+1.403\times10^{12}}$$

مستخدماً معدل العينة نفسه f_s=1kHz . قارن الاستجابة الترددية للمرشحين.

دالة العبور هذه لها صفران عند s=0 وأقطاب عند s=-99.7±j978 وعند s=-122.4±j1198.6. باستخدام طريقة النقل:

$$s-a \to 1-e^{aT}z^{-1}$$

سنحصل على صفر عند z=1، وصفران عند z=0، وأقطاب عند:

z=0.5056±j0.7506 و 0.3217±j0.8242

وستكون دالة العبور في النطاق z كالتالي:

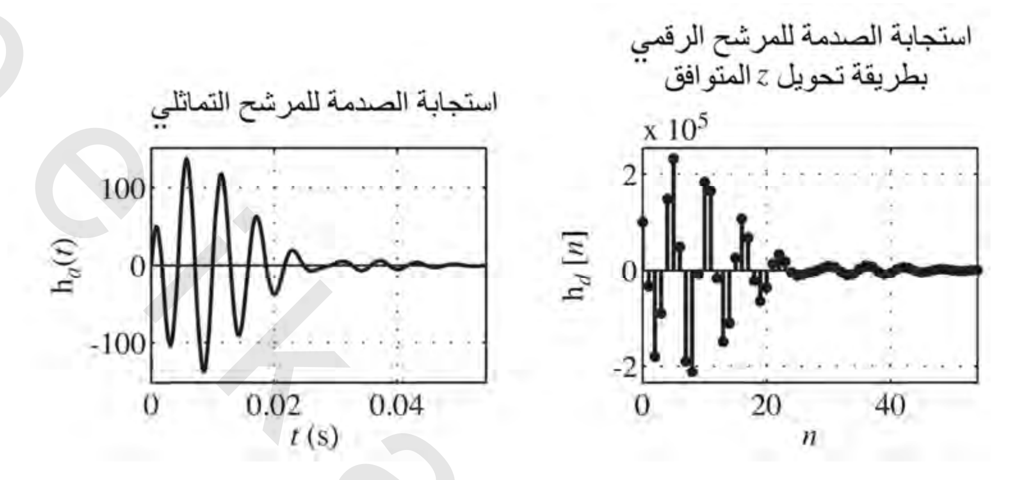
$$H_d(z) = \frac{z^2(98700z^2-197400z+98700)}{z^4-1.655z^3+2.252z^2-1.139z+0.6413}$$

أو:

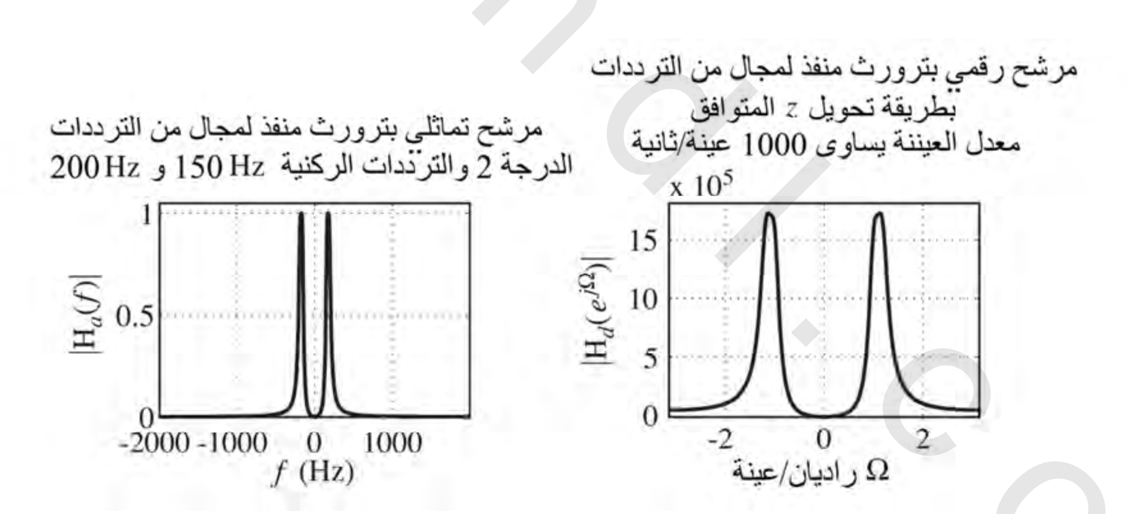
$$H_d(z) = 98700\frac{z^2(z-1)^2}{z^4-1.655z^3+2.252z^2-1.139z+0.6413}$$

الأشكال (١٥.٢٣) و (١٥.٢٤) و (١٥.٢٥) توضح استجابات الصدمة، ومقدار الاستجابة الترددية، ومخططات الأقطاب والأصفار للمقارنة بين هذه المرشحات.

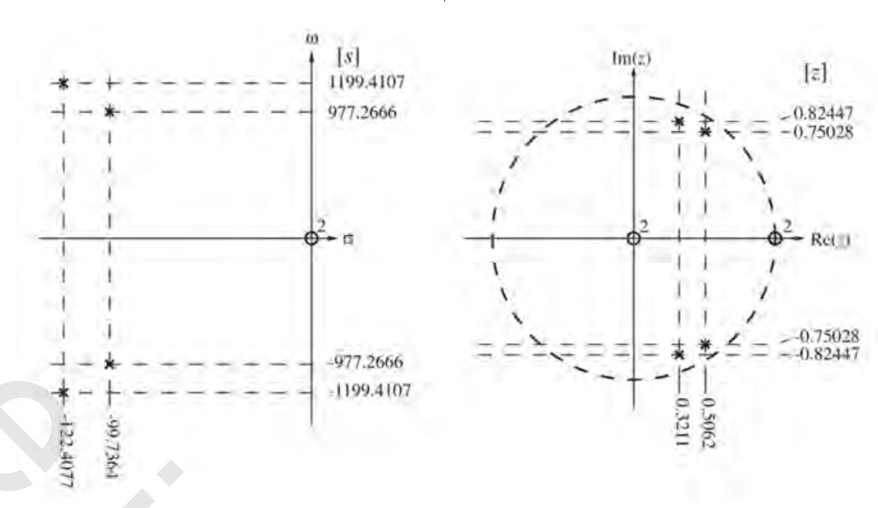
إذا تم عمل هذا التصميم باستخدام طريقة التعويض المباشر، فإن الفروق ستكون فقط هي إزالة الأصفار عند z=0، كما أن الاستجابة الترددية ستكون هي نفسها فيما عدا التأخير بمقدار وحدتين زمنيتين في الزمن المتقطع، ومقدار الاستجابة الترددية سيكون كما هو وزاوية الاستجابة الترددية سيكون لها ميل سالب بمقدار أكبر.



شكل رقم (١٥.٢٣) استجابة الصدمة للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة تحويل z المتوافق

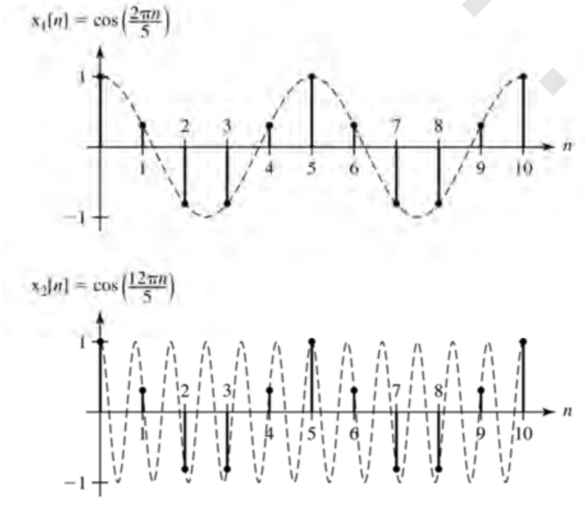


شكل رقم (١٥.٢٤) الاستجابات الترددية للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام طريقة تحويل z المتوافق

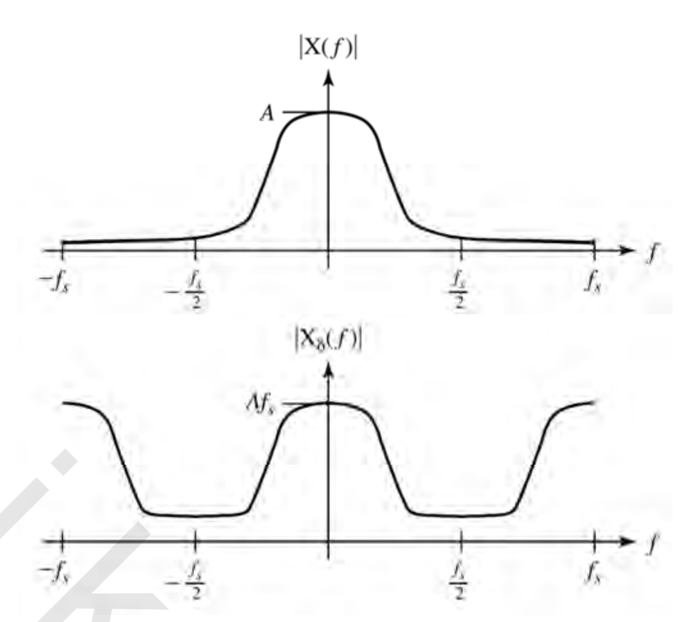


شكل رقم (١٥.٢٥) مخططات الأقطاب والأصفار للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له بطريقة تحويل z المتوافق

طريقة التحويل ثنائي الخطية: طرق التصميم بثبات الصدمة وثبات الخطوة تحاول أن تجعل استجابة المرشح الرقمي في الزمن المتقطع تتوافق مع استجابة المرشح التماثلي في الزمن المستمر لأي إثارة قياسية. طريقة أخرى لتصميم المرشحات الرقمية هي عن طريق جعل الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي تتوافق مع الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي. ولكن، حيث إن الاستجابة الترددية في الزمن المتقطع لا يمكن أن تتوافق تماماً مع الاستجابة الترددية في الزمن المستمر، فإن الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي لا يمكن أن تتوافق تماماً مع الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي. أحد الأسباب التي تم ذكرها مسبقاً هي أن الاستجابات الترددية للمرشحات الرقمية تكون دورية ضمنيا. عند عينة إشارة جيبية مستمرة لتوليد إثارة متقطعة زمنياً، فإنه إذا تم تغيير تردد الإشارة المستمرة بمقدار مضاعف صحيح من معدل العينة، فإن الإشارة المتقطعة زمنياً لن تتغير على الإطلاق. المرشح الرقمي لا يمكن أن يخبر عن هذا الفرق وسيستجيب بالطريقة نفسها كما لو كان يستجيب للإشارة الأصلية كما في شكل (١٥.٢٦).



شكل رقم (١٥.٢٦) إشارتان متماثلتان تماماً ومتقطعتان زمنياً تم الحصول عليهما عن طريق عينة إشارتين جيبيتين مختلفتين



شكل رقم (١٥.٢٧) مقدار طيف الإشارة المستمرة زمنياً والإشارة المتقطعة زمنياً المتكونة عن طريق عينة الصدمة لها

تبعاً لنظرية العينة، فإنه إذا أمكن التأكيد على أن الإشارة المستمرة زمنياً لن تحتوي على أي مكونات ترددية خارج المدى $|f|<f_s/2$، بالتالي عند أخذ عينات هذه الإشارة بالمعدل f_s فإن الإشارة الناتجة المتقطعة زمنياً ستحتوي على كل المعلومات الموجودة في الإشارة المستمرة زمنياً. بالتالي فعند إثارة أي مرشح رقمي بهذه الإشارة المتقطعة زمنياً، فإن الاستجابة ستحتوي كل المعلومات المقابلة في الإشارة المستمرة زمنياً. بالتالي فإن عملية تصميم المرشح الرقمي تصبح كيفية جعل الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي تكافئ أو تتوافق مع الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي في المدى $|f|<f_s/2$ فقط وليس خارجه. على العموم فإن هذا التكافؤ لا يمكن أن يكون تكافؤاً تاماً ولكنه في العادة يكون قريباً بصورة جيدة. بالطبع فإنه لا توجد إشارة يمكن أن نقول عنها أنها محدودة المجال الترددي، لذلك يجب أن نأخذ في الحسبان عملياً أن يكون هناك طاقة إشارة قليلة جداً بعد نصف معدل العينة بدلا من افتراض عدم وجودها كما في شكل (١٥.٢٧).

إذا كانت أي إشارة مستمرة زمنياً لا تحتوي أي مكونات ترددية خارج المدى $|f|<f_s/2$، فإن أي استجابة ترددية لا تساوي الصفر لأي مرشح تماثلي خارج هذا المدى لن يكون لها تأثير على هذه الإشارة. لذلك فعند تصميم أي مرشح رقمي ليحاكي مرشحاً تماثلياً فإن معدل العينة يجب اختياره بحيث تكون استجابة المرشح التماثلي عند الترددات $|f|>f_s/2$ تساوي صفر تقريباً. لذلك فإن كل التأثيرات الترشيحية ستحدث في المدى الترددي $|f|<f_s/2$. لذلك، فإن نقطة البداية في عملية تصميم المرشح الرقمي في النطاق الترددي هي تحديد معدل العينة، بحيث:

$X(f)\cong 0$ و $H_a(f)\cong 0$ عندما $|f|<f_s/2$

أو :

$X(jw)\cong 0$ و $H_a(jw)\cong 0$ عندما $|w|>\pi f_s=w_s/2$

الآن تصبح المشكلة هي إيجاد دالة عبور لمرشح رقمي يكون لها تقريبا الشكل نفسه مثل دالة عبور المرشح التماثلي الذي نحاول محاكاته في المدى $|f|<f_s/2$. كما شرحنا مسبقاً، فإن الطريقة المباشرة لتحقيق هذا الهدف من الممكن أن تكون استخدام التحويل $e^{sT_s}\rightarrow z$ لتحويل دالة العبور المرغوبة $H_a(s)$ إلى دالة العبور الرقمية المقابلة $H_d(z)$. التحويل $e^{sT_s}\rightarrow z$ يمكن عكسه ليكون كالتالي : $s\rightarrow \ln(z)/T_s$. بالتالي تصبح عملية التصميم كما يلي :

$$H_d(z)=H_a(s)|_{s\rightarrow\frac{1}{T_s}ln(z)}$$

على الرغم من أن طريقة التحويل هذه تكون كافية من وجهة النظرالنظرية، فإن دالة التحويل $s\rightarrow \ln(z)/T_s$ ستقوم بتحويل دالة عبور مرشح تماثلي في الصورة الشائعة التي هي نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s إلى دالة عبور مرشح رقمي في صورة نسبة من كثيرتي حدود ليس في z ولكن في ln(z)، مما يجعل الدالة تتعالى بالعديد من الأقطاب والأصفار. على الرغم من أن هذه الفكرة جذابة، إلا أنها لا تؤدي إلى تصميم مرشح رقمي عملي.

عند هذه النقطة من الشائع جداً أن نعمل تقريب في محاولة لتبسيط صورة دالة العبور للمرشح الرقمي. أحد هذه التحويلات يأتي من التعبير التتابعي للدالة الأسية كما يلي :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

يمكن تطبيق ذلك على التحويل $e^{sT_s}\rightarrow z$ كما يلي :

$$1+sT_s+\frac{(sT_s)^2}{2!}+\frac{(sT_s)^3}{3!}+\cdots\rightarrow z$$

إذا قربنا هذا التتابع بأول مركبتين فيه كما يلي :

$$1+sT_s\rightarrow z$$

أو :

$$s\rightarrow\frac{z-1}{T_s}$$

التقريب $e^{sT_s}\cong 1+sT_s$ يعتبر تقريباً جيداً إذا كانت T_s صغيرة ويصبح أفضل كلما صغرت T_s وبالتالي كلما كانت f_s أكبر. بمعنى أن هذا التقريب يصبح جيداً جداً عند معدلات العينة العالية. دعنا نفحص التحويل $s\rightarrow(z-1)/T_s$. بالضرب في s في النطاق s فإن ذلك يقابل التفاضل بالنسبة للزمن t للدالة المقابلة في النطاق الزمني المستمر. بالضرب في $(z-1)/T_s$ في النطاق z فإن ذلك يقابل فرقاً أمامياً مقسوماً على زمن العينة T_s للدالة المقابلة في نطاق الزمن المتقطع، وهذا تقريب للتفاضل بالفرق الأمامي. كما ذكرنا من قبل في طريقة الفروق المحددة، فإن العمليتين، الضرب في s والضرب في $(z-1)/T_s$ متكافئتان. لذلك فإن هذه الطريقة يكون لها المشكلة نفسها مثل طريقة

الفروق المحددة باستخدام الفروق الأمامية، وهي أن المرشح التماثلي المستقر من الممكن أن يصبح مرشحاً رقمياً غير مستقر.

هناك تعديل ذكي جداً لهذا التحويل لحل مشكلة الحصول على مرشح رقمي غير مستقر من آخر تماثلي مستقر وفي الوقت نفسه يكون به بعض المميزات الأخرى. يمكننا كتابة التحويل من النطاق s إلى النطاق z على الصورة:

$$e^{sT_s} = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}} \rightarrow z$$

بتقريب كل الأسس بالتتابع غير المحدود:

$$\frac{1+\frac{sT_s}{2}+\frac{(sT_s/2)^2}{2!}+\frac{(sT_s/2)^3}{3!}+\cdots}{1-\frac{sT_s}{2}+\frac{(sT_s/2)^2}{2!}-\frac{(sT_s/2)^3}{3!}+\cdots} \rightarrow z$$

بالاكتفاء بأول مكونين من كل تتابع نحصل على ما يلي:

$$\frac{1+sT_s/2}{1-sT_s/2} \rightarrow z$$

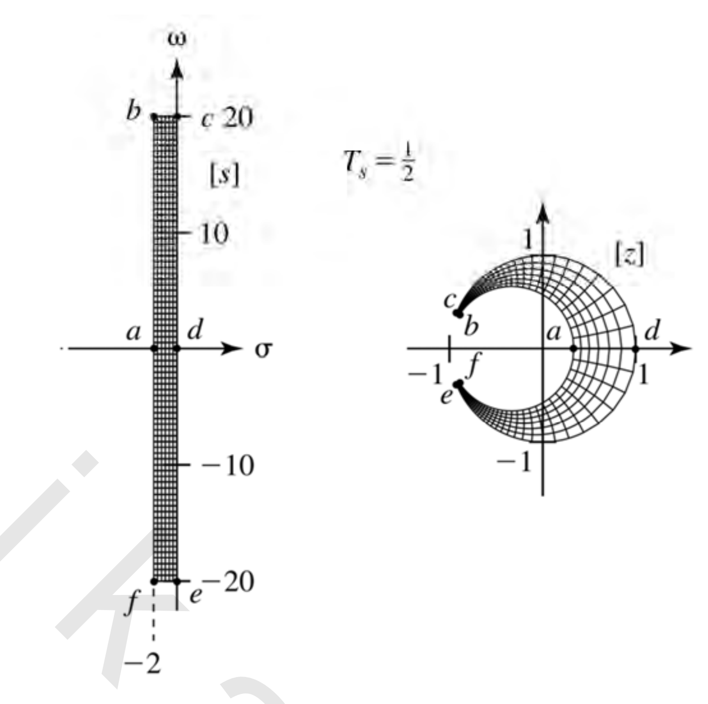
وهذا يؤدي إلى ما يلي:

$$s \rightarrow \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \quad \text{أو} \quad z \rightarrow \frac{2+sT_s}{2-sT_s}$$

هذا التحويل من s إلى z يسمى التحويل ثنائي الخطية؛ لأن كل من البسط والمقام يحتويان دالة خطية في s أو z. (لا تخلط بين التعبيرين ثنائي الخطية bilinear وثنائي الجانب في تحويل z). تحويل z الثنائي الخطية يحول أي مرشح تماثلي مستقر إلى مرشح رقمي مستقر لأنه ينقل كل النصف الأيسر المفتوح من المستوى s إلى الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z. لقد كان ذلك حقيقيا في تحويل z المتوافق، وفي التعويض المباشر ولكن المقابلات تختلف. التحويل $z = e^{sT_s}$ ينقل أي شريحة $\omega_0/T_s<\omega<(\omega_0+2\pi)T_s$ في المستوى s إلى كل المستوى z. النقل من المستوى s إلى المستوى z يكون فريداً، بينما النقل من المستوى z إلى المستوى s لا يكون فريداً. التحويل ثنائي الخطية: $s\rightarrow(2/T_s)(z-1)/(z+1)$ ينقل كل نقطة في المستوى s إلى نقطة مقابلة فريدة في المستوى z والتحويل العكسي $z\rightarrow(2+sT_s)/(2-sT_s)$ ينقل كل نقطة في المستوى z إلى نقطة فريدة في المستوى s. لنرى كيفية عمل هذا التحويل سنفترض المحيط $s=j\omega$ في المستوى s. بوضع $z=(2+sT_s)/(2-sT_s)$ نحصل على:

$$z = \frac{2+j\omega T_s}{2-j\omega T_s} = 1 < 2tan^{-1}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) = e^{j2tan^{-1}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)}$$

والذي يقع كله على دائرة الوحدة في المستوى z. أيضاً، نلاحظ أن المحيط، أو المسار على دائرة الوحدة في المستوى z لمرة واحدة يساوي تماما المسار $-\infty<w<\infty$. بالنسبة للمسار الأكثر عمومية $s=\sigma_0+j\omega$، حيث σ_0 ثابت، المسار المقابل، لذلك هو أيضاً دائرة ولكن بنصف قطر مختلف على المحور Re(z) بحيث مع اقتراب w من $\pm\infty$، فإن z تقترب من 1- كما في شكل (١٥.٢٨).

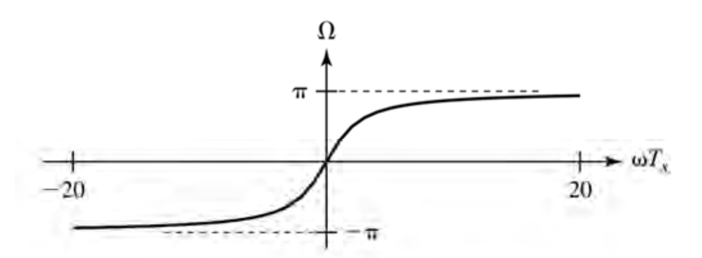


شكل رقم (١٥.٢٨) نقل منطقة من المستوى s إلى منطقة مقابلة من المستوى z من خلال تحويل z الثنائي الخطية

مع تحرك المسارات في المستوى s ناحية اليسار، فإن المسارات في المستوى z تصبح دوائر أصغر تتحرك مراكزها لتقترب من النقطة z=-1. النقل من المستوى s إلى المستوى z هو نقل من نقطة إلى نقطة مقابلة أو ما يسمى نقل واحد لواحد ولكن التشويه في المناطق يصبح أكثر خطورة مع تحرك s بعيداً من نقطة الأصل. مع ارتفاع معدل العيننة، فإن كل الأقطاب والأصفار في المستوى s تقترب أكثر وأكثر من النقطة z=1 في المستوى z حيث يكون التشويه أقل ما يمكن. يمكن رؤية ذلك عن طريق أخذ النهاية مع اقتراب T_s من الصفر. في النهاية فإن z تقترب من +1. الفرق المهم بين طريقة تحويل z الثنائي الخطية وطريقة ثبات الصدمة أو طريقة تحويل z المتوافق هي أنه لا يوجد نسخ مستعارة عند استخدام التحويل ثنائي الخطية نتيجة عملية التحويل الفريدة (واحد لواحد) بين المستويين s و z. على الرغم من ذلك، فهناك التفاف أو اعوجاج أو تشويه يحدث نتيجة طريقة نقل المحور s=jw إلى دائرة الوحدة |z|=1 والعكس. بفرض $z=e^{j\Omega}$ حيث Ω حقيقية، تحدد دائرة الوحدة في المستوى z. المسار المقابل في المستوى s هو:

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}+1} = j\frac{2}{T_s}tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

وحيث إن $s=\sigma+j\omega$، $\sigma=0$ و $w=(2/T_s)\tan(\Omega/2)$ أو بعكس الدالة فإن $\Omega=2\tan^{-1}(\omega T_s/2)$ كما في شكل (١٥.٢٩).



شكل رقم (١٥.٢٩) الاعوجاج أو الالتفاف الترددي نتيجة التحويل ثنائي الخطية

بالنسبة للترددات المنخفضة، ستكون عملية النقل خطية تقريباً ولكن التشويه يزداد سوءاً باستمرار مع زيادة التردد؛ لأننا نجبر الترددات العالية ω في النطاق s لتنحصر في المجال $-\pi<\Omega<\pi$ في النطاق z، وذلك يعني أن السلوك التقاربي للمرشح التماثلي مع اقتراب f أو ω من الما لانهاية الموجبة يحدث في النطاق z عند $\Omega=\pi$ والتي عند $\Omega=\omega T_s=2\pi f T_s$ تكون عند $f=f_s/2$ والتي تمثل تردد نيكويست. لذلك، فإن هذا التزوير سيحصر كل المدى اللانهائي في الترددات المستمرة زمنياً إلى مدى من الترددات المتقطعة $-\pi<\Omega<\pi$ في صورة دالة غير خطية قابلة للعكس، وبالتالي تم تجنب عملية الاستعارة المزيفة.

صندوق أدوات الإشارة في ماتلاب به الأمر bilinear لتصميم المرشحات الرقمية باستخدام التحويل ثنائي الخطية. الصورة العامة لهذا الأمر هي:

[bd, ad]=bilinear(ba, aa, fs)

أو:

[zd, pd, kd]=bilinear(za, pa, ka, fs)

حيث ba هي متجه معاملات البسط في دالة عبور المرشح التماثلي، و aa هي متجه معاملات المقام في دالة عبور المرشح التماثلي، و bd هي متجه معاملات البسط في دالة عبور المرشح التماثلي، و bd هي متجه معاملات المقام في دالة عبور المرشح الرقمي، و ad هي متجه مواضع أصفار المرشح التماثلي، و pa هي متجه مواضع أقطاب المرشح التماثلي، و ka هو معامل تكبير المرشح التماثلي، و f_s هي معدل العينة بالهرتز، و zd هي متجه مواضع المرشح الرقمي، و pd هي متجه مواضع أقطاب المرشح الرقمي، و kd هو معامل تكبير المرشح الرقمي. مثلاً:

```
»za = [] ; pa = -10 ; ka = 1 ; fs = 4 ;
»[zd,pd,kd] = bilinear(za,pa,ka,fs) ;
»zd
zd =
   -1
»pd
pd =
  -0.1111
»kd
kd =
   0.0556
```

مثال ١٥.٧

مقارنة بين تصميمات المرشح الرقمي المنفذ للترددات المنخفضة باستخدام التحويل ثنائي الخطية بمعدلات أخذ عينات (عيننة) مختلفة

باستخدام التحويل ثنائي الخطية صمم مرشحاً رقمياً ليحاكي المرشح التماثلي الذي له دالة العبور التالية :

$$H_a(s) = \frac{1}{s+10}$$

وقارن الاستجابات الترددية للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي عند معدلات العيننة 4Hz، و 20Hz، و 100Hz.

باستخدام التحويل التالي :

$$s \to \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$$

نحصل على :

$$H_d(z) = \frac{1}{\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}+10} = \left(\frac{T_s}{2+10T_s}\right)\frac{z+1}{z-\frac{2-10T_s}{2+10T_s}}$$

بالنسبة لمعدل العيننة 4Hz :

$$H_d(z) = \frac{1}{18}\frac{z+1}{z+\frac{1}{9}}$$

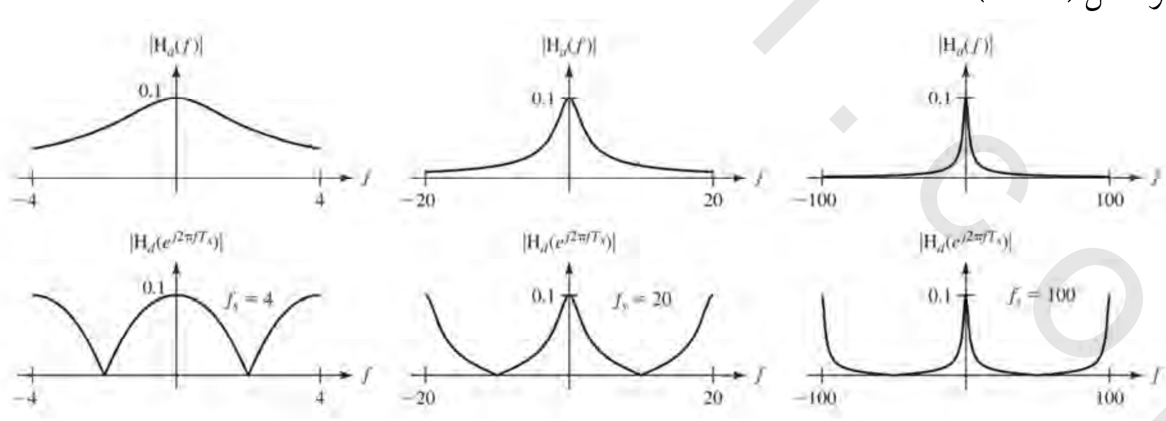
بالنسبة لمعدل العيننة 20Hz :

$$H_d(z) = \frac{1}{50}\frac{z+1}{z-\frac{3}{5}}$$

بالنسبة لمعدل العيننة 100Hz :

$$H_d(z) = \frac{1}{210}\frac{z+1}{z-\frac{19}{21}}$$

انظر شكل (١٥.٣٠).



شكل رقم (١٥.٣٠) مقدار الاستجابات الترددية للمرشح التماثلي وثلاثة من المرشحات الرقمية باستخدام التحويل ثنائي القطبية عند ثلاثة من معدلات العيننة المختلفة.

مثال ١٥.٨

تصميم مرشح رقمي منفذ لمجال من الترددات باستخدام التحويل ثنائي الخطية

باستخدام طريقة التحويل ثنائي الخطية صمم مرشحاً رقمياً ليحاكي المرشح التماثلي في مثال ١٥.٢ الذي له دالة العبور التالية :

$$H_a(s) = \frac{9.87\times10^4 s^2}{s^4+444.3s^3+2.467\times10^6 s^2+5.262\times10^8 s+1.403\times10^{12}}$$

باستخدام معدل العيننة نفسه f_s=1kHz . قارن الاستجابة الترددية للمرشحين.

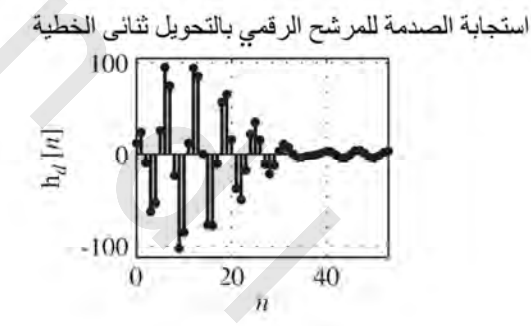
باستخدام التحويل التالي : $s\to(2T_s)(z-1)/(z+1)$ والتبسيط نحصل على المعادلة التالية :

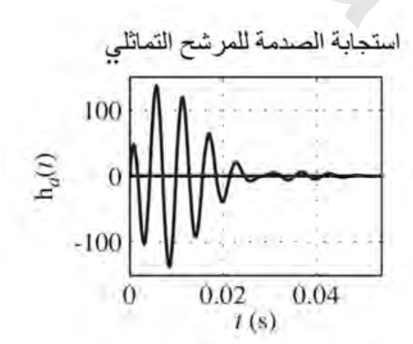
$$H_d(z) = \frac{12.38z^4-24.77z^2+12.38}{z^4-1.989z^3+2.656z^2-1.675z+0.711}$$

أو :

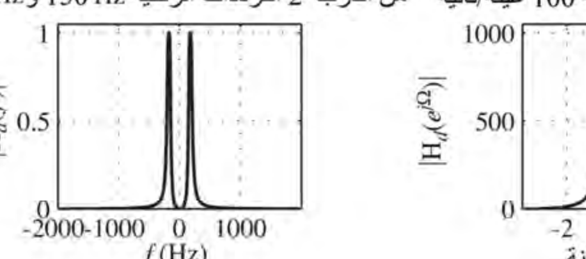
$$H_d(z) = 12.38\frac{(z+1)^2(z-1)^2}{z^4-1.989z^3+2.656z^2-1.675z+0.711}$$

يمكن المقارنة بين استجابات الصدمة ، ومقدار الاستجابات الترددية ، ومخططات الأقطاب والأصفار لكل من المرشح التماثلي والرقمي كما في الأشكال (١٥.٣١) و (١٥.٣٢) و (١٥.٣٣).



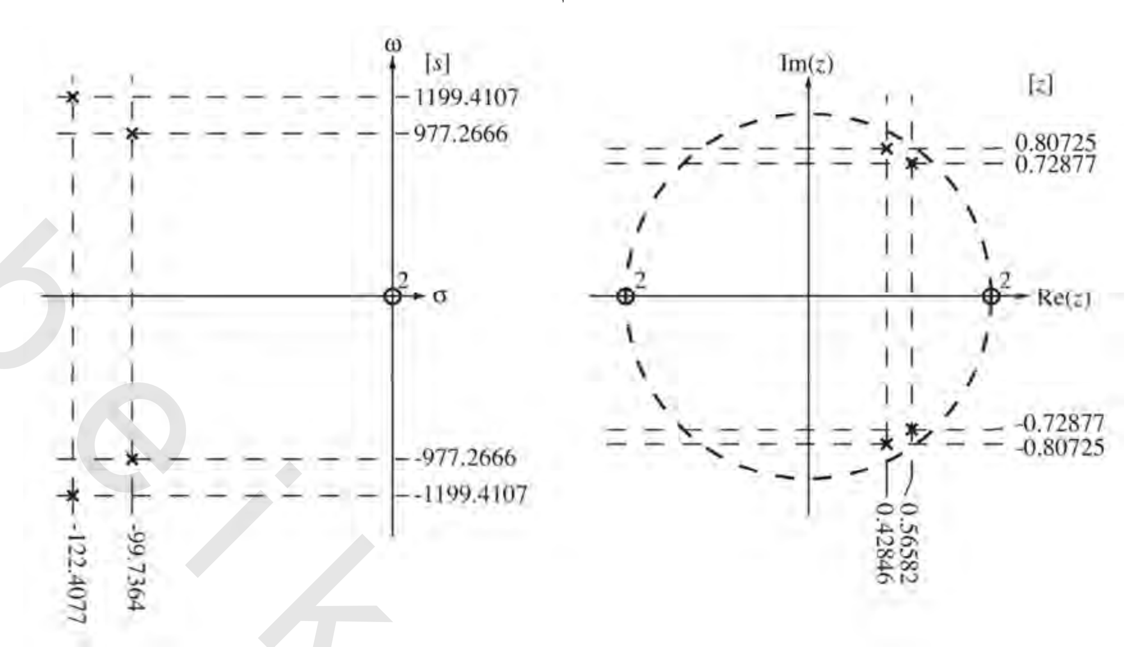


شكل رقم (١٥.٣١) استجابات الصدمة للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام التحويل ثنائي الخطية



مرشح رقمي بتروورث منفذ لمجال من الترددات بالتحويل ثنائي الخطية ومعدل عينة 100 عينة/ثانية

شكل رقم (١٥.٣٢) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام التحويل ثنائي الخطية

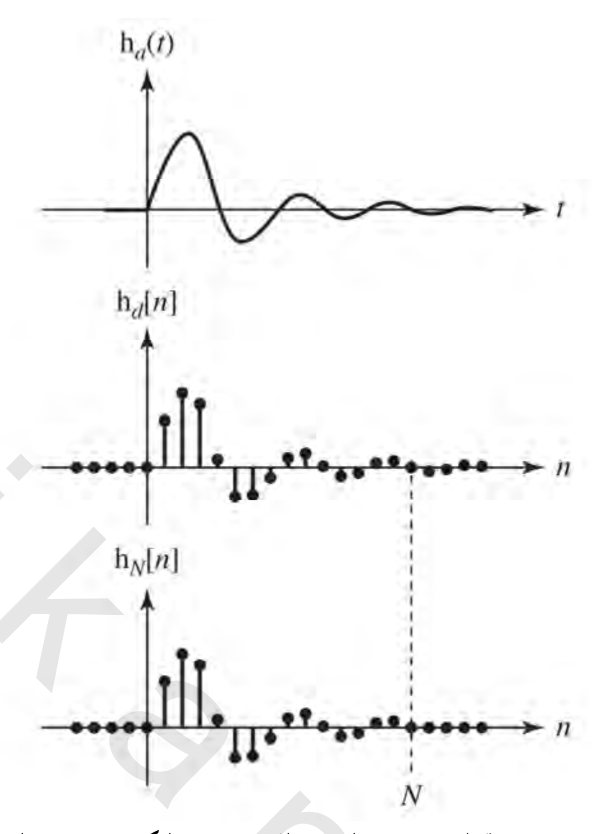


شكل رقم (١٥.٣٣) مخططات الأقطاب والأصفار للمرشح التماثلي والمحاكاة الرقمية له باستخدام التحويل ثنائي الخطية

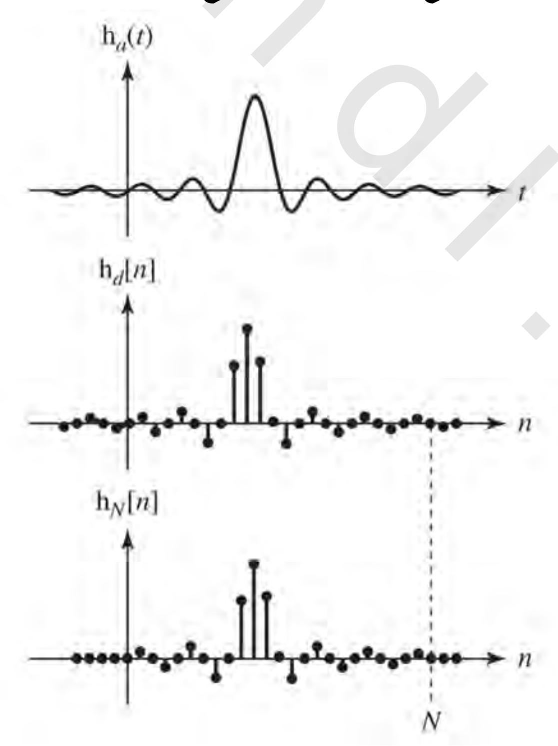
تصميم المرشحات FIR

استجابة الصدمة المثالية المقتطعة: على الرغم من أن المرشحات التماثلية الشائعة الاستخدام يكون لها استجابات صدمة لا نهائية، لأنها تكون أنظمة مستقرة تقترب استجابة الصدمة لها من الصفر مع اقتراب الزمن من الما لانهاية الموجبة. لذلك، فهناك طريقة أخرى لمحاكاة المرشح التماثلي هي أن نقوم بأخذ عينات من استجابة الصدمة، كما هو الحال في طريقة ثبات الصدمة، ولكن بعد ذلك نقطع استجابة الصدمة عند n=N حيث تكون قد نزلت إلى مستوى منخفض، وبذلك نحصل على استجابة صدمة محددة، كما في شكل (١٥.٣٤). المرشحات الرقمية التي لها استجابة صدمة محددة تسمى مرشحات FIR.

طريقة اقتطاع استجابة الصدمة يمكن توسعتها أيضاً لتقريب المرشحات غير السببية. إذا كان الجزء من المرشح المثالي الذي يقع قبل t=0 غير مهم بالمقارنة مع الجزء الذي يقع بعد الزمن t=0، فإنه بذلك يمكن اقتطاعه لتكوين استجابة صدمة سببية. يمكن الاقتطاع أيضاً بعد زمن معين عندما تنزل استجابة الصدمة إلى قيمة منخفضة كما أوضحنا مسبقاً وكما في شكل (١٥.٣٥).



شكل رقم (١٥.٣٤) اقتطاع استجابة الصدمة للمرشح IIR لتكوين استجابة الصدمة FIR



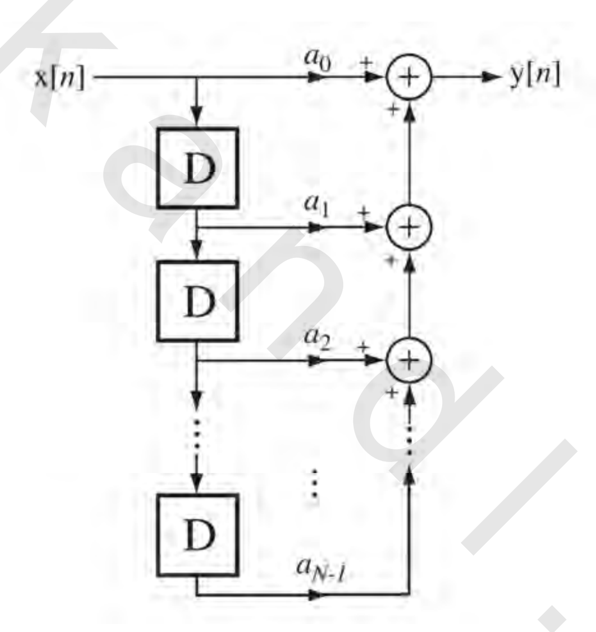
شكل رقم (١٥.٣٥) اقتطاع استجابة صدمة غير سببية لتكوين استجابة صدمة FIR سببية

بالطبع فإن اقتطاع استجابة الـ IIR للحصول على استجابة الـ FIR ستسبب بعض الفروق في استجابات الصدمة والاستجابات الترددية بين المرشح المثالي التماثلي والمرشح الرقمي الحقيقي، ولكن ذلك يكون ضمنياً في تصميم المرشح الرقمي نفسه. لذلك فإن مشكلة تصميم هذا المرشح الرقمي ما زالت مشكلة تقريب، وهذا التقريب يتم بطريقة مختلفة في هذا الطريقة للتصميم.

بمجرد اقتطاع استجابة الصدمة وعينتها، تصبح عملية تصميم الـ FIR عملية سهلة ومباشرة. الصورة المتقطعة من استجابة الصدمة تكون في صورة مجموع محدود من الصدمات المتقطعة زمنياً كما يلي:

$$h_N[n] = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \delta[n-m]$$

والتي يمكن بناؤها في صورة مرشح رقمي كما في شكل (١٥.٣٦).



شكل رقم (١٥.٣٦) نموذج مبدئي للمرشح الرقمي FIR

فرق أساسي بين هذا النوع من تصميم المرشحات الرقمية وكل الطرق الأخرى السابقة هي عدم وجود تغذية مرتدة في الاستجابة يتم دمجها مع الإثارة لإنتاج الاستجابة التالية. أي أن هذا المرشح تكون له مسارات تغذية أمامية فقط. دالة العبور لهذا المرشح ستكون:

$$H_d(z) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m z^{-m}$$

هذه الدالة لها عدد N-1 من الأقطاب الموضوعة كلها عند الموضع z=0، وتكون مستقرة دائماً بصرف النظر عن المعاملات a.

هذا النوع من التصميم هو تقريب للمرشحات التماثلية بمرشحات رقمية. من الواضح الآن ما هو الفرق بين استجابتي الصدمة، فما هي الفروق في النطاق الترددي ؟ استجابة الصدمة المقتطعة هي :

$$h_N[n] = \begin{Bmatrix} h_d[n], & 0 \le n < N \\ 0, & \text{otherwise} \end{Bmatrix} = h_d[n]w[n]$$

وتحويل DTFT سيكون :

$$H_N(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j\Omega}) \circledR W(e^{j\Omega})$$

كما هو مبين في شكل (١٥.٣٧).

مع زيادة طول استجابة الصدمة المقتطعة التي لا تساوي الصفر، فإن الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي ستقترب من الشكل المستطيل المثالي. التشابه في الشكل أو المظهر مع التقارب في CTFS ليس مجرد صدفة. CTFS المقتطع يظهر ما يسمى بظاهرة جيب (Gibb) في الإشارة الناتجة. في هذه الحالة، تحدث عملية الاقتطاع في النطاق الزمني المستمر، والتذبذبات التي تكافئ ظاهرة جيب، تحدث في النطاق الترددي. هذه الظاهرة ستسبب تأثيرات تظهر في صورة تذبذبات في مجال المرور وفصوص جانبية كما في شكل (١٧.٣٧). مقدار القيمة العظمى للتذبذبات في مجال المرور لا تتلاشى مع زيادة زمن الاقتطاع ولكنها تقتصر أكثر وأكثر على المنطقة القريبة من تردد القطع.

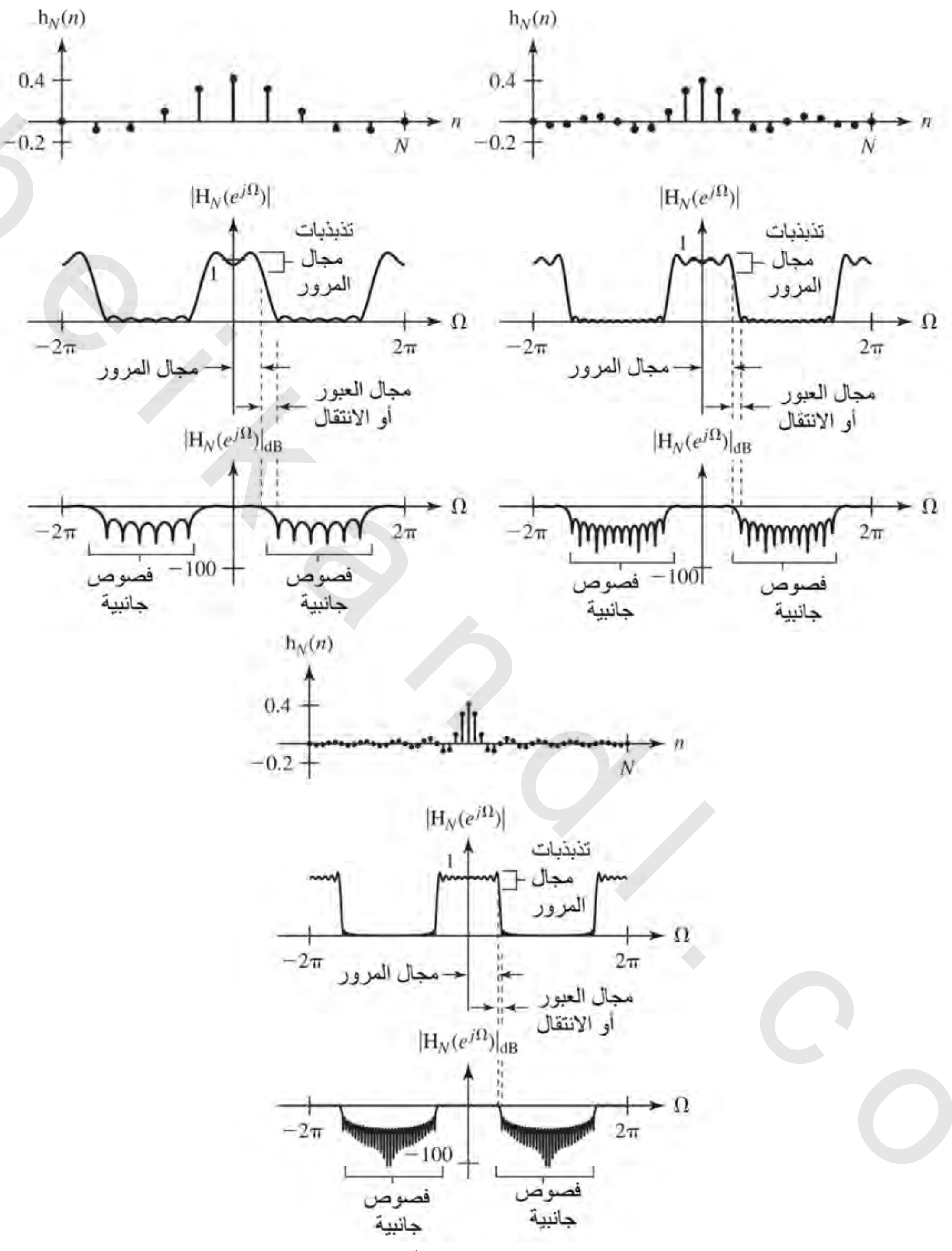
يمكن تقليل التأثيرات التذبذبية في النطاق الترددي، بدون استخدام أزمنة اقتطاع طويلة، عن طريق استخدام عمليات قطع أكثر نعومة في النطاق الزمني. بدلا من أخذ نافذة (نوفذة) ذات دالة مستطيلة من استجابة الصدمة الأصلية يمكن استخدام أشكال نوافذ مختلفة لا تسبب عدم الاتصال الكبير في شكل استجابة الصدمة المقتطعة. هناك العديد من أشكال النوافذ التي لها تحويل فورير يعطي تذبذبات أقل من تحويل فورير للنافذة المستطيلة، ومن هذه النوافذ المشهورة ما يلي :

١- نافذة فون هان أو هاننج (Hanning)

$$w[n] = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right], 0 \le n < N$$

٢- نافذة بارتليت (Bartlett)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \le n < \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \le n < N \end{cases}$$



شكل رقم (١٥.٣٧) ثلاث استجابات صدمة متقطعة زمنياً مستقطعة من مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة ومقدار الاستجابات الترددية المصاحبة

٣- نافذة هامنج Hamming

$$\omega[n] = 0.54 - 0.46cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), 0 \le n < N$$

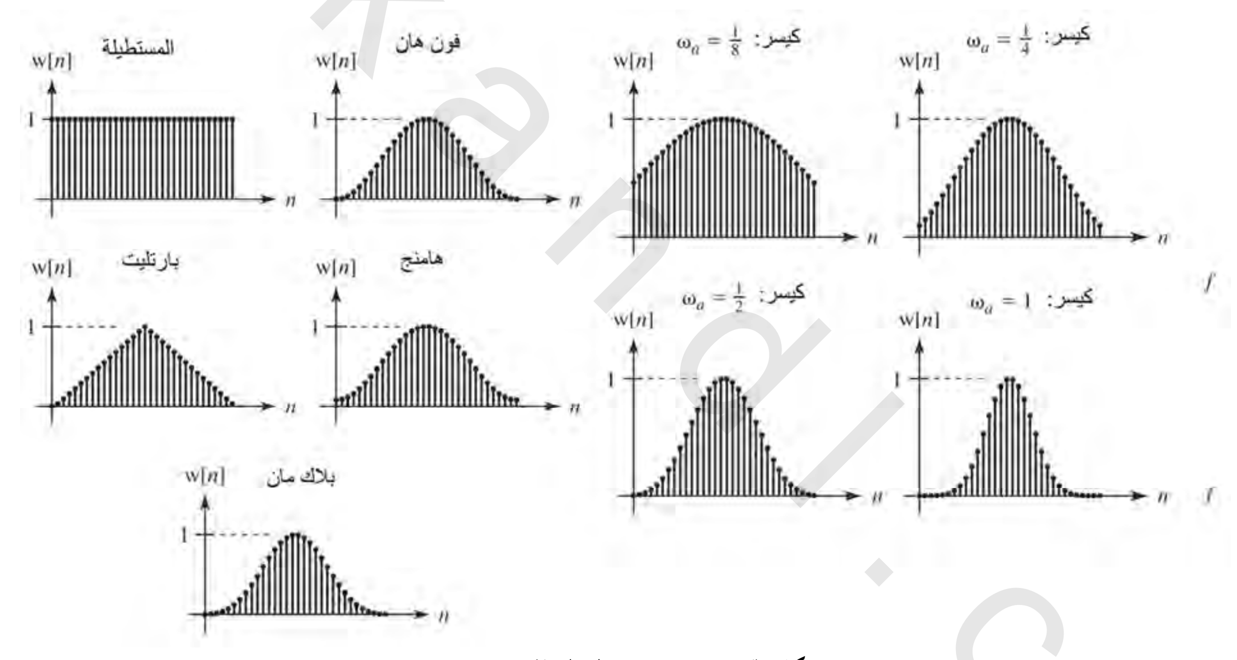
٤- نافذة بلاكمان Blackman

$$w[n] = 0.42 - 0.5cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), 0 \le n < N$$

٥- نافذة كيسر Kaiser

$$\omega[n] = \frac{I_0\left(\omega_a\sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left(n-\frac{N-1}{2}\right)^2}\right)}{I_0\left(\omega_a\frac{N-1}{2}\right)}$$

حيث I_0 دالة بيسيل Bessel المعدلة من الدرجة صفر ومن النوع الأول، و ω_a هي معامل يمكن ضبطه للمقايضة على عرض مجال العبور أو الانتقال ومقدار الفصوص الجانبية كما في شكل (١٥.٣٨).

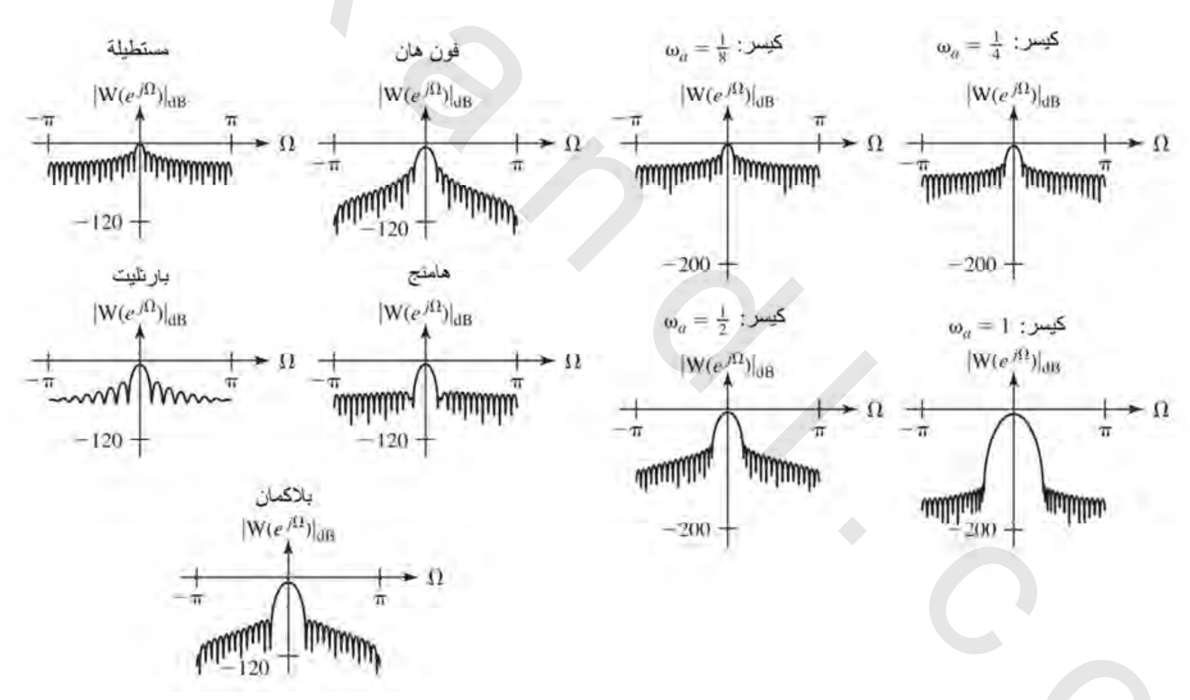


شكل رقم (١٥.٣٨) دوال النوفذة (N=32).

تحويلات هذه الدوال للنوافذ ستحدد كيف ستتأثر الاستجابة الترددية. مقادير التحويلات لهذه النوافذ الشائعة مبينة في شكل (١٥.٣٩).

بالنظر لمقادير هذه التحويلات لدوال النوافذ، يظهر أنه مع ثبات N، فإن اثنين من أهداف التصميم سيتعارضان. عند تقريب مرشح مثالي تماثلي بآخر FIR، فإننا نريد مجال عبور أو مجال انتقال ضيق جداً وأعلى معاوقة أو اضمحلال في مجال الوقف أو الإعاقة. دالة عبور المرشح FIR تساوي عملية الالتفاف بين دالة عبور

المرشح المثالي مع تحويل دالة النافذة. لذلك فإن دالة النافذة المثالية قد يكون لها تحويل يكون عبارة عن صدمة، وبالتالي فإن دالة النافذة المقابلة ستكون مستطيلاً لانهائي العرض، وهذا يكون غير ممكن. إذا استخدمنا مستطيلاً محدد العرض، فإن تحويله هو دالة ديرتشليت Dirichlet وبالتالي فإننا نحصل على التحويل الموضح في شكل (١٥.٣٩) للدالة المستطيلة، الذي يعطي مجال عبور أو انتقال أقل عرضا من قمة الفص المركزي إلى أول صفر له، ولكن بعد ذلك ترتفع دالة السنك sinc مرة ثانية لتعمل قمة تكون حوالي 13dB تحت القيمة العظمى. عند إجراء التفاف لهذه الدالة مع الاستجابة الترددية للمرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة، فإن مجال العبور أو الانتقال سيكون أضيق (بالمقارنة مع النوافذ الأخرى) ولكن الإعاقة في مجال الوقف لن تكون جيدة جداً. العكس من ذلك يكون مع نافذة بلاكمان. عرض الفص المركزي لمقدار تحويلها يكون أكثر من الضعف بالمقارنة مع الدالة المستطيلة، وبالتالي فإن مجال العبور لن يكون ضيقاً. ولكن بمجرد نزول المقدار، فإنه ينزل إلى أكثر من 60dB. لذلك فإن الإعاقة في مجال الوقف تكون أفضل كثيراً.



شكل رقم (١٥.٣٩) مقدار تحويلات z لدوال النوافذ المشهورة (N=32).

خاصية أخرى مهمة في الـ FIR تجعلها أكثر جاذبية هي أنها يمكن تصميمها لتعطي استجابة طور خطية. الصورة العامة لاستجابة الصدمة للمرشحات FIR هي:

$$h_d[n] = h_d[0]\delta[n] + h_d[1]\delta[n-1] + \cdots + h_d[N-1]\delta[n-(N-1)]$$

تحويل z لهذه الاستجابة هو:

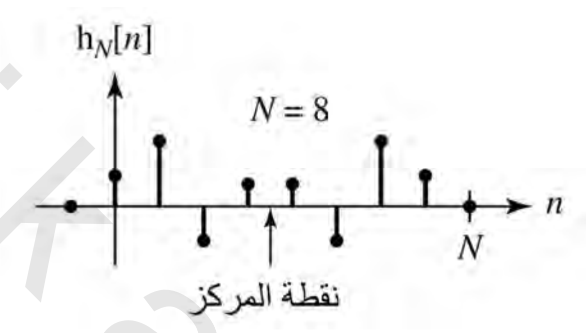
$$H_d(z) = h_d[0] + h_d[1]z^{-1} + \cdots + h_d[N-1]z^{-(N-1)}$$

والاستجابة الترددية المقابلة ستكون:

$$H_d(e^{j\Omega}) = h_d[0] + h_d[1]e^{-j\Omega} + \cdots + h_d[N-1]e^{-j(N-1)\Omega}$$

الطول N من الممكن أن يكون زوجياً أو فردياً. سنفترض أولاً أن N ستكون زوجية وسنفترض معاملاتها يتم اختيارها لتكون على الصورة التالية وكما في شكل (١٥.٤٠):

$$h_d[0] = h_d[N-1], h_d[1] = h_d[N-2], \ldots, h_d[N/2-1] = h_d[N/2]$$



شكل رقم (١٥.٤٠) مثال على استجابة الصدمة المتماثلة عندما N=8

هذا النوع من استجابة الصدمة يكون متماثلاً حول نقطة المركز. وبالتالي يمكن كتابة الاستجابة الترددية كما يلي:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{Bmatrix} h_d[0] + h_d[0]e^{-j(N-1)\Omega} + h_d[1]e^{-j\Omega} + h_d[1]e^{-j(N-1)\Omega} + \cdots \\ +h_d[N/2-1]e^{-j(N/2-1)\Omega} + h_d[N/2-1]e^{-jN\Omega/2} \end{Bmatrix}$$

أو:

$$H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega} \begin{Bmatrix} h_d[0]\left(e^{j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega} + e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega}\right) + h_d[1]\left(e^{j\left(\frac{N-3}{2}\right)\Omega} + e^{-j\left(\frac{N-3}{2}\right)\Omega}\right) + \cdots \\ +h_d[N/2-1](e^{-j\Omega} + e^{j\Omega}) \end{Bmatrix}$$

أو:

$$H_d(e^{j\Omega}) = 2e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega} \begin{Bmatrix} h_d[0]cos\left(\left(\frac{N-1}{2}\right)\Omega\right) + h_d[1]cos\left(\left(\frac{N-3}{2}\right)\Omega\right) + \cdots \\ +h_d[N/2-1]cos(\Omega) \end{Bmatrix}$$

تتكون هذه الاستجابة الترددية من حاصل ضرب المعامل $e^{-j((N-1)/2)\Omega}$ الذي له زاوية طور خطية مع تغير التردد وبعض المعاملات الأخرى، التي لها قيم حقيقية عند جميع الترددات. لذلك فإن الاستجابة الترددية الكلية للطور تكون خطية مع تغير التردد (فيما عدا القفزات بمقدار π عند الترددات التي تتغير عندها إشارة الجزء الحقيقي).

بطريقة مماثلة يمكننا أن نثبت أنه إذا كانت المعاملات عكسية التماثل كما يلي:

$$h_d[0] = h_d[N-1], h_d[1] = h_d[N-2], \ldots, h_d[N/2-1] = -h_d[N/2]$$

فإن زاوية الطور ستكون خطية أيضاً مع التردد. عندما تكون N فردية سنحصل على النتيجة نفسها أيضاً.

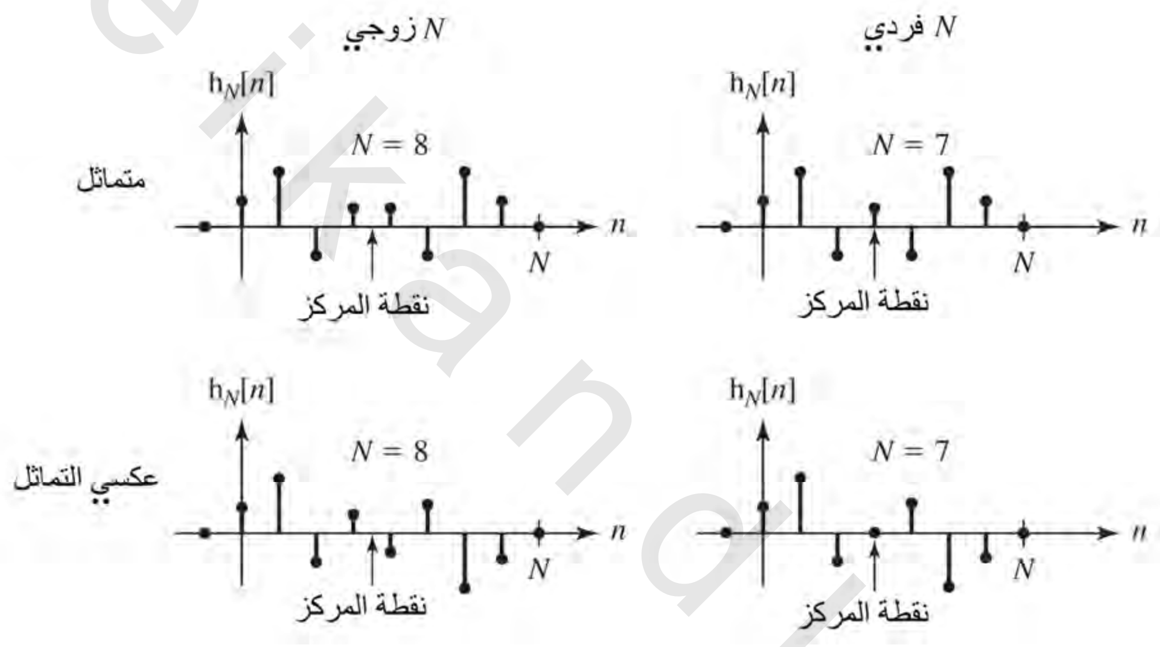
إذا كانت المعاملات متماثلة كما يلي :

$$h_d[0] = h_d[N-1], h_d[1] = h_d[N-2], \dots, h_d\left[\frac{N-3}{2}\right] = h_d\left[\frac{N+1}{2}\right]$$

أو عكسية التماثل كما يلي :

$$h_d[0] = -h_d[N-1], h_d[1] = -h_d[N-2], \dots, h_d\left[\frac{N-3}{2}\right] = -h_d\left[\frac{N+1}{2}\right], h_d\left[\frac{N-1}{2}\right] = 0$$

فإن الاستجابة الطورية ستكون خطية. لاحظ أنه عندما تكون N فردية ستكون هناك نقطة مركزية، وإذا كانت المعاملات عكسية التماثل، فإن المعامل $h_d[N-1)/2]$ يجب أن يكون صفراً كما في شكل (١٥.٤١).



شكل رقم (١٥.٤١) أمثلة على استجابات الصدمة المتقطعة زمنياً المتماثلة وعكسية التماثل عندما تكون N زوجية أو فردية

مثال ١٥.٩

تصميم مرشح رقمي FIR منفذ للترددات المنخفضة عن طريق اقتطاع استجابة الصدمة المثالية

باستخدام طريقة الـ FIR صمم مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي ذا القطب الواحد المنفذ للترددات المنخفضة الذي له دالة عبور كما يلي :

$$H_a(s) = \frac{a}{s+a}$$

باقتطاع استجابة الصدمة للمرشح التماثلي حتى ثلاثة ثوابت زمنية ثم نقوم بعينة استجابة الصدمة المقتطعة بزمن بين العينات يساوي ربع الثابت الزمني لتكوين دالة متقطعة زمنياً. بعد ذلك نقسم هذه الدالة المتقطعة زمنياً على a لنكون استجابة الصدمة للمرشح الرقمي :

(أ) أوجد وارسم مقدار الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي مع التردد المتقطع زمنياً Ω.

(ب) أعد الجزء (أ) مع زمن اقتطاع يساوي خمسة ثوابت زمنية ومعدل عينة يساوي ١٠ عينات في كل ثابت زمني.

استجابة الصدمة ستكون:

$$h_a(t) = ae^{-at}\, u(t)$$

الثابت الزمني هو 1/a. لذلك فإن زمن الاقتطاع سيكون 3/a، والزمن بين العينات يساوي 1/4a وسيتم أخذ العينات عند الأزمنة المتقطعة 0≤n≤12. بالتالي ستكون استجابة الصدمة للمرشح FIR هي:

$$h_a[n] = ae^{-n/4}\,(u[n] - u[n-12]) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{11} e^{-m/4}\delta\,[n-m]$$

تحويل z لهذه الدالة هو:

$$H_d(z) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{11} e^{-m/4} z^{-m}$$

وستكون الاستجابة الترددية كما يلي:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{11} e^{-m/4}(e^{j\Omega})^{-m} = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{11} e^{-m(1/4+j\Omega)}$$

بالنسبة لمعدل العينة الثاني في الجزء (ب)، يكون زمن الاقتطاع يساوي 5/a والزمن بين العينات يساوي 1/10a وسيتم أخذ العينات عند الأزمنة المتقطعة 0≤n≤50. بالتالي ستكون الاستجابة الترددية كما يلي:

$$h_a[n] = ae^{-n/10}\,(u[n] - u[n-50]) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{49} e^{-m/4}\delta\,[n-m]$$

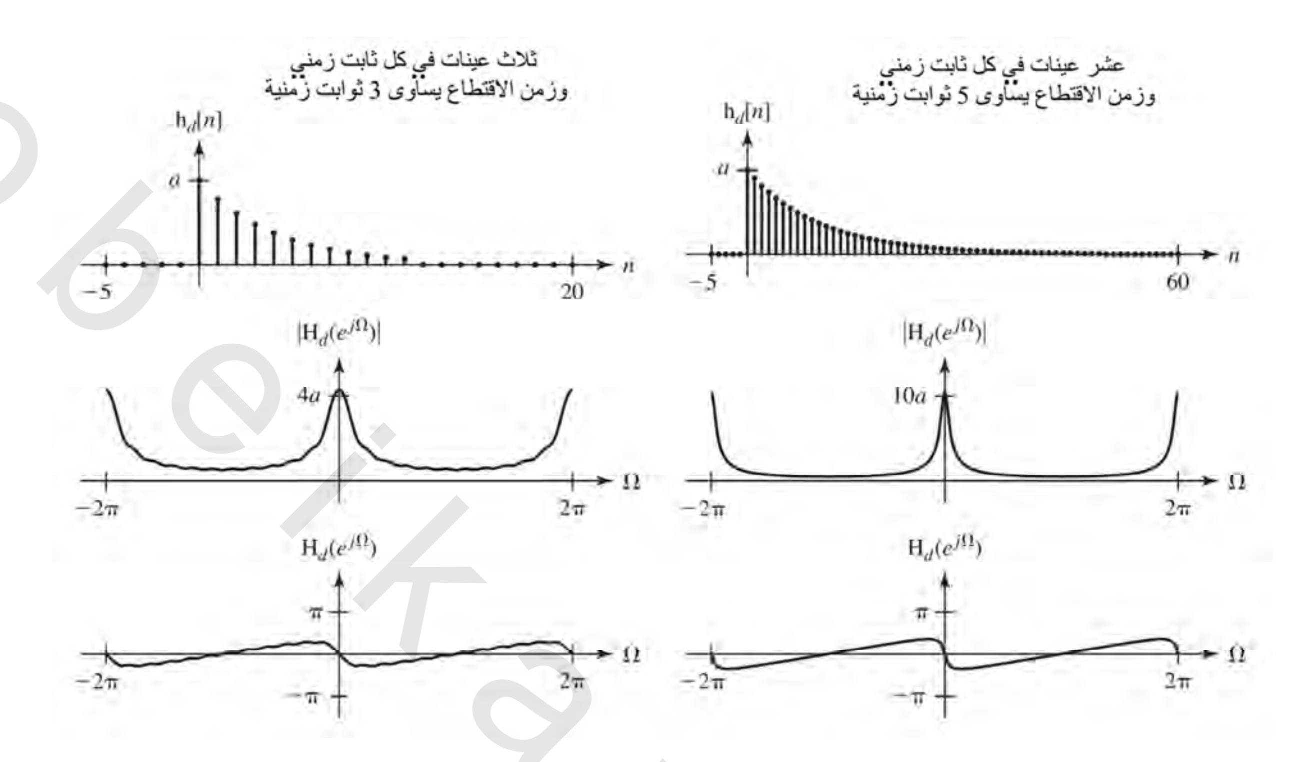
وتحويل z لهذه الاستجابة سيكون:

$$H_d(z) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{49} e^{-m/10} z^{-m}$$

وستكون الاستجابة الترددية كما يلي:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{49} e^{-m/10}(e^{j\Omega})^{-m} = \mathrm{a}\sum_{\mathrm{m=0}}^{49} e^{-m(1/10+j\Omega)}$$

انظر شكل (١٥.٤٢).



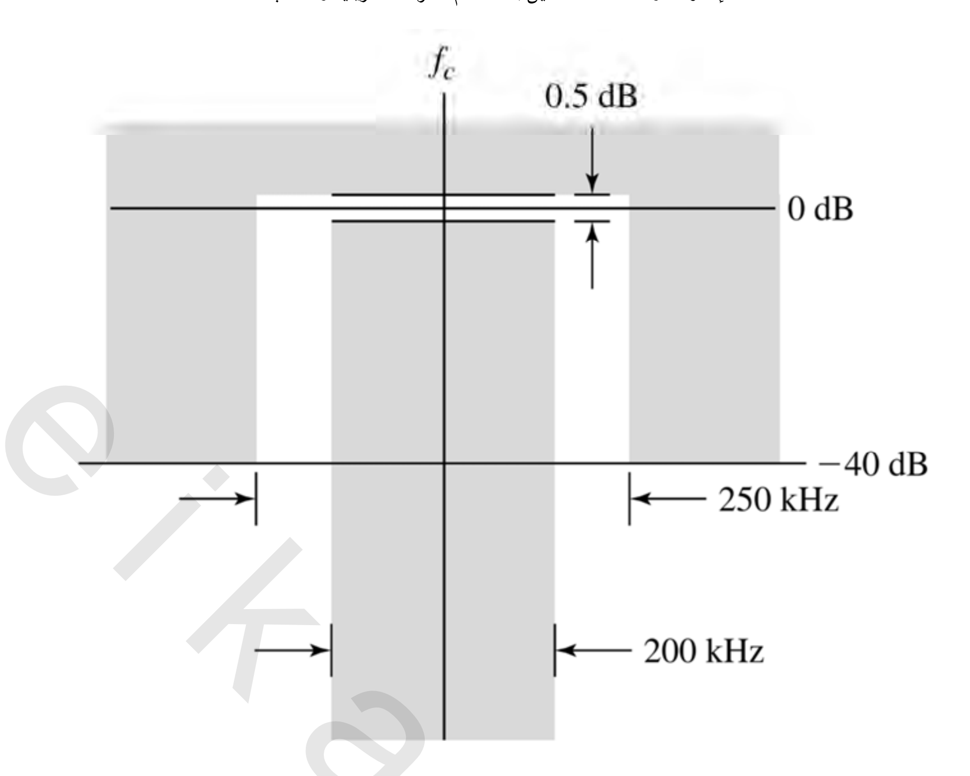
شكل رقم (١٥.٤٢) استجابات الصدمة والاستجابات الترددية لتصميمي FIR

تأثيرات الاقتطاع من الاستجابة الترددية تكون واضحة في صورة تذبذبات في الاستجابة الترددية لتصميم FIR عندما يكون معدل العينة قليلاً وزمن الاقتطاع أقصر.

مثال ١٥.١٠

تصميم مرشح رقمي لقناة اتصال

مدى الترددات بين 900 و 905MHz يتم تقسيمه إلى 20 قناة متساوية العرض يتم فيها إرسال الإشارات اللاسلكية. لكي يتم الإرسال في واحدة من هذه القنوات، يجب على المرسل أن يرسل إشارة يكون مقدار طيفها ينطبق داخل الحدود في شكل (١٥.٤٣). يقوم جهاز الإرسال بتعديل موجة حاملة جيبية يكون ترددها هو التردد المركزي لإحدى هذه القنوات، مستخدماً إشارة مجال القاعدة. قبل تعديل الموجة الحاملة يتم ترشيح إشارة مجال القاعدة التي يكون لها طيف مسطح تقريباً باستخدام مرشح FIR يكون دوره هو التأكد من أن الإشارة المرسلة تقابل الشروط الموجودة في شكل (١٥.٤٣). بفرض أن معدل العينة هو 2MHz صمم هذا المرشح.



شكل رقم (١٥.٤٣) مواصفات طيف الإشارة المرسلة

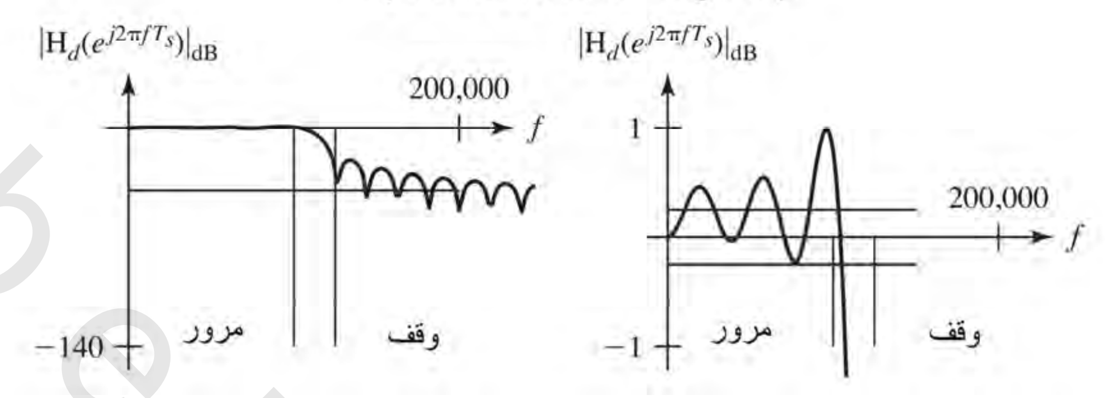
نحن نعرف أن شكل استجابة الصدمة للمرشح التماثلي المثالي لإشارة مجال القاعدة المنفذ للترددات المنخفضة سيكون :

$$h_a(a) = 2Af_m sinc\big(2f_m(t - t_0)\big)$$

حيث f_m هي التردد الركني. استجابة الصدمة المعيننة ستكون :

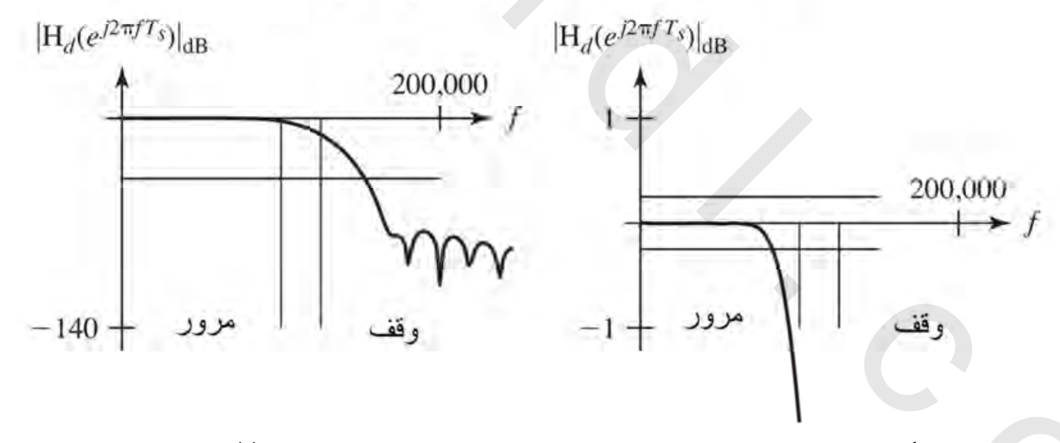
$$h_d[n] = 2Af_m sinc\big(2f_m(nT_s - t_0)\big)$$

يمكننا وضع التردد الركني للمرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة عند حوالي نصف المسافة بين 100kHz و 125kHz ولنفترض أنه 115kHz أو 5.75% من معدل العينة. سنفترض معامل التكبير يساوي A يساوي واحداً. الزمن بين العينات يساوي 0.5μs. سيقترب المرشح من المثالية مع اقتراب طوله من المالانهاية. كمحاولة أولى سنفترض أن متوسط مربع الفرق بين استجابة الصدمة للمرشح واستجابة الصدمة للمرشح المثالي يكون أقل من 1% مع استخدام نافذة مستطيلة. يمكننا أن نحدد تكرارياً كم سيكون طول المرشح عن طريق حساب متوسط مربع الفرق بين المرشح ومرشح بطول كبير جداً. بدفع متوسط مربع الخطأ الأقل من 1% سيجعل طول المرشح يساوي 108 أو أكثر. هذا التصميم يعطي الاستجابات الترددية التي في شكل (١٥.٤٤).



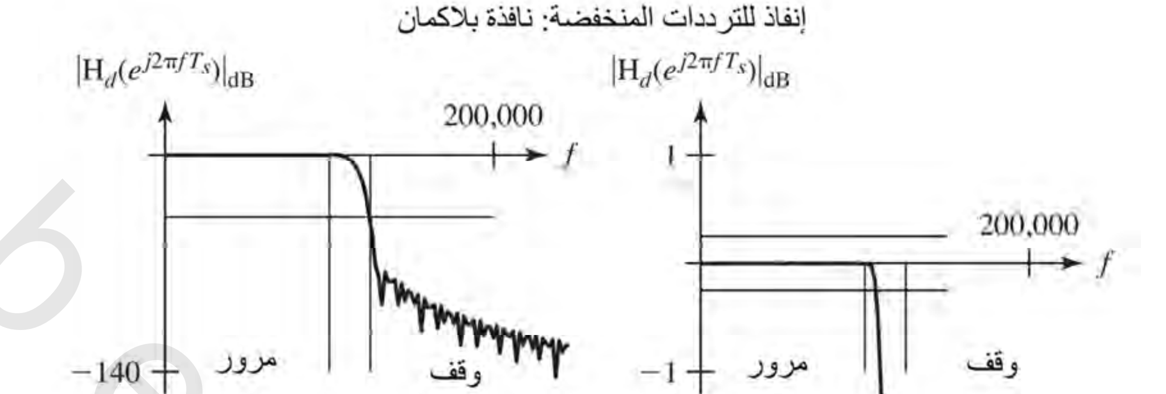
شكل رقم (١٥.٤٤) الاستجابة الترددية لمرشح FIR بنافذة مستطيلة وخطأ أقل من 1% في استجابة الصدمة

هذا التصميم ليس بالجودة الكافية. التذبذبات في مجال المرور كبيرة والقمع في مجال الوقف ليس كبيراً بما فيه الكفاية. يمكننا تقليل التذبذبات باستخدام نافذة مختلفة. دعنا نحاول مع نافذة بلاكمان مع الاحتفاظ بالمعاملات نفسه الأخرى كما في شكل (١٥.٤٥).



شكل رقم (١٥.٤٥) الاستجابة الترددية للمرشح FIR مع نافذة بلاكمان وخطأ أقل من 1% من استجابة الصدمة

هذا التصميم ما زال أيضاً غير مناسب. نحتاج لجعل متوسط مربع الخطأ أقل من ذلك. بجعل متوسط مربع الخطأ أقل من 25% سيجعل طول المرشح 210 وسيعطي مقدار استجابة ترددية كما في شكل (١٥.٤٦).



الشكل رقم (١٥.٤٦) الاستجابة الترددية للمرشح FIR مع نافذة بلاكمان وخطأ أقل من 25% من استجابة الصدمة.

هذا المرشح يفي بالشروط المطلوبة. القمع في مجال الوقف يحقق المطلوب تقريباً وأيضاً التذبذبات تقابل المواصفات المطلوبة بسهولة. مثل هذا التصميم لا يكون فريداً على الإطلاق. العديد من التصميمات الأخرى التي لها ترددات ركنية مختلفة قليلاً ومتوسط مربع خطأ أو نوافذ مختلفة من الممكن أن تحقق أيضاً هذه المواصفات نفسها.

التصميم الأمثل للمرشح FIR : هناك طريقة لتصميم المرشحات بدون استخدام نوفذة استجابات الصدمة أو تقريب التصميمات القياسية للمرشحات التماثلية. هذه الطريقة تسمى طريقة باركس مكليلان للتصميم الأمثل المتساوي التذبذبات وتم تقديمها عن طريق **Thomas W. Parks** توماس باركس و **James H. McClellan** جيمز مكليلان في بداية السبعينيات. إنها تستخدم خواريزم تم اكتشافه عام 1934 إفجيني رامز. شرح هذه الطريقة خارج الهدف من هذا الكتاب ولكنها على درجة من الأهمية بحيث يجب أن يهتم بها الطلاب وأن يكونوا قادرين على استخدامها في تصميم المرشحات الرقمية.

طريقة باركس مكليلان لتصميم المرشحات الرقمية تم تنفيذها في ماتلاب من خلال الأمر firpm التي صورتها العامة هي :

B=firpm(N, F, A)

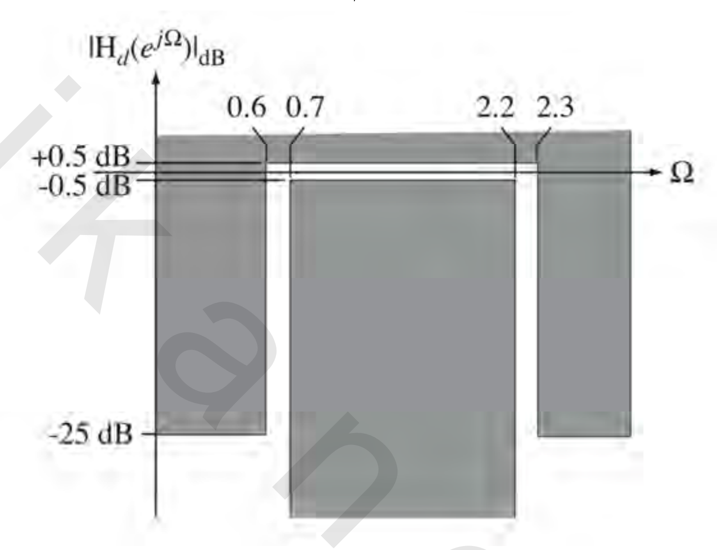
حيث B هي متجه من N+1 من المعاملات الحقيقية المتماثلة في استجابة الصدمة للمرشح FIR وهي تعطي أفضل تقريب لأي استجابة ترددية مطلوبة وموصوفة بـ F و A. F هي متجه حواف المجال الترددي كأزواج، في ترتيب تصاعدي بين 0 و 1 حيث الـ 1 يقابل تردد نيكويست أو نصف تردد العينة. على الأقل واحد من المجالات الترددية يجب أن يكون لها عرض لا يساوي الصفر. A متجه حقيقي له الحجم نفسه مثل F والذي يحدد المقدار المطلوب للاستجابة الترددية للمرشح الناتج B. الاستجابة المطلوبة تكون هي الخط الموصل للنقط ((F(k), A(k) و ,(F(k+1)

A(k+1)) لقيم الـ k الفردية. الأمر firpm يعامل المجالات بين F(k+1) و F(k+2) لقيم k الفردية كمجالات انتقالية. لذلك، فإن المقدار المطلوب يكون خطياً متقطع مع المجالات الانتقالية.

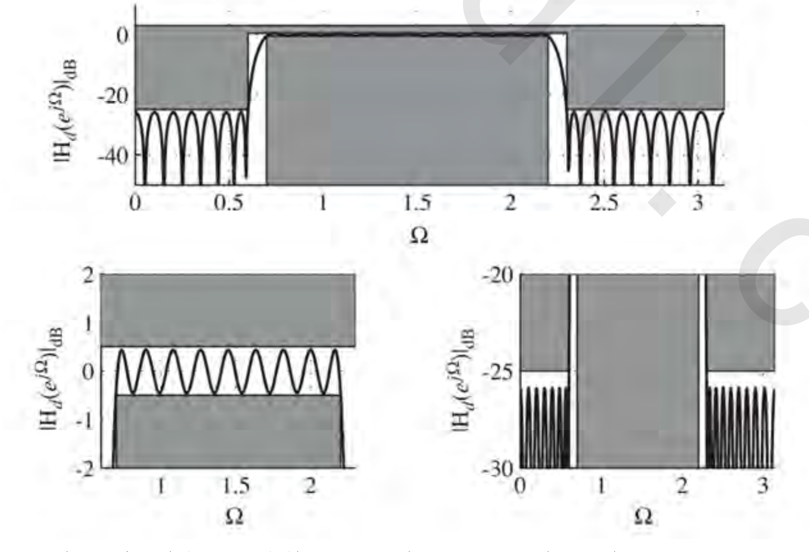
هذا الوصف يخدم فقط كمقدمة لهذه الطريقة. يمكن أن تجد تفاصيل أكثر في وصف المساعدة الموجودة في ماتلاب.

مثال ١٥.١١

تصميم مرشح رقمي منفذ لمجال من الترددات باستخدام طريقة مكليلان



شكل رقم (١٥.٤٧) مواصفات المرشح المنفذ لمجال من الترددات



شكل رقم (١٥.٤٨) الاستجابة الترددية لمرشح FIR مثالي متساوي الذبذبات منفذ لمجال من الترددات له N=70

حواف المجالات تكون عند $\Omega=\{0,0.6, 0.7, 2.2, 2.3, \pi\}$ وقدار الاستجابة عند هذه الحواف المجالية $A=\{0, 0, 1, 1, 0, 0\}$. لذلك فالمتجه F يجب أن يكون:

$$F=\Omega/\pi=\{0, 0.19, 0.2228, 0.7003, 0.7321, 1\}$$

بعد الاختيارات البسيطة لـ N، فقد وجد أن المرشح الذي له N=70 يقابل المواصفات المطلوبة، كما في شكل (١٥.٤٨).

أدوات تصميمية في ماتلاب

بالإضافة لخواص ماتلاب التي ذكرت في فصول سابقة وفي أجزاء سابقة من هذا الفصل، فهناك العديد من الأوامر الأخرى والدوال في ماتلاب التي يمكنها أن تساعد في تصميم المرشحات الرقمية.

ربما تكون أكثر هذه الدوال فائدة هي الدالة filter. هذه دالة تقوم بالترشيح الرقمي الحقيقي لمتجه من البيانات يمثل مقطعاً زمنياً محدداً من إشارة متقطعة زمنياً. الصورة العامة لهذه الدالة هي:

y=filter(bd, ad, x)

حيث x هي متجه البيانات المطلوب ترشيحها و bd و ad يمثلان متجهي معاملات في معادلة المرشح التي ستكون على الصورة التالية:

$$ad(1)*y(n)=bd(1)*x(n)+bd(2)*x(n-1)+\cdots+bd(nb+1)*x(n-nb)-ad(2)*y(n-1)-\cdots-ad(na+1)*y(n-na)$$

(هذه المعادلة مكتوبة في الصورة المستخدمة في ماتلاب الذي يستخدم الأقواس (.) للدلالة على معاملات كل الدوال بدون التمييز بين الدوال المستمرة أو المتقطعة زمنياً). دالة متعلقة بهذه الدالة السابقة هي الدالة filtfilt. إنها تعمل بطريقة الدالة نفسها filter تماماً فيما عدا أنها تقوم بترشيح متجه البيانات بالطريقة العادية المعروفة ثم بعد ذلك تقوم بترشيح متجه البيانات الناتج بطريقة عكسية. إن ذلك يجعل الإزاحة الطورية الناتجة عن عملية الترشيح الكلية تساوي صفراً تماماً عند جميع الترددات وتضاعف المقدار بالديسبل.

هناك أربع دوال أخرى متعلقة بالموضوع، وكل منها تصمم مرشحاً رقمياً. الدالة butter تصمم مرشح رقمي بترورث من الدرجة N منفذاً للترددات المنخفضة من خلال الصورة العامة لها وهي:

[bd, ad]=butter[N, wn]

حيث N هي درجة المرشح، و wn هي التردد الركني يتم التعبير عنها كنسبة أو كسر من معدل العينة (وليست معدل العينة نفسه). هذه الدالة تعطي متجهي المعاملات bd و ad التي يمكن استخدامها مباشرة مع الدالة filter أو الدالة filtfilt لترشيح أي متجه من البيانات. يمكن استخدام هذه الدالة أيضاً لتصميم مرشح رقمي بترورث منفذاً لمجال من الترددات عن طريق وضع ωn عبارة عن متجه صف يحتوي الترددين الركنيين للمرشح على الصورة [ω1, ω2]. مجال المرور للمرشح سيكون بالتالي $\omega1<\omega<\omega2$ وبالطريقة نفسها ستكون نسبة من معدل العينة. يمكن إضافة العبارة 'high' أو 'stop' لتصميم مرشح منفذ للترددات العالية أو معوق لمجال من الترددات.

أمثلة

[bd, ad]=butter[3, 0.1]	مرشح بترورث من الدرجة الثالثة تردده الركني عند $0.5f_s$
[bd, ad]=butter[4, [0.1 0.2]]	مرشح بترورث من الدرجة الرابعة منفذ لمجال من الترددات والترددات الركنية عند $0.05f_s$ و $0.1f_s$
[bd, ad]=butter[4, 0.02, 'high']	مرشح بترورث من الدارجة الرابعة منفذ للترددات المرتفعة وتردده الركني عند $0.1f_s$
[bd, ad]=butter[2,[0.32 0.34], 'stop']	مرشح بترورث من الدرجة الثانية معوق لمجال من الترددات ترددات الركنية عند $0.16f_s$ و $0.17f_s$

(هناك أيضاً صور بديلة للدالة butter يمكنك مراجعتها بكتابة help butter حيث يمكن استخدامها أيضاً لتصميم المرشحات التماثلية).

الثلاث دوال الأخرى هي الدوال cheby1 ، و cheby2 ، و ellip وهذه الدوال تصمم مرشحات من النوع شيبيشيف والبيضاوي. المرشحات شيبيشيف والبيضاوية تتميز بمجال انتقال أضيق من المرشحات البترورث التي لها الدرجة نفسها ولكن ذلك يتم على حساب التذبذبات في مجال المرور أو مجال الوقف. الصورة العامة لهذه الدوال تشبه تماما الدالة butter فيما عدا أنه يتم ذكر أعلى قيمة مسموحة للتذبذبات في مجالات المرور أو الوقف.

هناك العديد من دوال النوافذ المثالية التي يمكن استخدامها مع المرشحات FIR. هذه الدوال هي Bartlett ، و blackman ، و boxcar وهي المستطيلة ، و chebwin نافذة شيبيشيف ، و hamming ، و hanning ، و kaiser ، و triang وهي تشبه ولكنها ليست مساوية للنافذة بارتليت.

الدالة freqz تعطي الاستجابة الترددية لمرشح رقمي بطريقة مشابهة للدالة freqs للمرشحات التماثلية. الصورة العامة لهذه الدالة هي :

```
[H, ω]=freqz(bd, ad, N]  ;
```

حيث H هي الاستجابة الترددية المركبة للمرشح ، و W هي متجه للترددات المتقطعة زمنياً بالراديان (ليس راديان على الثانية لأنها تردد متقطع زمنياً) التي يتم حساب H عندها ، و bd و sd هي متجهات معاملات البسط والمقام لدالة عبور المرشح الرقمي و N هي عدد النقاط.

الدالة upfirdn تغير معدل العينة لأي إشارة برفع المعدل upsampling ثم الترشيح FIR ثم تخفيض معدل العينة downsampling. الصورة العامة لهذه الدالة هي :

```
y=upfirdn(x,h,p,q)   ;
```

حيث y هي الإشارة الناتجة من تغيير معدل العينة ، و x هي الإشارة المطلوب تغيير معدل العينة لها ، و h هي استجابة الصدمة للمرشح FIR ، و p هي معامل رفع معدل العينة عن طريق إدخال أصفار في الإشارة قبل الترشيح ، و q هي معامل تخفيض معدل العينة للإشارة بعد عملية الترشيح.

هذه ليست كل قدرات ماتلاب على معالجة الإشارات الرقمية. اكتب help signal لترى دوال أخرى.

مثال ١٥.١٢

ترشيح نبضة متقطعة زمنياً باستخدام مرشح بترورث منفذ للترددات المرتفعة في ماتلاب

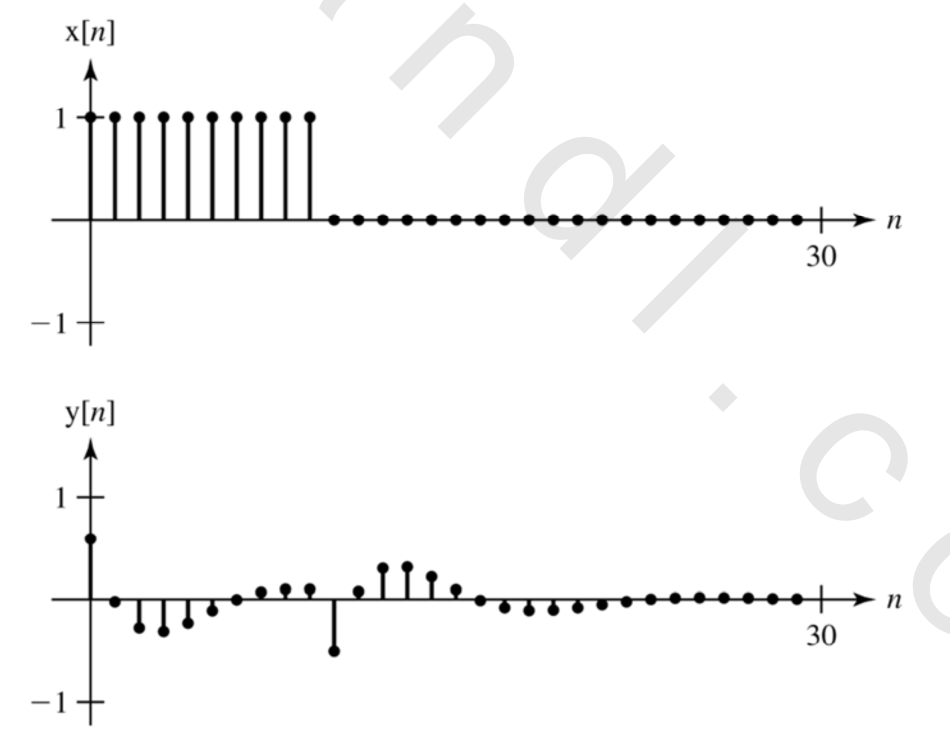
رشح رقميا الإشارة التالية المتقطعة زمنياً :

$$x[n]=u[n]-u[n-10]$$

باستخدام مرشح رقمي بترورث من الدرجة الثالثة منفذ للترددات المرتفعة تردده الركني المتقطع زمنياً هو $\pi/6$ راديان.

```
% استخدام ٣٠ نقطة لتمثيل الإثارة والاستجابة
N = 30 ;
% توليد إشارة الإثارة
n = 0:N-1 ; x = uDT(n) - uDT(n-10) ;
% تصميم مرشح رقمي بترورث من الدرجة الثالثة منفذ للترددات المرتفعة
[bd,ad] = butter(3,1/6,'high') ;
% ترشيح الإشارة
y = filter(bd,ad,x) ;
```

شكل (١٥.٤٩) يبين كل من الإثارة والاستجابة لهذا المرشح.



شكل رقم (١٥.٤٩) الإثارة والاستجابة لمرشح رقمي بترورث منفذ للترددات المرتفعة من الدرجة الثالثة

(١٥.٤) ملخص للنقاط المهمة

١- المرشح بتروورث مسطح تماماً في كل من مجالي المرور والوقف وكل أقطابه تقع على نصف دائرة في النصف الأيسر من المستوى s.

٢- يمكن تحويل مرشح بتروورث منفذ للترددات المنخفضة إلى آخر منفذ للترددات المرتفعة، أو منفذ لمجال من الترددات أو معوق لمجال من الترددات عن طريق التغيير المناسب في معاملات المرشح.

٣- المرشحات شيبيشيف، والبيضاوية والبيسيل كلها مرشحات تمت أمثلتها على أساس مختلف عن المرشح بتروورث. يمكن تصميمها أيضاً لتكون منفذة للترددات المنخفضة، ثم بعد ذلك يمكن تحويلها إلى أخرى منفذة للترددات العالية أو منفذة أو معوقة لمجال من الترددات.

٤- أحد الطرق الشهيرة لتصميم المرشحات الرقمية هي محاكاة التصميمات المعروفة للمرشحات التماثلية.

٥- هناك فصيلان أساسيان من المرشحات الرقمية وهما المرشحات ذات استجابة الصدمة اللانهائية IIR والمرشحات ذات استجابة الصدمة المحددة FIR.

٦- أشهر طرق تصميم المرشحات الرقمية IIR هي طريقة ثبات الصدمة، وثبات الخطوة، والتعويض المباشر، وتحويل z المتوافق، والطريقة ثنائية الخطية.

٧- المرشحات FIR يمكن تصميمها عن طريق نوفذة استجابة صدمة مثالية أو عن طريق خوارزم مكليلان المتساوي التذبذبات.

تمارين مع إجاباتها

(في كل تمرين تكون الإجابات مرتبة عشوائياً)

المرشحات بتروورث المستمرة زمنياً

١- باستخدام الآلة الحاسبة، أوجد دالة العبور لمرشح بتروورث منفذ للترددات المنخفضة من الدرجة الثالثة (n=3) وتردده الركني هو $w_c=1$ ومعامل تكبير يساوي واحداً عند التردد صفر؟

الإجابة:

$$\frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

٢- باستخدام ماتلاب أوجد دالة العبور لمرشح بتروورث منفذ للترددات المنخفضة من الدرجة الثامنة تردده الركني عند $w_c=1$ ومعامل تكبيره يساوي واحداً عند التردد صفر؟

الإجابة:

$$\frac{1}{s^8+5.126s^7+13.1371s^6+21.8462s^5+25.6884s^4+21.8462s^3+13.1371s^2+5.126s+1}$$

٣- أوجد دالة العبور لكل من المرشحات بتروورث التالية:

(أ) من الدرجة الثانية منفذ للترددات المرتفعة تردده الركني 20kHz ومعامل تكبيره في مجال المرور يساوي 5.

(ب) من الدرجة الثالثة منفذ لمجال من الترددات وتردداته الركنية هي 4750Hz و 5250Hz ومعامل تكبير مجال المرور يساوي واحداً.

(ت) من الدرجة الرابعة معوق لمجال من الترددات وتردداته الركنية هي 9.975MHz و 10.025MHz ومعامل تكبير مجال المرور يساوي واحداً.

الإجابة :

$$\frac{3.1\times10^4 s^3}{s^6+6283s^5+2.97\times10^9 s^4+1.24\times10^{13}s^3+2.93\times10^{18}s^2+6.09\times10^{21}s+9.542\times10^{26}}$$

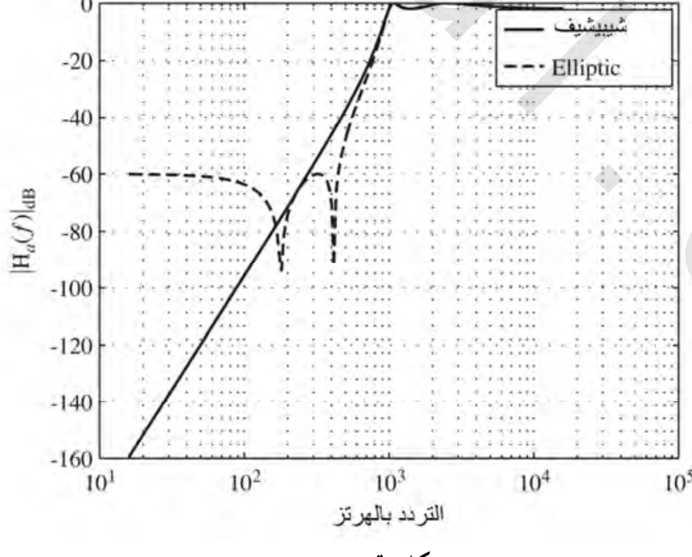
$$\frac{s^8+1.57\times10^{16}s^6+9.243\times10^{31}s^4+2.418\times10^{47}s^2+2.373\times10^{62}}{\begin{bmatrix} s^8+8.205\times10^5 s^7+1.57\times10^{16}s^6+9.665\times10^{21}s^5+9.24\times10^{31}s^4+ \\ 3.729\times10^{37}s^3+2.419\times10^{47}s^2+5.256\times10^{52}s+2.373\times10^{62} \end{bmatrix}}$$

$$\frac{5s^2}{s^2+1.777\times10^5 s+1.579\times10^{10}}$$

٤- باستخدام ماتلاب صمم مرشح شيبيشيف نوع 1، وآخر بيضاوياً من الدرجة الرابعة منفذاً للترددات المرتفعة وتردد قطع يساوي 1kHz. افترض أن التذبذبات المسموحة في مجال المرور تساوي 2dB وافترض أن أقل إعاقة في مجال الوقف تساوي 60dB. ارسم مخطط بود للمقدار للاستجابات الترددية لهما على التدريج نفسه للمقارنة. ما هو عرض مجال الانتقال لكل مرشح ؟

الإجابة :

مرشح شيبيشيف نوع ١ : 726Hz ، والبيضاوي : 555Hz



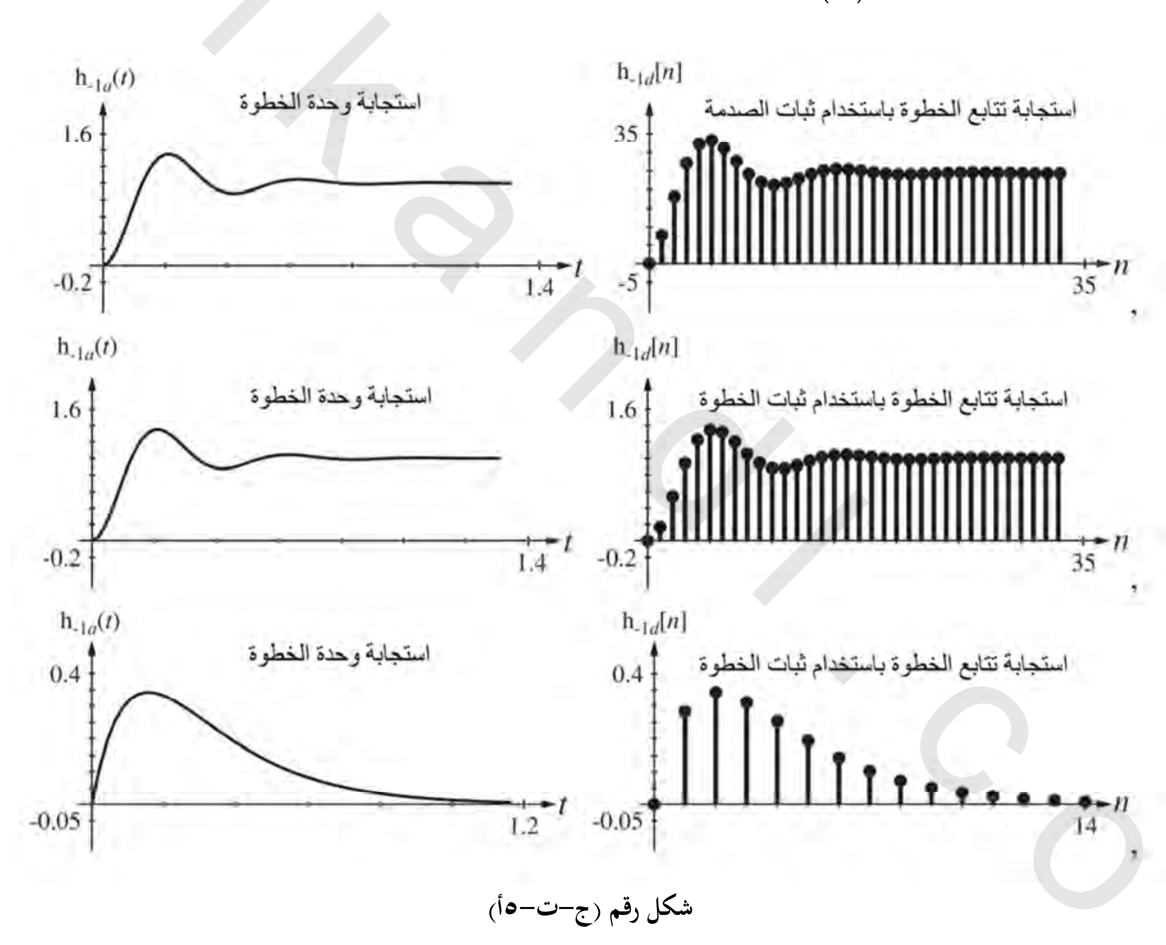
شكل رقم (ج-ت٤)

تصميم المرشحات بثبات الصدمة وثبات الخطوة

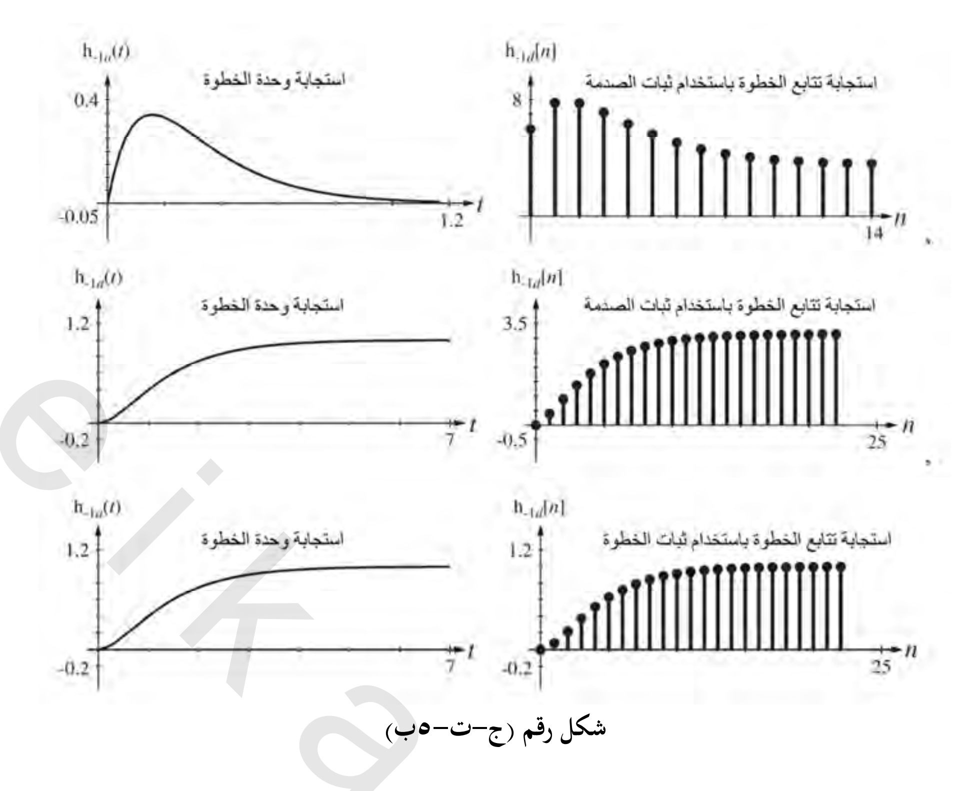
٥- باستخدام طرق تصميم ثبات الصدمة وثبات الخطوة، صمِّمْ مرشحات رقمية تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختره معدل العينة يكون ١٠ مرات مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن عن طريق الرسم بين استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والتماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$ (ب) $H_a(s) = \frac{6s}{s^2+13s+40}$

(ت) $H_a(s) = \frac{250}{s^2+10s+250}$



شكل رقم (ج–ت–٥أ)



شكل رقم (ج–ت–٥ب)

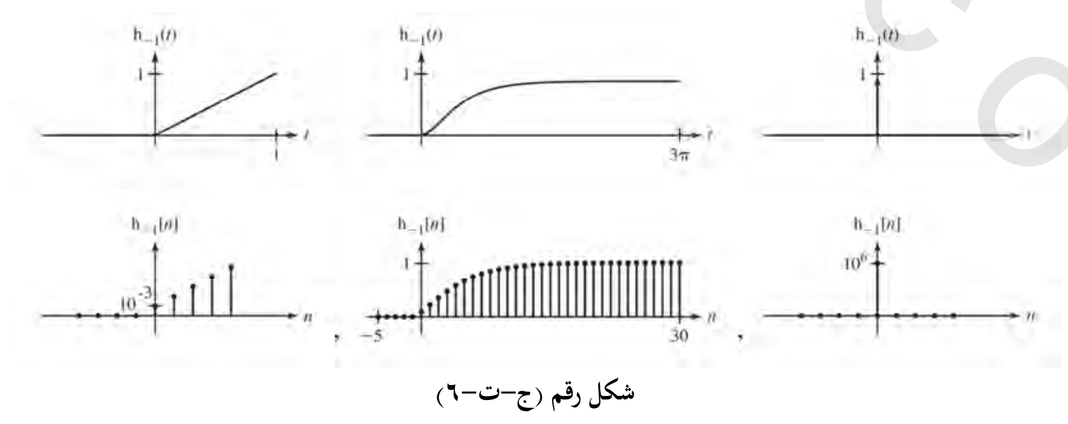
تصميم المرشحات بالفروق المحددة

٦- باستخدام طريقة الفروق المحددة وكلها فروق عكسية، صمم مرشحات رقمية تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة إذا لم يتم ذكر تردد العيننة، اختر معدل عيننة يكون ١٠ مرات مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن بالرسم بين استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والتماثلي.

(أ) $H_a(s) = s,\ f_s = 1\text{MHz}$ (ب) $H_a(s) = 1/s,\ f_s = 1\text{kHz}$

(ت) $H_a(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$

الإجابة:



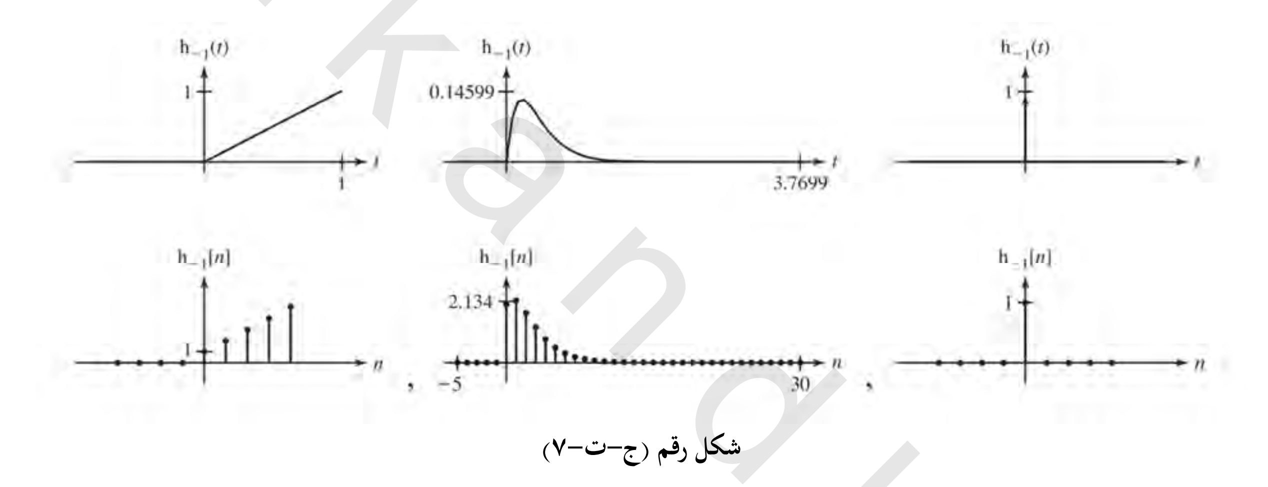
شكل رقم (ج–ت–٦)

تصميم المرشحات بطريقة تحويل z المتوافق وطريقة التعويض المباشر

٧- باستخدام طريقتي تحويل z المتوافق والتعويض المباشر، صمم مرشحات رقمية تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر معدل العينة يكون ١٠ مرات مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s (إلا إذا كانت كل الأقطاب أو الأصفار عند نقطة الأصل وفي هذه الحالة، فإن معدل العينة لن يكون مهماً في هذه الطريقة). قارن عن طريق الرسم بين استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والتماثلي.

(أ) $H_a(s) = s$ (ب) $H_a(s) = 1/s$ (ت) $H_a(s) = \frac{2s}{s^2+10s+25}$

الإجابة:



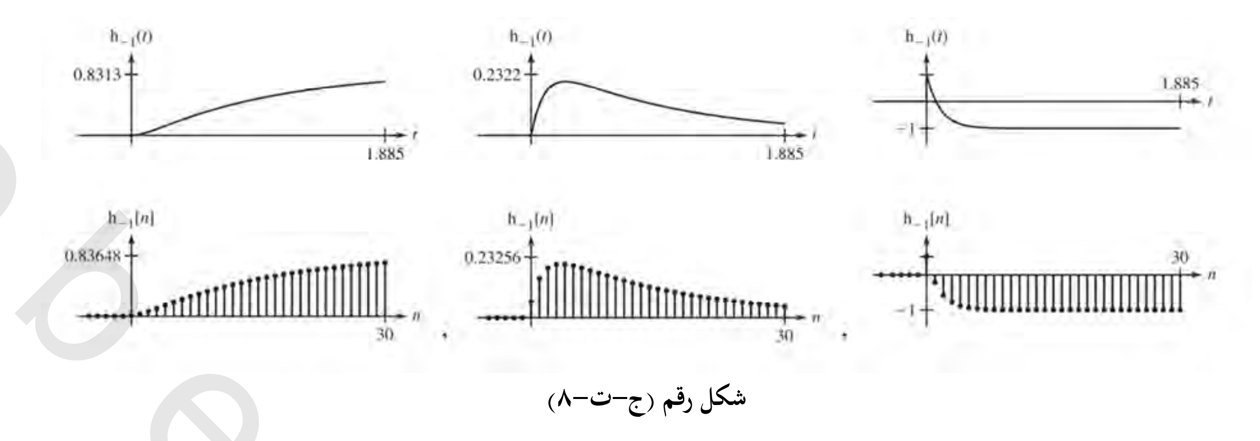
شكل رقم (ج–ت–٧)

تصميم المرشحات بطريقة التحويل ثنائي الخطية

٨- باستخدام طريقة التحويل ثنائي الخطية، صمم مرشحات رقمية تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر معدل العينة يكون ١٠ مرات مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن عن طريق الرسم بين استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والتماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{s-10}{s+10}$ (ب) $H_a(s) = \frac{10}{s^2+11s+10}$ (ت) $H_a(s) = \frac{3s}{s^2+11s+10}$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٨)

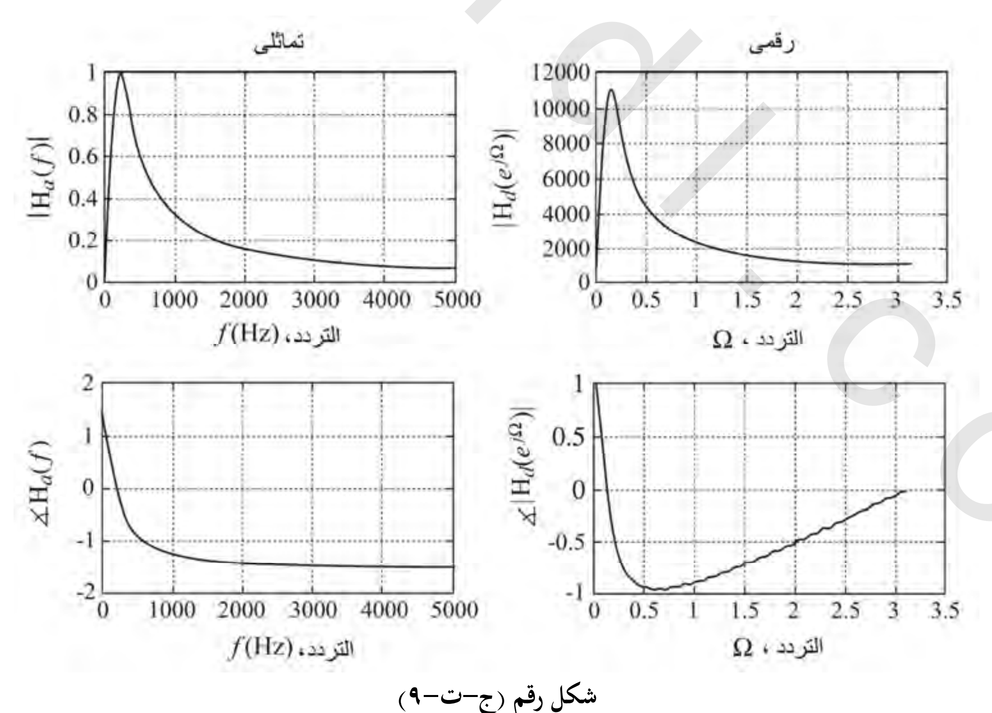
تصميم المرشحات FIR

٩- باستخدام نافذة مستطيلة عرضها ٥٠ ومعدل عينة مقداره 10000عينة/الثانية، صَمِّمْ مرشحاً رقمياً FIR يحاكي المرشح التماثلي الذي له دالة العبور التالية:

$$H_a(s) = \frac{2000s}{s^2+2000s+2\times10^6}$$

قارن بين الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي.

الإجابة:

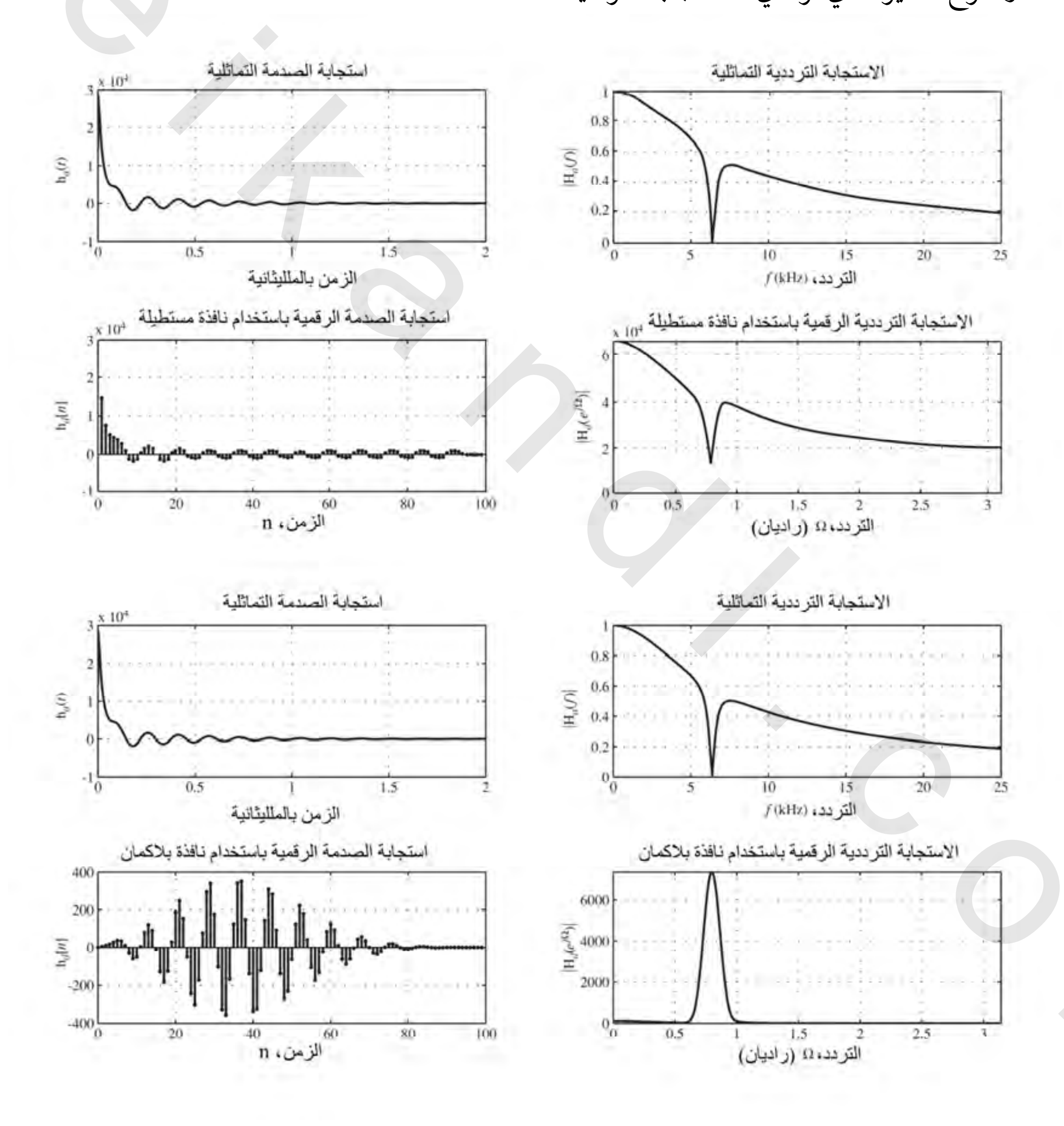


شكل رقم (ج–ت–٩)

١٠- باستخدام النافذة المستطيلة التي عرضها 100 ومعدل عيننة يساوي 50000 عينة/الثانية، صَمِّمْ مرشحاً رقمياً يحاكي المرشح التماثلي الذي له دالة العبور التالية:

$$H_a(s) = 3 \times 10^4 \frac{s^2+1.6\times10^9}{(s+3\times10^4)(s^2+5000s+1.6\times10^9)}$$

ارسم استجابة الصدمة والاستجابة الترددية للمرشح الرقمي. أعد هذا التصميم مستخدماً نافذة بلا كمان واشرح التأثير الذي تراه في الاستجابة الترددية.



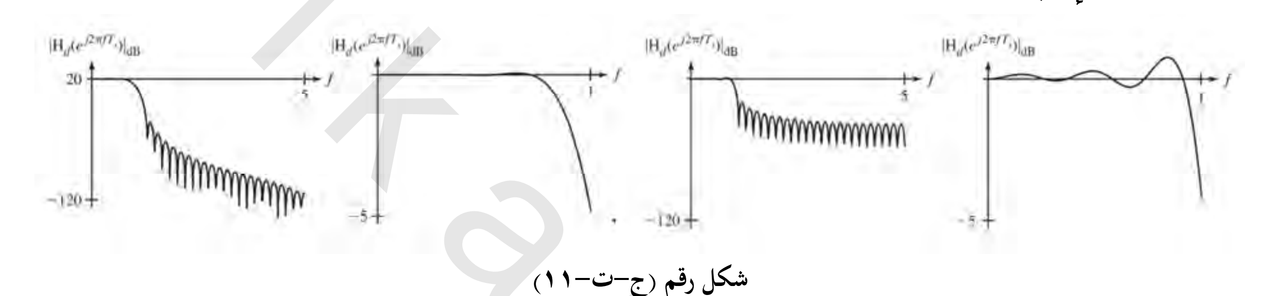
شكل رقم (ج-ت-١٠)

١١- صَمِّمْ مرشحاً رقمياً تقريبياً لكل واحد من المرشحات التماثلية المثالية التالية عن طريق عينة نسخة مقتطعة من استجابة الصدمة وباستخدام النافذة المذكورة. في كل حالة اختر معدل العينة بحيث يكون 10 أمثال أكبر تردد يمر من المرشح التماثلي. اختر أزمنة التأخير ومرات الاقتطاع بحيث لا يتم اقتطاع أكثر من 1٪ من طاقة بإشارة استجابة الصدمة. قارن بالرسم بين الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي باستخدام تدريج بالديسبل مع التردد الخطي.

(أ) مرشح منفذ للترددات المنخفضة، و f_c=1Hz، و نافذة مستطيلة

(ب) مرشح منفذ للترددات المنخفضة، f_c=1Hz، و نافذة هان

الإجابة:



شكل رقم (ج-ت-١١)

تمارين بدون إجابات

المرشحات التماثلية

١٢- يتم استخدام ازدواج حراري لقياس درجة الحرارة في العديد من العمليات الصناعية. يتم تثبيت الازدواج الحراري ميكانيكياً في العادة داخل شريحة معدنية لحمايته من التلف نتيجة الاهتزازات أو الانثناء أو أي قوى أخرى. أحد تأثيرات هذه الحماية هي أن الكتلة الحرارية لها تبطئ الاستجابة الزمنية الفعلية للازدواج الحراري مع هذه الحماية بالمقارنة بالاستجابة الزمنية للازدواج الحراري وحده. افترض أن درجة الحرارة الفعلية على السطح الخارجي للحماية بالكيلفين هي $T_s(t)$، وافترض أن فرق الجهد الناتج من الازدواج كاستجابة للحرارة هو $v_t(t)$. استجابة الازدواج لكلفين واحد كخطوة تغيرية لدرجة الحرارة على سطح الحماية من T_1 إلى T_1+1 هي:

$$v_t(t) = K\left[T_1 + \left(1 - e^{-\frac{t}{0.2}}\right)u(t)\right]$$

حيث K هي ثابت تحويل درجة حرارة الازدواج إلى فرق جهد.

(أ) افترض أن ثابت التحويل K=40μV/K. صَمِّمْ مرشحاً فعالاً يعالج جهد الازدواج ويستعوض زمن تأخيره بحيث يجعل استجابة النظام الكلي لخطوة في درجة حرارة الحماية تكون هي نفسها خطوة جهدية مقدارها 1mV.

(ب) افترض أيضاً أن الازدواج يتعرض لتداخل كهرومغناطيسي EMI من خطوط القدرة والأجهزة القريبة. افترض أن الـ EMI تم نمذجتها بدالة جيبية مقدارها 20μV عند طرفي الازدواج. احسب استجابة مرشح الازدواج لترددات EMI تساوي 1Hz و 10Hz و 60Hz. ما مقدار التغيرات في درجة الحرارة الناتجة بسبب كل حالة من الـ EMI ؟

١٣- صَمِّمْ مرشح شيبيشيف نوع 2 منفذاً لمجال من الترددات بأقل درجة ممكنة لتحقيق المواصفات التالية :

مجال مرور : 4kHz حتى 6kHz ، ومعامل التكبير بين الصفر و 2dB-

مجال الوقف : 3kHz> و 8kHz< ، والإعاقة أو الاضمحلال 60dB<

ما هي أقل درجة؟ ارسم مخطط بود لمقدار وزاوية الاستجابة الترددية واختبره لتتأكد من مواصفات مجالي المرور والوقف قد تحققت. ارسم مخطط الأصفار والأقطاب. ما هو زمن حدوث القمة في استجابة الصدمة؟

تصميم المرشحات بطريقة ثبات الصدمة وثبات الخطوة

١٤- باستخدام طريقة التصميم بثبات الصدمة ، صمم نظاماً متقطعاً زمنياً ليحاكي الأنظمة المستمرة زمنياً التي لها دوال العبور التالية ومعدلات العينة التالية. قارن بين استجابات الصدمة واستجابات الخطوة للأنظمة المستمرة والمتقطعة زمنياً.

(أ) $H_a(s) = \frac{712s}{s^2+46s+240}, f_s = 20Hz$

(ب) $H_a(s) = \frac{712s}{s^2+46s+240}, f_s = 200Hz$

١٥- باستخدام طرق التصميم بثبات الصدمة وثبات الخطوة، صمم المرشحات الرقمية التي تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر تردد عينة يساوي 10 مرات من مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن برسم استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{16s}{s^2+10s+250}$ (ب) $H_a(s) = \frac{s+4}{s^2+12s+32}$

(ت) $H_a(s) = \frac{s^2+4}{s(s^2+12s+32)}$

تصميم المرشحات بالفروق المحددة

١٦- باستخدام طريقة الفروق المحددة وكلها فروق عكسية ، صَمِّمْ المرشحات الرقمية التي تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر تردد عينة يساوي 10 مرات من مقدار المسافة بين أبعد قطب ، أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن برسم استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{s^2}{s^2+3s+2}$ (ب) $H_a(s) = \frac{s+60}{s^2+120s+2000}$

(ت) $H_a(s) = \frac{16s}{s^2+10s+250}$

تصميم المرشحات باستخدام تحويل z المتوافق والتعويض المباشر

١٧- باستخدام طريقة التعويض المباشر، صَمِّمْ المرشحات الرقمية التي تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر تردد عيننة يساوي ١٠ مرات من مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفراً من نقطة الأصل في المستوى s. قارن برسم استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{s^2}{s^2+1100s+10^5}$ (ب) $H_a(s) = \frac{s^2+100s+5000}{s^2+120s+2000}$

(ت) $H_a(s) = \frac{s^2+4}{s^2+12s+32}$

تصميم المرشحات بطريقة التحويل ثنائي الخطية

١٨- باستخدام طريقة التحويل ثنائي الخطية، صمم المرشحات الرقمية التي تحاكي المرشحات التماثلية التي لها دوال العبور التالية. في كل حالة اختر تردد عيننة يساوي ١٠ مرات من مقدار المسافة بين أبعد قطب أو صفر من نقطة الأصل في المستوى s. قارن برسم استجابات الخطوة للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي.

(أ) $H_a(s) = \frac{s^2}{s^2+100s+250000}$ (ب) $H_a(s) = \frac{s^2+100s+5000}{s^2+120s+2000}$

(ت) $H_a(s) = \frac{s^2+4}{s^2+12s+32}$

١٩- استخدم التحويل ثنائي الخطية ومعدل عيننة 10kHz لتحاكي المرشح التماثلي بترورث من الدرجة الرابعة المنفذ للترددات المنخفضة والذي له تردد قطع 4kHz. أوجد النقطة 3dB- للمرشح الرقمي وقارنها مع تردد القطع المطلوب $\Omega_c=2\pi f_c/f_s=0.8\pi$ ، لماذا يختلفان ؟

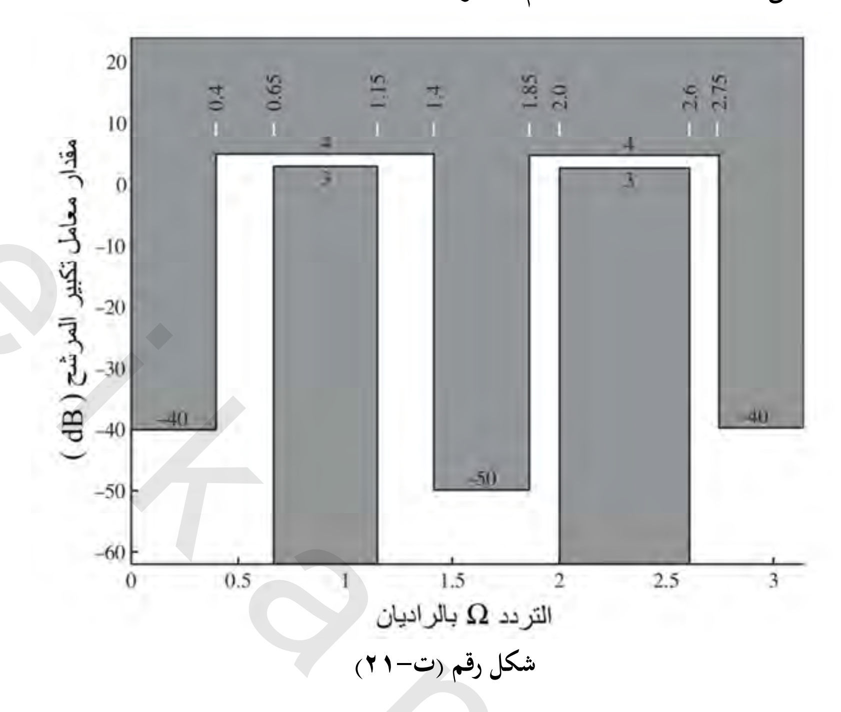
تصميم المرشحات FIR

٢٠- صمم مرشحاً رقمياً يحاكي كل واحد من المرشحات التماثلية المثالية التالية عن طريق عيننة نسخة مقتطعة من استجابة الصدمة واستخدام النوافذ المذكورة. في كل حالة اختر معدل العيننة يساوي ١٠ مرات أعلى تردد يمر من خلال المرشح التماثلي. اختر أزمنة التأخير والاقتطاع بحيث إنه ليس أكثر من ١٪ من طاقة الإشارة في استجابة الصدمة سيتم اقتطاعها. قارن بالرسم بين مقدار الاستجابات الترددية للمرشح الرقمي والمرشح التماثلي المثالي باستخدام تدريج dB مع التردد الخطي.

(أ) منفذ لمجال من الترددات، flow=10Hz ، fhigh=20Hz ، و نافذة مستطيلة

(ب) منفذ لمجال من الترددات، flow=10Hz ، fhigh=20Hz ، و نافذة بلاكمان

٢١- ارسم الاستجابة الترددية لمرشح FIR مصمم باستخدام خواريزم مكليلان الذي يحقق المواصفات الموضحة في شكل (ت- ٢١) باستخدام أقصر استجابة صدمة ممكنة.



شكل رقم (ت–٢١)



التحليل بفضاء الحالة

(١٦.١) المقدمة والأهداف

كانت معظم تحليلات الأنظمة في الفصول السابقة بسيطة نسبياً، بدخل واحد وخرج واحد. نحن الآن لدينا الأدوات اللازمة أو الضرورية لمواجهة الأنظمة الكبيرة. من الممكن أن يكون تحليل الأنظمة الكبيرة مملاً وعرضة للأخطاء نتيجة حجم نظام المعادلات الكبير المطلوب لوصف هذه الأنظمة وعدد المعالجات المطلوبة لإيجاد حل لهذه المعادلات. لذلك كان من الضروري أن نوجد خطوات منتظمة لتعيننا على التعامل مع الأنظمة الكبيرة وأن نوجد حلولاً لهذه الأنظمة بدون أخطاء وبدون تضييع أزمنة كبيرة. طريقة مشهورة لتحليل الأنظمة الكبيرة تكون من خلال تحليل فراغ الحالةstate space analysis باستخدام متغيرات الحالة.

أهداف الفصل

١- تنظيم عملية تحليل الأنظمة الكبيرة .

٢- التعرف على درجة النظام ثم نحدد له متغيرات الحالة تبعاً لذلك.

٣- تطبيق طرق المصفوفات التي تخفي تعقيد النظام في صورة مدمجة .

٤- تحديد عمليات معينة على النظام ومعاملاته التي تغلف أو تحتوي صفات النظام.

٥- إيجاد العلاقة بين التحليل بالحالة الفراغية ودوال العبور .

٦- تعلم كيفية التحويل من واحد من متغيرات الحالة إلى متغير حالة آخر وكيفية وضع متغيرات الحالة التي تصف الأنظمة في صورة قطرية .

٧- التألف والتعود على استخدام أدوات ماتلاب في تحليل فضاء الحالة .

٨- تطبيق طرق الحالة الفراغية على كل من الأنظمة المستمرة زمنياً والأنظمة المتقطعة زمنياً .

(١٦.٢) الأنظمة المستمرة زمنياً

أي مجموعة من متغيرات الحالة هي مجموعة الإشارات في هذا النظام، التي مع بعضها بعضاً، ومع إثارات النظام، تحدد حالة النظام بالكامل عند أي زمن مقبل. افترض المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة. نريد أن نعرف الجهد المبدئي على المكثف من أجل أن نصل للثوابت الاختيارية ونحصل على الحل الصحيح لاستجابة الجهد المستقبلية. في دائرة RLC سنحتاج لكل من الجهد المبدئي على المكثف والتيار البدئي في الملف. جهد المكثف وتيار الملف يعتبران أمثلة بسيطة على متغيرات الحالة، وقيمهما تحدد تماما حالة النظام عند أي زمن. بمجرد معرفتنا لهذين المتغيرين وديناميكية النظام والإثارة فإنه يمكننا معرفة أي شيء آخر نريده لتحديد حالة النظام في الأزمنة المستقبلية.

كل نظام له درجة. درجة النظام هي نفسها عدد متغيرات الحالة الضرورية من أجل التحديد الفريد لحالته. إذا كان النظام موصوفاً بمعادلة تفاضلية أو معادلة فرقية واحدة، فإن درجة النظام تكون هي نفسها درجة هذه المعادلة. إذا كان النظام موصوفاً بعدد من المعادلات المستقلة، فإن درجته تكون مجموع درجات هذه المعادلات. عدد متغيرات الحالة المطلوبة لأي نظام تحدد حجم متجه الحالة وبالتالي عدد الأبعاد في فراغ الحالة، والتي تعتبر مجرد مثال محدد لفراغ المتجه. بعد ذلك يمكن تصور أو وضع حالة النظام كموضع في فراغ الحالة. من المصطلحات الشائعة أنه مع استجابة النظام للإثارات، فإن حالة النظام تتبع مساراً معيناً خلال هذا الفراغ.

متغيرات الحالة لأي نظام ليست فريدة. قد يختار شخص ما مجموعة من هذه المتغيرات، ويختار شخص آخر مجموعة أخرى، وكل من المجموعتين تكونان صحيحتين وكاملتين. على الرغم من ذلك، ففي العديد من الحالات قد تكون هناك مجموعة واحدة من متغيرات الحالة تكون أكثر ملاءمة عن المجاميع الأخرى في بعض أغراض التحليل. يتميز التحليل بفراغ الحالة بالمميزات المطلوبة التالية:

١- أنه يقلل احتمالات أخطاء التحليل عن طريق جعل العملية أكثر نظامية.

٢- يصف كل إشارات النظام المهمة الداخلية والخارجية.

٣- يعير الاهتمام إلى ديناميكية النظام وهذا من الممكن أن يساعد في أمثلة التصميم.

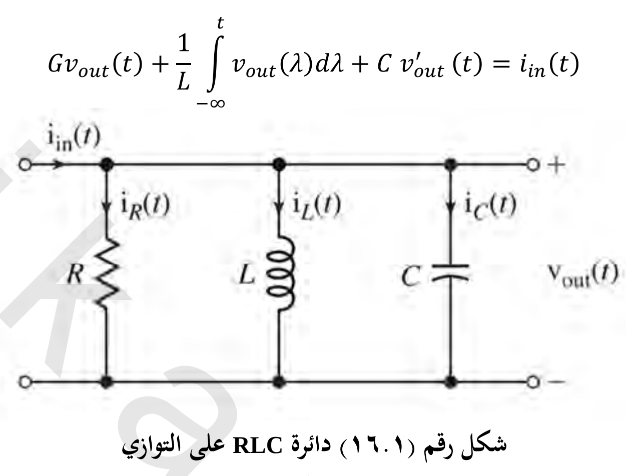
٤- يمكن تشكيله في صورة طرق مصفوفية، وعند عمل ذلك، فإن حالة النظام واستجاباته يمكن وصفها بمعادلتين مصفوفيتين.

٥- عند دمج طرق تحليل متغيرات الحالة مع الطرق التحويلية فإنهما يكونان أكثر قوة في تحليل الأنظمة الكبيرة.

معادلات النظام والخرج

لكي نتعرف على طرق تحليل فراغ الحالة، سنبدأ بتطبيقها على نظام بسيط وهو دائرة توازي RLC كالموضحة في شكل (١٦.١). سنفترض أن الإثارة هي التيار عند منفذ الدخل $i_{in}(t)$ وسنفترض أن الاستجابات ستكون عند المخرج $v_{out}(t)$، وأن التيار خلال المقاومة سيكون $i_R(t)$. بتجميع التيارات عند العقدة العليا ومساواته بالصفر نحصل على:

$$Gv_{out}(t) + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_{out}(\lambda)d\lambda + C\, v'_{out}(t) = i_{in}(t)$$



شكل رقم (١٦.١) دائرة RLC على التوازي

حيث G=1/R، وهذه معادلة تفاضلية تكاملية. يمكننا أن نفاضل الطرفين بالنسبة للزمن لنكون معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية. لذلك فإن هذا النظام يكون من الدرجة الثانية.

بدلاً من أن نبدأ بالحل الفوري لهذه المعادلة في صورتها الحالية، فإننا سنعيد صياغة المعلومات التي تحتويها. سنحدد جهد المكثف على أنه $v_C(t)$ وأن تيار الملف هو $i_L(t)$ على أنها المتغيرات الفراغية. الوصف القياسي لمتغيرات الحالة لأي نظام يكون من مجموعتين من المعادلات وهما معادلات النظام ومعادلات الخرج. معادلات النظام تكون مكتوبة في صورة قياسية. كل معادلة يكون بها تفاضل لأحد متغيرات الحالة على الجانب الأيسر وتجميع خطي لمتغيرات الحالة والإثارات على الجانب الأيسر. باستخدام قانون أوم وقوانين كيرتشوف مع تحديد معادلات للملفات والمكثفات، يمكننا أن نكتب معادلات النظام كما يلي:

$$i'_L = (1/L)\mathrm{v}_c(t)$$

وأيضاً:

$$v'_c(t) = (1/C)i_L(t) - (G/C)v_c(t) + (1/C)i_{in}(t)$$

معادلات الخرج تعبر عن الاستجابات كتجميع خطي لمتغيرات الحالة، والتي ستكون على الصورة التالية في هذه الحالة:

$$\mathrm{v}_{out}(t) = \mathrm{v}_c(t)$$

وأيضاً:

$$\mathrm{i}_R(t) = G\,\mathrm{v_c}(t)$$

يمكن إعادة صياغة معادلات النظام في الصورة المصفوفية التالية :

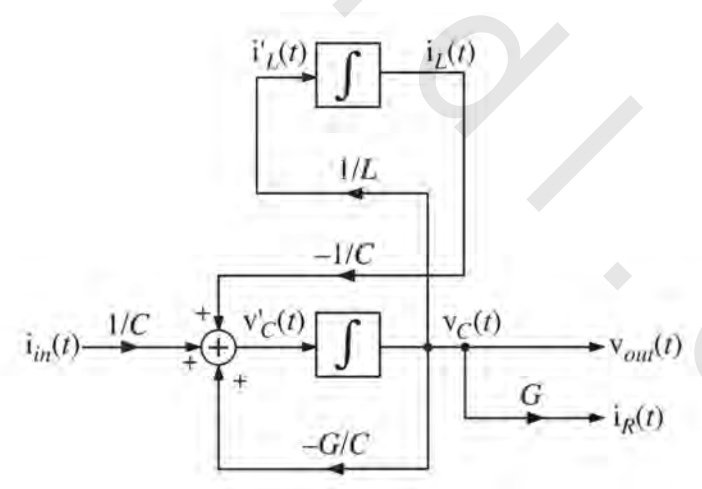
$$\begin{bmatrix} i'_L(t) \\ v'_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -G/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i}_L(t) \\ \mathrm{v}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix} = [\mathrm{i_{in}}(t)]$$ المعادلة رقم (١٦.١)

ويمكن كتابة معادلات الخرج أيضاً في الصورة المصفوفية التالية :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{v}_{out}(t) \\ \mathrm{i}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i}_L(t) \\ \mathrm{v}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [\mathrm{i_{in}}(t)]$$ المعادلة رقم (١٦.٢)

متغيرات الحالة تبدو بدرجة كبيرة مثل استجابات النظام. التمييز بين متغيرات الحالة والاستجابات يأتي فقط من طريقة استخدامها. متغيرات الحالة هي مجموعة إشارات النظام التي تصف بالكامل حالة النظام. استجابات النظام هي الإشارات التي يتم تحديدها اختيارياً كاستجابات لأي غرض من أغراض النظام قد نحتاجه عند أي تحليل للنظام. متغير الحالة من الممكن أن يكون أيضاً استجابة. ولكن حتى لو كان أي متغير حالة هو نفسه استجابة في تحليل معين للنظام ، فإنه في صورة المعادلات الفراغية سنعطي كل منهما اسما مختلفا عن الآخر وذلك نكون أكثر تنظيماً. قد يبدو ذلك إهداراً للزمن ، ولكن في تحليل الأنظمة الكبيرة فإنها تكون فعلاً فكرة جيدة ومن الممكن أن تمنع الكثير من الأخطاء.

إعادة الصياغة في صورة متغيرات الحالة لأي نظام تجعل عملية رسم المخطط الصندوقي لهذا النظام عملية سهلة ونظامية. مثلاً ، يمكن رسم المخطط الصندوقي للنظام السابق بطريقة مباشرة من خلال معادلات النظام كما في شكل (١٦.٢).



شكل رقم (١٦.٢) مخطط صندوقي لمتغيرات الحالة للدائرة RLC المتوازية

سنرمز لمتجه متغيرات الحالة على أنه q(t) ، ومتجه الإثارة على أنه x(t) ومتجه الاستجابات على أنه y(t). المصفوفة التي تحتوي q(t) في معادلة النظام (١٦.١) تسمى عرفيا بالاسم A والمصفوفة التي تحتوي x(t) في معادلة النظام تسمى عرفياً بالاسم B. المصفوفة التي تضرب q(t) في معادلة الخرج (١٦.٢) تسمى عرفياً بالاسم C

والمصفوفة التي تضرب x(t) في معادلة الخرج تسمى عرفياً بالاسم D. باستخدام هذا المصطلح يمكننا أن نكتب معادلة النظام كما يلي :

$$q'(t) = Aq(t) + Bx(t)$$

حيث في هذه الحالة يكون :

$$q(t)\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -G/C \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix}, x(t) = [i_{in}(t)]$$

يمكننا كتابة معادلة الاستجابة كما يلي :

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

حيث في هذه الحالة :

$$y(t) = \begin{bmatrix} v_{out}(t) \\ i_R(t) \end{bmatrix}$$

تمثل متجه الاستجابات. وأيضاً :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(معادلة الاستجابة تسمى عرفياً معادلة الخرج). مهما كانت درجة تعقيد النظام، مع التحديد المناسب لمتجهات متغيرات الحالة ومصفوفاتها، فإن معادلات النظام والخرج للأنظمة LTI من الممكن عادة كتابتها مثل معادلتي المصفوفات السابقة. في هذا المثال البسيط نسبياً، فإن قوة هذه الطريقة قد لا تبدو ظاهرة، لأن حل نظام بمثل هذه البساطة لا يكون صعباً باستخدام الطرق الكلاسيكية. ولكن عندما يصبح النظام كبيراً، فإن هذه الطريقة الجديدة النظامية تكون أكثر تفضيلاً عن الطرق الأقل نظامية.

لقد قمنا حتى الآن بوصف النظام ولكننا لم نحل المعادلات. واحدة من الاعتبارات القوية في طريقة صياغة فراغ الحالة لتحليل الأنظمة تمثل الطريقة المباشرة والنظامية التي يمكن بها حل هذه المعادلات. معادلات الحالة هي :

$$q'(t) = Aq(t) + Bx(t)$$
$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

من الواضح أنه إذا كنا نستطيع إيجاد متجه الحل q(t) فإنه يمكننا فوراً حساب متجه الاستجابة y(t) حيث إن متجه الإثارة x(t) يكون معروفا. لذلك فإن عملية الحل ستكون أن نوجد أولاً حلاً لمعادلة النظام.

من الممكن أن نوجد حلاً مباشراً في النطاق الزمني من هذه المعادلات المصفوفية، ولكن من الأسهل أن نستخدم تحويل لابلاس أحادي الجانب للمساعدة في إيجاد هذا الحل. بإجراء تحويل لابلاس على معادلة النظام نحصل على ما يلي :

$$sQ(s) - q(0^-) = AQ(s) + BX(s)$$

أو :

$$[sI - A]Q(s) = BX(s) + q(0^-)$$

حيث $q(0^-)$ هي متجه القيم الابتدائية لمتغيرات الحالة. يمكن حل هذه المعادلة لـ Q(s) بضرب الطرفين في $[sI-A]^{-1}$ كما يلي:

$$Q(s) = [sI - A]^{-1}[BX(s) + q(0^-)]$$ المعادلة رقم (١٦.٣)

المصفوفة $[sI-A]^{-1}$ يتم الرمز لها في العادة بالرمز Φ(s). باستخدام ذلك تصبح المعادلة (١٦.٣) كما يلي:

$$Q(s) = \Phi(s)[BX(s) + q(0^-)] = \underbrace{\Phi(s)BX(s)}_{\text{استجابة الحالة صفر}} + \underbrace{\Phi(s)q(0^-)}_{\text{استجابة الدخل صفر}}$$ المعادلة رقم (١٦.٤)

ومن الواضح أن متجه الحالة يتكون من جزأين وهما استجابة الحالة صفر واستجابة الدخل صفر. يمكننا الآن أن نوجد الحل في النطاق الزمني عن طريق إجراء تحويل لابلاس العكسي للمعادلة (١٦.٤):

$$q(t) = \underbrace{\Phi(t) * Bx(t)}_{\text{إستجابة الحالة صفر}} + \underbrace{\Phi(t)q(0^-)}_{\text{إستجابة الدخل صفر}}$$

حيث:

$$\Phi(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \Phi(s)$$

و (t) تسمى مصفوفة نقل الحالة. الاسم "مصفوفة نقل الحالة" يأتي من حقيقة أنه بمجرد معرفة الحالة الابتدائية والإثارات، فإن (t) هي التي تسمح لنا بحساب ال

حالة عند أي زمن مستقبلي، أي أن (t) هي التي تسمح لنا بحساب الطريقة التي سينتقل بها النظام من حالة معينة إلى حالة أخرى.

سنطبق الآن هذه الطريقة على المثال السابق. المصفوفات في معادلة الحالة هي:

$$q(t)\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -G/C \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix}, x(t) = [i_{in}(t)]$$

لكي نجعل المشكلة أكثر تحديداً سنفترض أن تيار الإثارة هو وحدة الخطوة كما يلي:

$$i(t)=Au(t)$$

وسنفترض أن الحالة أو الشروط الابتدائية هي:

$$q(0^-) = \begin{bmatrix} i_L(0^-) \\ v_c(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وسنفترض أن قيم المكونات هي R=1/3، و C=1، و L=1. باستخدام حقيقة أن مقلوب المصفوفة هو تبديل مصفوفة المعاملات الفرعية مقسومة على محددتها:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1/L \\ 1/C & s + G/C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+G/C & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix}^T}{s^2+(G/C)s+1/LC}$$

$$\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix} s+G/C & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix}}{s^2+(G/C)s+1/LC}$$

والحل لمتغيرات الحالة في النطاق اللابلاسي سيكون:

$$Q(s) = \Phi(s)[BX(s) + q(0^-)]$$

$$Q(s) = \frac{\begin{bmatrix} s+G/C & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix}}{s^2+(G/C)s+1/LC}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix}[1/s] + \frac{\begin{bmatrix} s+G/C & 1/C \\ -1/L & s \end{bmatrix}}{s^2+(G/C)s+1/LC}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أو :

$$Q(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1/sLC \\ 1/C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2+(G/C)s+1/LC}$$

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{sLC(s^2+(G/C)s+1/LC)} + \frac{1}{L(s^2+(G/C)s+1/LC)} \\ \frac{1}{C(s^2+(G/C)s+1/LC)} + \frac{1}{s^2+(G/C)s+1/LC} \end{bmatrix}$$

بالتعويض بقيم المكونات العددية نحصل على :

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s^2+3s+1)} + \frac{1}{s^2+3s+1} \\ \frac{1}{s^2+3s+1} + \frac{s}{s^2+3s+1} \end{bmatrix}$$

أو في صورة الكسور الجزيئية :

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} + \frac{0.17}{s+2.62} - \frac{1.17}{s+0.382} - \frac{0.447}{s+2.62} + \frac{0.447}{s+0.382} \\ -\frac{0.447}{s+2.62} + \frac{0.447}{s+0.382} + \frac{1.17}{s+2.62} - \frac{0.17}{s+0.382} \end{bmatrix}$$

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{0.277}{s+2.62} - \frac{0.723}{s+0.382} \\ \frac{0.723}{s+2.62} + \frac{0.277}{s+0.382} \end{bmatrix}$$

بإجراء تحويل لابلاس العكسي :

$$q(t) = \begin{bmatrix} 1 - 0.277e^{-2.62t} - 0.723e^{-0.382t} \\ 0.723e^{-0.382t} + 0.277e^{-2.62t} \end{bmatrix} u(t)$$

الآن يمكننا إيجاد الاستجابات فوراً باستخدام معادلة الخرج y(t)=Cq(t)+Dx(t).

$$y(t) = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & G \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 0.277e^{-2.62t} - 0.723e^{-0.382t} \\ 0.723e^{-0.382t} + 0.277e^{-2.62t} \end{bmatrix} u(t)$$

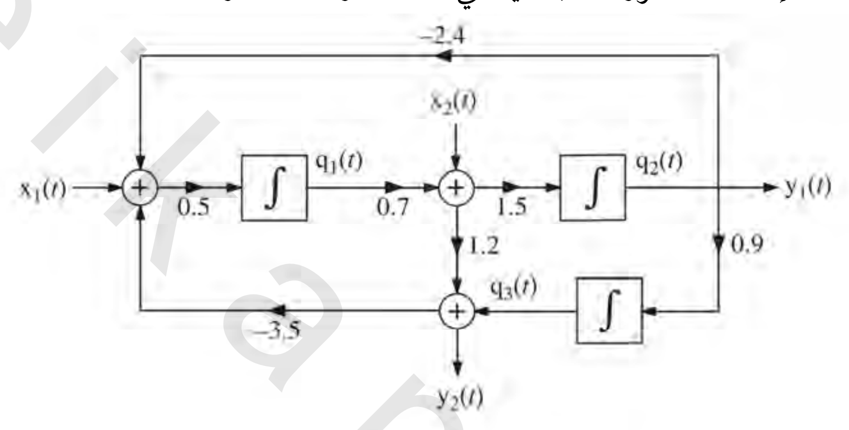
أو :

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0.723e^{-0.382t} + 0.277e^{-2.62t} \\ 2.169e^{-0.382t} + 0.831e^{-2.62t} \end{bmatrix} u(t)$$

مثال ١٦.١

تحليل فضاء الحالة لنظام له دخلان وخرجان

اكتب معادلات الحالة للنظام الموضح في شكل (١٦.٣). بعد ذلك أوجد استجابات النظام للدخول $x_1(t)=u(t)$ و $x_2(t)=\delta(t)$ إذا كانت الشروط الابتدائية هي $q_1(0^-)=2$ و $q_2(0^-)=0$ و $q_3(0^-)=-1$؟



شكل رقم (١٦.٣) نظام له دخلان وخرجان

يمكننا كتابة معادلات الحالة مباشرة من المخطط كما يلي :

$$q'_1(t) = 0.5\{x_1 - 2.4q_2(t) - 3.5(q_3(t) + 1.2[0.7q_1(t) + x_2(t)])\}$$
$$q'_2(t) = 1.5[0.7q_1(t) + x_2(t)]$$
$$q'_3(t) = 0.9q_2(t)$$
$$y_1(t) = q_2(t)$$
$$y_1(t) = q_3(t) + 1.2[0.7q_1(t) + x_2(t)]$$

بوضع هذه المعادلات في صورة مصفوفة متغيرات الحالة القياسية :

$$q'(t) = Aq(t) + Bx(t)$$
$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

حيث :

$$A = \begin{bmatrix} -1.47 & -1.2 & -1.75 \\ 1.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0.5 & -2.1 \\ 0 & 1.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.84 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s+1.47 & 1.2 & 1.75 \\ -1.05 & s & 0 \\ 0 & -0.9 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Delta= s^2(s+1.47)-1.2(-1.05s)+1.75(0.945)=s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375$$

$$\Phi(s)=\frac{\begin{bmatrix} s^2 & 1.05s & 0.945 \\ -1.2s-1.575 & s(s+1.47) & 0.9s+1.323 \\ -1.75s & -1.8375 & s^2+1.47s+1.26 \end{bmatrix}^T}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}$$

$$\Phi(s)=\frac{\begin{bmatrix} s^2 & -1.2s-1.575 & -1.75s \\ 1.05s & s(s+1.47) & -1.8375 \\ 0.945 & 0.9s+1.323 & s^2+1.47s+1.26 \end{bmatrix}}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}$$

$$X(s)=\begin{bmatrix} 1/s \\ 1 \end{bmatrix}, q(0^-)=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Q(s)=\Phi(s)[BX(s)+q(0^-)]$$

$$Q(s)=\frac{\begin{bmatrix} s^2 & -1.2s-1.575 & -1.75s \\ 1.05s & s(s+1.47) & -1.8375 \\ 0.945 & 0.9s+1.323 & s^2+1.47s+1.26 \end{bmatrix}}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}\left(\begin{bmatrix} 0.5 & -2.1 \\ 0 & 1.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/s \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$Q(s)=\frac{\begin{bmatrix} s^2 & -1.2s-1.575 & -1.75s \\ 1.05s & s(s+1.47) & -1.8375 \\ 0.945 & 0.9s+1.323 & s^2+1.47s+1.26 \end{bmatrix}}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}\begin{bmatrix} 0.5/s-0.1 \\ 1.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Q(s)=\frac{\begin{bmatrix} 0.5s-0.1s^2-1.8s-2.3625+1.75 \\ 0.525-0.105s+1.5s^2+2.205s+1.8375 \\ 0.4725/s-0.0945+1.35s+1.9845-s^2-1.47s-1.26 \end{bmatrix}}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix} 0.1s^2-0.45s-2.3625 \\ 1.5s^2+2.1s-2.3625 \\ -s^2-0.12s+0.63+0.4725/s \end{bmatrix}}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}$$

$$Q_2(s)=\frac{0.1s^2+2.1\mathrm{s}-2.3625}{s^3+1.47s^2+1.26\mathrm{s}+1.65375}=-\frac{0.7628}{\mathrm{s}+1.409}+\frac{2.236\mathrm{s}-1.041}{s^2+0.6116+1.174}$$

$$Q_1(s)=\frac{-0.1s^2+0.45s-2.3625}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}=\frac{-1.04}{s+1.409}+\frac{0.9399s-0.8105}{s^2+0.6116+1.174}$$

$$q_1(t) = [1 - 1.04e^{-1.4088t} + 1.2181e^{-0.030579t}\,cos(1.083t + 0.425)]u(t)$$
$$q_2(t) = [-0.76283e^{-1.4088t} + 2.4843e^{-0.030579t}\cos(1.083t + 0.42547)]u(t)$$

$$Q_3(s) = \frac{-s^3 - 0.12s^2 + 0.63s + 0.4725}{s(s^3 + 1.47s^2 + 1.26s + 1.65375)} = \frac{0.4951}{s + 1.409} + \frac{0.2857}{s} - \frac{0.9399s - 0.8105}{s^2 + 0.6116 + 1.174}$$

$$q_3(t) = [-0.49509e^{-1.4088t} + 2.28571e^{-0.030579t} + 0.98066e^{-0.030579t}\,cos(1.083t + 2.5085)]u(t)$$

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

$$y_1(t) = q_2(t) = [-0.76283e^{-1.4088t} + 2.4843e^{-0.030579t}\,cos(1.083t + 0.42547)]u(t)$$

$$Y_1(s) = Q_3(s) + 1.2[0.7Q_1(s) + X_3(s)]$$
$$Y_2(s) = -\frac{0.4951}{s + 1.409} + \frac{0.2857}{s} - \frac{0.7906s - 0.6041}{s^2 + 0.6116 + 1.174} + 1.2\left\{0.7\left[\frac{-1.04}{s + 1.409} + \frac{0.9399s - 0.8105}{s^2 + 0.6116 + 1.174}\right] + 1\right\}$$

$$Y_2(s) = -\frac{1.3687}{s + 1.409} + \frac{0.2857}{s} - \frac{0.0011s - 0.0767}{s^2 + 0.6116 + 1.174} + 1.2$$

$$y_2(t) = [-1.3687e^{-1.4088t} + 0.2857 + 0.0708e^{-0.030579t}\,cos(1.083t + 1.5863)]u(t)$$

أحد الطرق للاختبار السريع لأخطاء التحليل تكون عن طريق مقارنة القيم المحسوبة للحالات عند $t=0^+$ مع ما يجب أن نتوقعه بالنظر المباشر للنظام. الشروط الابتدائية هي $q_1(0^-)=2$ و $q_2(0^-)=0$ و $q_3(0^-)=-1$. عندما $t=0$ فإن الخطوة تبدأ وتحدث الصدمة. إثارة الخطوة لمكامل تعطي استجابة خطية، لذلك فإن الاستجابة نتيجة إثارة الخطوة عند $t=0^+$ تساوي صفراً. لذلك، فإن كل الحالات تكون إشارة خرج لمكامل، حيث إن الخطوة لن تغير قيم أي حالة في هذا النظام عند $t=0^+$. إثارة الصدمة لمكامل تعطي استجابة خطوة وحجم الخطوة هو شدة الصدمة. في هذا النظام تنتشر الصدمة $x_2(t)=\delta(t)$ خلال نقطة التجميع الوسطى، وتضرب في 1.2، ثم تنتشر خلال نقطة التجميع السفلي، وتضرب في 3.5-، ثم تنتشر خلال نقطة التجميع اليسرى، وتضرب في 0.5، ثم يتم تكاملها عن طريق المكامل الأيسر لتوليد استجابة الخطوة التي يتم ضربها في 0.7، وبعد ذلك تنتشر خلال نقطة التجميع الوسطى ويتم ضربها في 1.2 وتنتشر خلال نقطة التجميع السفلى. في الوقت نفسه فإن الصدمة تثير المكامل الذي في أعلى اليمين وتنتج استجابة خطوة، وكل ذلك يحدث وقتيا. لذلك فإن q_1 يجب أن تتغير من قيمتها الابتدائية التي تساوي 2 بمقدار $1.2x(-3.5)x0.5=-2.1$ لجعل $q1(0^+)=-0.1$. من النتائج التحليلية السابقة:

$$q_1(0+) = -1.04 + 1.2181\cos(0.68951) = -0.1$$

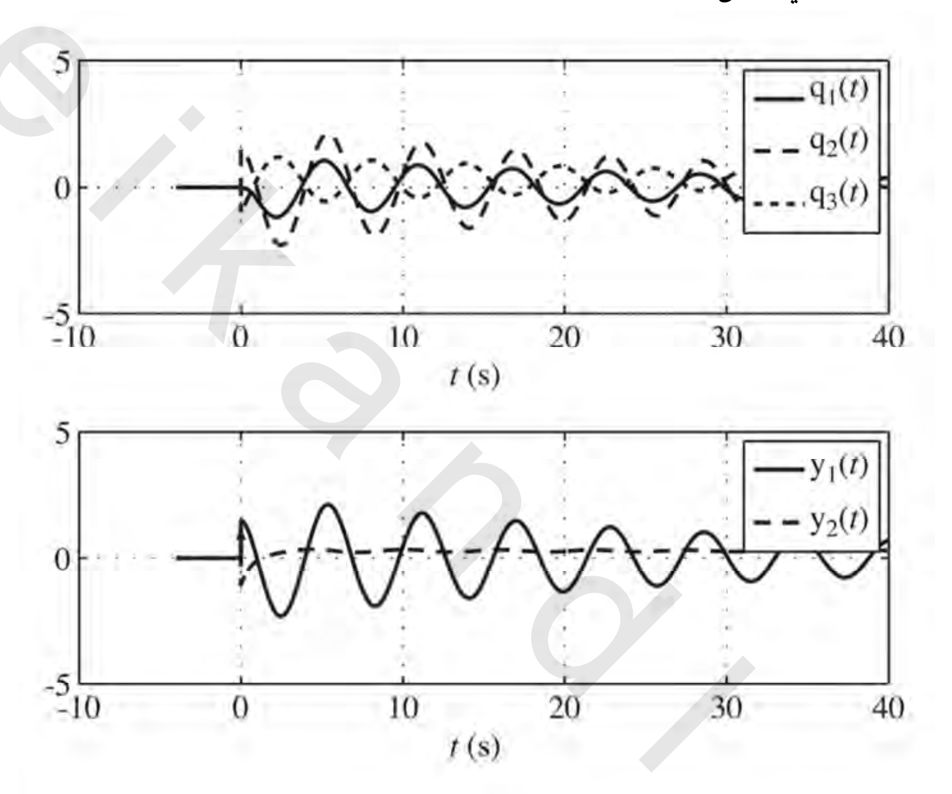
قيمة q_2 يجب أن تكون قيمتها الابتدائية التي تساوي الصفر بالإضافة إلى التغير نتيجة الصدمة الذي يساوي 1.5. من النتائج التحليلية نحصل على:

$$q_2(0+) = -0.76283 + 2.4843\cos(0.42547) = 1.5$$

قيمة q_3 يجب أن تكون القيمة الابتدائية التي تساوي 1- بدون تغيير؛ لأنه حيث إنها تكون خرجاً مكاملاً والصدمة لا بد أن تنتشر خلال مكاملين لتصل إليها، والصدمة لا يمكن أن تغيرها وقتيا. لذلك فإنها لا بد أن تبقى عند القيمة 1-. من النتائج التحليلية السابقة نحصل على:

$$q_3(0+) = -0.49509 + 0.28571 + 0.98066\cos(-2.5085) = -1$$

هذا التحليل لا يثبت أن النتائج التحليلية تكون صحيحة عند أزمنة أخرى ولكنها تكون اختباراً جيداً للكشف عن الأخطاء كما في شكل (١٦.٤).

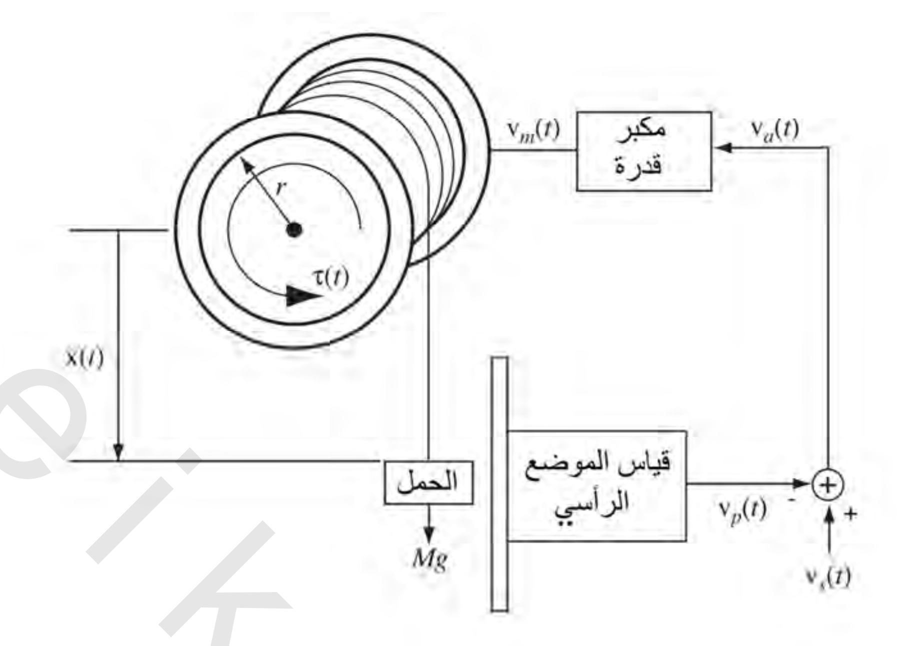


شكل رقم (١٦.٤) الحالات والاستجابات للنظام ذي الدخلين والخرجين.

مثال ١٦.٢

تحليل فراغ الحالة لنظام ميكانيكي

من الأنواع الشهيرة للأنظمة الميكانيكية الأسطوانة الدوارة مع حبل أو كابل ملفوف حولها ونهاية الحبل أو الكابل تكون موصلة على حمل مطلوب تحريكه لأعلى أو لأسفل إلى موضع رأسي مطلوب عن طريق دوران الاسطوانة كما في شكل (١٦.٥).



شكل رقم (١٦.٥) نظام إلكتروميكانيكي مع التغذية العكسية

موضع الحمل يتم التحكم فيه عن طريق نظام تغذية مرتدة يتكون من مكبر قدرة لتغذية الموتور الذي يدور الاسطوانة الدوارة، جهاز لقياس الموضع الرأسي للحمل، ونقطة تجميع لإيجاد الفرق بين إشارة الجهد من مقياس الموضع الرأسي للحمل $v_p(t)$V والجهد الممثل للوضع المطلوب $v_s(t)$V. هذا الفرق في الجهد $v_a(t)$V يتم تطبيقه على مكبر القدرة الذي يقوم بإدارة الاسطوانة في الاتجاه المطلوب لتقليل جهد الخطأ. مكبر القدرة يعطي الجهد $v_m(t)=k_m v_a(t)$ V إلى الموتور.

يعطي الموتور عزماً مقداره $\tau(t)=k_m v_m(t)$ N.m. الموضع $v_m(t)$ يعطي عزماً في عكس اتجاه عقارب الساعة على الأسطوانة. يتعلق العزم بالعجلة الزاوية وسرعة الأسطوانة وكتلة الحمل بالعلاقة التالية:

$$\tau(t) - Mgr - k_f\omega' d(t) = I_d \omega_d''(t)$$

حيث M هي كتلة الحمل بالكيلوجرام kg، و g هي ثابت الجاذبية الأرضية ($9.80665\ m,s^{-2}$)، و r هي نصف قطر الأسطوانة الدوارة بالمتر m، و k_f هي ثابت تناسبي (N.m.s) الذي يأخذ في الحسبان الفقد النسبي في الطاقة، w_d هي الموضع الزاوي للأسطوانة بالراديان (يزداد في عكس اتجاه عقارب الساعة)، و I_d هي عزم القصور الذاتي ($N.m.s^2$) للموتور والاسطوانة معاً.

نظام قياس الموضع الرأسي يعطي الجهد $v_p(t)=k_p x(t)$ V المتناسب مع موضع الحمل (أكثر إيجابية لأسفل تبعاً للمخطط) حيث k_p هي ثابت تناسبي بالوحدات $V.m^{-1}$. العلاقة (عندما $t>0$) بين الموضع الزاوي للأسطوانة والموضع الرأسي للحمل هي كما يلي:

$$x(t) = -r\omega_d(t)$$

الإشارة السالبة في الجانب الأيسر تأخذ في الحسبان العلاقة بين زاوية الاسطوانة وموضع الحمل.

سنفترض أن حالات النظام هي الموضع الزاوي $w_d(t)$، والسرعة الزاوية للأسطوانة $v_d(t)=w'_d(t)$. سنفترض أن الدخل للنظام هو جهد الموضع $v_s(t)$ وكتلة الحمل $Mu(t)$. سنفترض أن خرج النظام سيكون موضع الحمل $x(t)$. المعادلات التي ستربط إشارات النظام المختلفة ستكون:

$$v_d(t) = v_s(t) - v_p(t) \quad v_m(t) = -k_a v_a(t) \quad \tau(t) = k_m v_m(t)$$

$$\tau(t) - Mgr - k_f\omega'd(t) = I_d\omega_d''(t)$$

$$x(t) = -r\omega_d(t) \quad v_p(t) = k_p x(t)$$

بالربط بين بعض هذه المعادلات نحصل على:

$$\tau(t) = -k_m k_a[v_s(t) + rk_p\omega_d(t)]$$

بربط هذه النتيجة مع المعادلة التفاضلية يمكننا كتابة معادلات النظام كما يلي:

$$\begin{bmatrix}\omega'd(t)\\ v'_d(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -rk_m k_a k_p/I_d & k_f/I_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega d(t)\\ v_d(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ -k_m k_a/I_d & -gr/I_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_s(t)\\ m\,u(t)\end{bmatrix}$$

أو:

$$q'(t) = Aq(t) + Bx(t)$$

حيث:

$$q(t) = \begin{bmatrix}\omega d(t)\\ v_d(t)\end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -rk_m k_a k_p/I_d & -k_f/I_d\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}0 & 0\\ -k_m k_a/I_d & -gr/I_d\end{bmatrix} \quad x(t)\begin{bmatrix}v_s(t)\\ m\,u(t)\end{bmatrix}$$

يمكننا أيضاً كتابة معادلة الخرج كما يلي:

$$x(t) = [-r \quad 0]\begin{bmatrix}\omega_d(t)\\ v_d(t)\end{bmatrix} + [0 \quad 0]\begin{bmatrix}v_s(t)\\ m\,u(t)\end{bmatrix}$$

أو:

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

حيث $y(t)=x(t)$، و $C=[-r \;\; 0]$، و $D=[0 \;\; 0]$.

بإجراء تحويل لابلاس لمعادلة مصفوفة النظام نحصل على:

$$sQ(s) - q(0^-) = AQ(s) + BX(s)$$

حيث:

$$q(0^-) = \begin{bmatrix} \omega_d(0^+) \\ v_d(0^+) \end{bmatrix}$$

بفرض عدم وجود تغير مفاجئ في الشروط الابتدائية عند t=0.

حل هذه المعادلة سيكون:

$$Q(s) = [sI - A]^{-1}[BX(s) + q(0^-)]$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+k_f/I_d & 1 \\ -rk_mk_ak_p/I_d & s \end{bmatrix}}{s^2+(k_f/I_d)s+-rk_mk_ak_p/I_d}$$

$$Q(s) = \frac{\begin{bmatrix} (s+k_f/I_d)\omega_d(0^+)-(rk_mk_a/I_d)V_s(s)-Mgr/sI_d+v_d(0^+) \\ (rk_mk_ak_p/I_d)\omega_d(0^+)-s(k_mk_a/I_d)V_s(s)-Mgr/I_d+sv_d(0^+) \end{bmatrix}}{s^2+(k_f/I_d)s+rk_mk_ak_p/I_d}$$

إذا كانت نقطة الوضع ثابتاً بعد الزمن t=0، بالتالي فإن:

$$v_s(t) = v_s u(t) \overset{£}{\leftrightarrow} v_s/s$$

وبالتالي:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega_d(0^+)s^2+[k_f\omega_d(0^+)/I_d+v_d(0^+)]s-[(k_mk_a/I_d)V_s+Mgr/sI_d]}{s[s^2+(k_f/I_d)s+rk_mk_ak_p/I_d]} \\ \dfrac{v_d(0^+)s-[(rk_mk_ak_p/I_d)\omega_d(0^+)+(k_mk_a/I_d)V_s-Mgr/I_d]}{s^2+(k_f/I_d)s+rk_mk_ak_p/I_d} \end{bmatrix}$$

افترض أن معاملات النظام ستكون:

$$M = 50\text{ kg},\ r = 0.4\text{m},\ k_m = 100\text{N.m/V},\ k_a = 10\text{ V/V}$$

$$k_p = 1\text{ V/m},\ I_d = 20\text{ N.m. s}^2,\ k_f = 250\text{N.m.s}$$

افترض أن الشروط الابتدائية هي $\omega_d(0^+)=-8$، و $v_d(0^+)=-2$ راديان/الثانية، وافترض أن نقطة الموضع ستكون V_s=6V، وبالتالي:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{-8s^2-102s-310}{s[s^2+12.5s+20]} \\ \dfrac{-2s-150}{s^2+12.5s+20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1.389}{s+10.62}+\dfrac{8.888}{s+1.884}-\dfrac{15.5}{s} \\ \dfrac{14.74}{s+10.1062}-\dfrac{16.74}{s+1.884} \end{bmatrix}$$

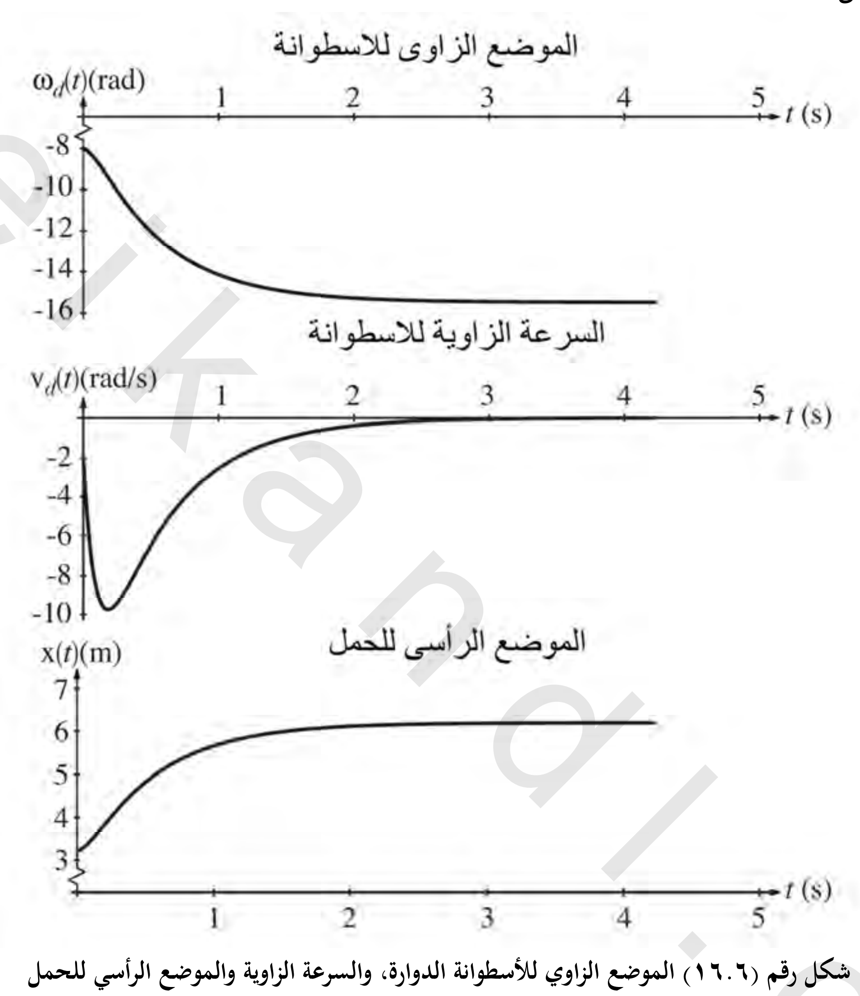
وبإجراء تحويل لابلاس العكسي:

$$q(t) = \begin{bmatrix} \omega_d(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.389e^{-10.62t}+8.888e^{-1.884t}-15.5 \\ 14.74e^{-10.62t}-16.74e^{-1.884t} \end{bmatrix}u(t)$$

الخرج x(t) سيكون :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_d(t) \\ v_d(t) \end{bmatrix} = (0.556e^{-10.62t} - 3.556e^{-1.884t} + 6.2)u(t)$$

انظر شكل (١٦.٦).



شكل رقم (١٦.٦) الموضع الزاوي للأسطوانة الدوارة، والسرعة الزاوية والموضع الرأسي للحمل

القيمة النهائية لموضع الحمل ستكون 6.2m وليست الـ 6m الموضوعة عن طريق جهد نقطة الوضع. تكبير دالة عبور الحلقة من الممكن أن يقلل هذا الخطأ. أيضاً بتضمين مكامل في الحلقة سيقلل الخطأ إلى الصفر إذا كان النظام سيظل مستقراً.

دوال العبور

يمكننا استخدام طريقة تحليل فراغ الحالة لإيجاد مصفوفة دالة عبور النظام. تذكر أن دالة العبور تحدد فقط لاستجابة الحالة صفر. سنبدأ بالمعادلة :

$$sQ(s) - q(0^-) = AQ(s) + BX(s)$$

مع طلب أن تكون الحالة الابتدائية $q(0^-)$ تساوي صفراً يمكننا الحل لإيجاد Q(s) كما يلي :

$$Q(s) = [sI - A]^{-1}BX(s) = \Phi(s)BX(s)$$

بالتالي ستكون الاستجابة Y(s) تساوي :

$$Y(s) = CQ(s) + DX(s) = C\Phi(s)BX(s) + DX(s) = [C\Phi(s)B + D]D(s)$$

لذلك، حيث إن استجابة النظام تساوي حاصل ضرب دالة عبور النظام في الإثارة لهذا النظام، فإن مصفوفة دالة العبور ستكون :

$$H(s) = C\Phi(s)B + D$$

هذه الدالة تضع العلاقة بين الإثارات وكل استجابات النظام من خلال :

$$Y(s) = H(s) + X(s)$$

وحيث إن :

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1}$$

فإن :

$$H(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

بفحص $[sI-A]^{-1}$ سنجد أنها معكوس [sI-A]، ولذلك فإنها تساوي دوران المصفوفة الجانبية للمعاملات للمصفوفة [sI-A]، مقسومة على محددة المصفوفة وهي |sI-A|. لذلك فإن كل عنصر في $[sI-A]^{-1}$ له المقام |sI-A|. بالضرب الأولى في C ثم الضرب المؤخر في B لا يغير من هذه الحقيقة حيث إن كلاً من C و B هي مصفوفات ثوابت. إضافة المصفوفة D لا يغير من مقامات عناصر الـ H(s) لأنها مصفوفة ثوابت أيضاً. لذلك فإن مقام كل عنصر في ال H(s) ستكون |sI-A| (إلا إذا تم إلغاء أقطاب وأصفار). كل عناصر الـ H(s)، وبالتالي كل دوال العبور من كل الإثارات إلى كل الاستجابات ستكون لها الأقطاب نفسه ، وهذا يؤدي إلى فكرة مهمة جداً. على الرغم من تحديد دالة العبور بأنها النسبة بين استجابة الحالة صفر والإثارة، فإن أقطاب أي دالة عبور للنظام يتم تحديدها عن طريق النظام نفسه، وليس عن طريق الإثارات أو الاستجابات. هذه الأقطاب هي أصفار ال |sI-A|، وأصفار ال |sI-A| هي القيم المميزة لـ A.

مثال ١٦.٣

إيجاد دالة العبور للنظام

أوجد مصفوفة دالة العبور للنظام الموجود في مثال ١٦.١.

مصفوفة دالة العبور هي :

$$H(s) = C\Phi(s)B + D$$

من مثال ١٦.١

$$B=\begin{bmatrix}0.5 & -2.1\\ 0 & 1.5\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0.84 & 0 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix}$$

$$\Phi(s)=\frac{\begin{bmatrix}s^2 & -1.2s-1.575 & -1.75s\\ 1.05s & s(s+1.47) & -1.8375\\ 0.945 & 0.9s+1.323 & s^2+1.47s+1.26\end{bmatrix}}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}$$

ولذلك فإن:

$$H(s)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0.84 & 0 & 0\end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}s^2 & -1.2s-1.575 & -1.75s\\ 1.05s & s(s+1.47) & -1.8375\\ 0.945 & 0.9s+1.323 & s^2+1.47s+1.26\end{bmatrix}}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}\begin{bmatrix}0.5 & -2.1\\ 0 & 1.5\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix}$$

والتي يمكن تبسيطه على الصورة:

$$H(s)=\frac{\begin{bmatrix}0.525s & 1.5s^2\\ 0.42s^2+0.4725 & 1.2s^3-0.6345s+1.9845\end{bmatrix}}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}$$

يمكننا اختبار معقولية هذه الإجابة عن طريق تطبيق صدمة عند أحد المداخل وملاحظة الاستجابة.

سنفترض $x_1(t)=\delta(t)$ و $x_2(t)=0$، وبالتالي يمكننا كتابة:

$$Y(s)=\frac{\begin{bmatrix}0.525s & 1.5s^2\\ 0.42s^2+0.4725 & 1.2s^3-0.6345s+1.9845\end{bmatrix}}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix}0.525s\\ 0.42s^2+0.4725\end{bmatrix}}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}$$

$$Y_1(s)=\frac{0.525s}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}$$

$$y_1(t)=[0.17087e^{-1.4088t}+0.27656e^{-0.030579t}\cos(1.083t-2.2368)]u(t)$$

من مخطط النظام، $y_1(0^+)=0$ (تذكر أن كل الشروط الابتدائية تكون صفراً). من هذه النتيجة التحليلية:

$$y_1(0^+)=0.17087+0.27656\cos-2.2368=0$$

$$Y_2(s)=\frac{0.42s^2+0.7425}{s^3+1.47s^2+1.26s+1.65375}$$

$$y_2(t)=[0.425e^{-1.4088t}+0.017964e^{-0.030579t}\cos(1.083t-1.8588)]u(t)$$

من مخطط النظام، $y_2(0^+)=0.5x0.7x1.2=0.42$، وبالتالي من النتيجة التحليلية يمكننا كتابة:

$$y_2(0^+) = 0.4251 + 0.017964\cos(1.8588) = 0.42$$

الآن افترض أن $x_2(t)=\delta(t)$، و $x_1(t)=0$، وبالتالي :

$$Y(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1.5s^2 \\ 1.2s^3 - 0.6345s + 1.9845 \end{bmatrix}}{s^3 + 1.47s^2 + 1.26s + 1.65375}$$

$$y_1(t) = [0.969e^{-1.4088t} + 0.92752e^{-0.030579t}\cos(1.083t - 0.96214)]u(t)$$

$$y_2(t) = [1.44\delta(t) - 1.551e^{-1.4088t} + 1.6171e^{-0.030579t}\cos(1.083t - 3.0394)]u(t)$$

يمكننا أن نرى مباشرة من مخطط النظام أن $y_1(0^+)=1.5$، و $y_2(0^+)=1.2x(-3.5)x0.5x0.7x1.2=-1.764$. من النتائج التحليلية يمكننا كتابة :

$$y_1(0^+) = 0.969 + 0.92752\cos(0.96314) = 1.5$$

$$y_2(0^+) = -0.1551 + 1.6171\cos(-3.0394) = -1.764$$

اختيارات بديلة لمتغير الحالة

كان من الممكن حل مثال الدائرة RLC باستخدام مجموعة مختلفة من متغيرات الحالة. فمثلا، تيار المقاومة $i_R(t)$، وتيار الملف $i_L(t)$ كان من الممكن اختيارهما كمتغيرات حالة. وبالتالي فإن معادلة الحالة من الممكن أن تكون :

$$\begin{bmatrix} i'_R(t) \\ i'_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G/C & -G/C \\ 1/LG & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G/C \\ 0 \end{bmatrix} [i_{in}(t)]$$

ومن الممكن أن تكون معادلة الخرج كما يلي :

$$\begin{bmatrix} i_{out}(t) \\ i_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} [i_{in}(t)]$$

بالحل لإيجاد متغيرات الحالة نجد أن :

$$\Phi(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s + G/C & G/C \\ -1/LG & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s & -G/C \\ 1/LG & s+G/C \end{bmatrix}}{s^2 + (G/C)s + 1/LC}$$

من المهم هنا أن نلاحظ أن المحدد |sI-A| هي نفسها كما كانت مع المجموعة الأولى من متغيرات الحالة، ومن الممكن أن نوضح أن ذلك يكون حقيقياً على العموم. بمعنى أن المحدد |sI-A| لا تعتمد على اختيار متغيرات الحالة.

المصفوفة A تتغير ولكن المحدد |sI-A| لا يتغير. لذلك فالمحدد |sI-A| تقول شيئاً أساسياً عن النظام نفسه، وليس عن اختيار معين لطريقة تحليل النظام.

تحويلات متغيرات الحالة

أي مجموعة من متغيرات الحالة يمكن تحويلها إلى مجموعة أخرى من خلال تحويل خطي. افترض أننا نستخدم متجهاً من متغيرات الحالة $q_1(t)$ وقررنا أن نستخدم متجه متغيرات حالة آخر $q_2(t)$ متعلق بالمتجه $q_1(t)$ بالعلاقة:

$$q_2(t)=Tq_1(t)$$ المعادلة رقم (١٦.٥)

حيث T هي مصفوفة التحويل التي تحقق العلاقة بين متجهي متغيرات الحالة. وبالتالي:

$$q_2'(t)=Tq_1'(t)=T\big(A_1q_1(t)+B_1x(t)\big)=TA_1q_1(t)+TB_1x(t)$$

من المعادلة (١٦.٥) يمكننا كتابة: $q_1(t)=T^{-1}q_2(t)$، وبالتالي فإن:

$$q_2'(t)=TA_1T^{-1}q_2(t)+TB_1x(t)=A_2q_2(t)+B_2x(t)$$

حيث $A_2=TA_1T^{-1}$، و $B_2=TB_1$. سنحصل على ما يلي في معادلة الخرج:

$$y(t)=C_1q(t)+D_1x(t)=D_1T^{-1}q_2(t)+D_1x(t)=D_2q_2(t)+D_2x(t)$$

حيث $C_2=C_1T^{-1}$، و $D_2=D_1$. القيم المميزة لـ A_1 يتم تحديدها عن طريق النظام. عند اختيارنا لمجموعة مختلفة من متغيرات الحالة عن طريق تحويل مجموعة إلى أخرى من خلال مصفوفة التحويل T، فإننا لا نغير النظام، إننا فقط نغير الطريقة التي نحلل بها النظام. لذلك فالقيم المميزة لـ A_1و $A_2=TA_1T^{-1}$ يجب أن تكون هي نفسها. يمكن إثبات ذلك كما في النقاش التالي. افترض عملية الضرب التالية:

$$T[sI-A_1]T^{-1}=s\underbrace{TIT^{-1}}_{1}-\underbrace{TA_1T^{-1}}_{A_2}=sI-A_2$$ المعادلة رقم (١٦.٦)

بإيجاد المحددة لكل من الجانبين في المعادلة (١٦.٦):

$$|T[sI-A_1]T^{-1}|=|sI-A_2|$$ المعادلة رقم (١٦.٧)

يمكننا الآن استخدام خاصيتين للمحددات من نظريات الجبر الخطي. المحدد لحاصل ضرب مصفوفتين هو حاصل ضرب محددتي المصفوفتين، و محدد معكوس أي مصفوفة هو مقلوب محدد هذه المصفوفة. بتطبيق النظرية الأولى على المعادلة (١٦.٧) نحصل على:

$$|T||[sI - A_1]||T^{-1}| = |sI - A_2|$$

المحددات تكون عبارة عن كميات قياسية، لذلك فإن حاصل ضرب المحددات يكون تبادلياً وترابطياً، وبالتالي يمكننا كتابة:

$$\underbrace{|T||T^{-1}|}_{1}|sI - A_1| = |sI - A_2|$$

وفي النهاية نحصل على:

$$|sI - A_1| = |sI - A_2|$$

حيث أن المحددين هما نفسهما، فإن جذورهما ستكون أيضاً هي نفسها، مما يثبت أن القيم المميزة لأي نظام لا تتغير بتغير اختيار متغيرات الحالة واستجاباتها.

القطرية (جعل المصفوفة قطرية)

إذا كانت القيم المميزة لأي نظام مميزة ومختلفة، فإنه من الممكن أن نختار متغيرات الحالة بطريقة تجعل مصفوفة النظام A قطرية. إذا كانت المصفوفة A قطرية، فإنها تكون على الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

حيث N هي درجة النظام. بالتالي فإن المحدد |sI-A| سيكون:

$$|sI - A| = (s - a_{11})(s - a_{22}) \dots (s - a_{NN})$$

حيث إن هذه الصورة هي محللة إلى عوامل كما نرى، فإن جذورها ستكون a_{11}، و a_{22}، و...، و a_{NN}. لذلك إذا كانت المصفوفة A قطرية، فإن عناصر القطر ستكون هي القيم المميزة للمصفوفة ويمكن التعبير عن المصفوفة على هذه الصورة:

$$A = \Lambda \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

الآن افترض أن لدينا مصفوفة نظام A ليست على الصورة القطرية ونحن نريد إيجاد تحويل T يجعل هذه المصفوفة قطرية. بالتالي يمكننا كتابة:

$$\Lambda = TAT^{-1}$$

بضرب الطرفين من الناحية اليسرى في T :

$$\Lambda T = TA \qquad \text{(١٦.٨) المعادلة رقم}$$

حيث إن كل من Λ و A معروفان، فإنه يمكن حل هذه المعادلة لإيجاد T. لاحظ أنه إذا كنا نريد إيجاد حل T للمعادلة (١٦.٨) وقمنا بضرب T بالكمية القياسية K لتوليد مصفوفة تحويل أخرى $T_2=KT$ فإنه يمكننا القول:

$$\Lambda T_2 = \Lambda KT = K\Lambda T$$

ثم باستخدام المعادلة (١٦.٨) نحصل على:

$$\Lambda T_2 = KTA = T_2A$$

أو ببساطة:

$$\Lambda T_2 = T_2A$$

والتي هي نفسها المعادلة (١٦.٨)، فيما عدا اسم مصفوفة التحويل، مما يثبت أن مصفوفة الحل T ليست فريدة.

بمجرد حصولنا على التحويل الذي يمكن أن يضع مصفوفة النظام في الصورة القطرية، فإنه يكون لدينا نظام من المعادلات على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \\ \vdots \\ q_N'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} + Bx(t)$$

حيث إن كلاً من B و x(t) معروفان، فإن هذه المعادلة المصفوفية تكافئ مجموعة N من المعادلات التفاضلية غير المرتبطة في عدد N من المجاهيل q_1 و q_2 و... و q_N. يمكن حل كل معادلة دون الرجوع إلى المعادلات الأخرى. لذلك، فإن عملية تحويل مصفوفة النظام إلى الصورة القطرية تحول حل عدد N من المعادلات التفاضلية المتزامنة من الدرجة الأولى إلى N من الحلول المستقلة، كل منها لمعادلة تفاضلية واحدة.

مثال ١٦.٤

وضع المصفوفة A في الصورة القطرية

نظام له المصفوفة A على الصورة:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة B على الصورة:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة T التي تجعل المصفوفة A قطرية ومتغيرات الحالة الجديدة المقابلة للمصفوفة القطرية A.

القيم المميزة هي حل المعادلة $|sI-A_1|=0$ أو:

$$\begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ 3 & s-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

وبالتالي، فإننا نريد حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\Lambda T = TA_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفات نحصل على الأربع معادلات التالية في أربعة مجاهيل:

$$t_{11} = 2t_{11} - 3t_{12}, \;\; t_{12} = -t_{11} + 4t_{12}$$
$$5t_{11} = 2t_{21} - 3t_{22}, \;\; 5t_{22} = -t_{21} + 4t_{22}$$

المعادلتان اللتان في القمة:

$$t_{11} = 2t_{11} - 3t_{12} \quad \text{و} \quad t_{12} = -t_{11} + 4t_{12}$$

يمكن تبسيطهما إلى:

$$-t_{11} + 3t_{12} = 0$$

وبالتالي فإنهما غير مستقلين خطيا. نفس الشيء سيكون مع المعادلتين في الأسفل واللتان يمكن تبسيطهما إلى الصورة التالية:

$$t_{21} + t_{22} = 0$$

لذلك، فإنه لا يوجد حل فريد للمصفوفة T. في الحقيقة هناك عدد لا نهائي من الحلول. يمكننا اختيار أي اثنين من العناصر في المصفوفة T اختيارياً ثم نحدد العنصرين المتبقيين. سنفترض $t_{11}=a$ و $t_{21}=b$ وبالتالي نحصل على:

$$\begin{matrix} t_{12} = a/3 \\ t_{22} = -b \end{matrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} a & a/3 \\ b & -b \end{bmatrix}$$

في هذه الحالة من الممكن أن يكون الاختيار التالي اختياراً مناسباً : $t_{11}=a=3$ و $t_{21}=b=1$ ، وبالتالي :

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الآن يمكننا أن نوجد متغيرات الحالة المقابلة للمصفوفة القطرية A.

$$q_2 = Tq_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} q_1$$

ومعادلات الحالة الجديدة ستكون :

$$q_2'(t) = TA_1T^{-1}q_2(t) + TB_1x(t) = A_2q_2(t) + B_2x(t)$$

$$q_2'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} q_2(t) + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}x(t)$$

$$q_2'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} q_2(t) + \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}x(t)$$

يمكن استخدام ماتلاب لإيجاد المصفوفة T. يحتوي ماتلاب على الأمر eig، الذي يوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة. الصورة العامة لهذا الأمر هي :

$$[V, L] = EIG(A)$$

حيث L هي المصفوفة القطرية التي تكون قيمها المميزة هي القطر و V هي المصفوفة التي أعمدتها هي المتجهات المميزة المقابلة بحيث :

$$AV = VL$$

تذكر مما سبق أن المصفوفة T تحقق :

$$TA=\Lambda T \quad \text{أو} \quad \Lambda T=TA$$

ومصفوفة T هي المتجهات المميزة. لقد تم عكس ترتيب عملية الضرب على طرفي المعادلة بحيث إن V الناتجة من ماتلاب ليست هي T التي نريدها. إذا ضربنا الطرفين من اليمين ومن اليسار في المعادلة التالية :

$$TA=\Lambda T$$

في T^{-1} سنحصل على :

$$AT-1=T-1\Lambda$$

وهي في الصورة نفسها مثل AV = VL مع $T^{-1}=V$ أو $T=V^{-1}$. لذلك لإيجاد T ، فإننا نوجد معكوس V الناتجة من ماتلاب.

مثال ١٦.٥

جعل معادلات الحالة قطرية باستخدام ماتلاب

أعد حل مثال ١٦.٤ مستخدماً ماتلاب.

```
>> A1 = [2 -1 ; -3 4] ; B1 = [4 0 ; -2 1] ;
>> [Tinv,L] = eig(A)
Tinv =
         -0.7071 0.3162
         -0.7071 -0.9487
L =
         1.0000 0
         0 5.0000
>> T = inv(Tinv)
T =
         -1.0607 -0.3536
         0.7906 -0.7906
>> A2 = T*A1*inv(T)
A2 =
         1.0000 0.0000
         -0.0000 5.0000
>> B2 = T*B1
B2 =
         -3.5355 -0.3536
         4.7434 -0.7906
```

المصفوفة T التي تم الحصول عليها بهذه الطريقة هي :

$$\begin{bmatrix} -1.0607 & -0.3536 \\ 0.7906 & -0.7906 \end{bmatrix}$$

ليست مثل المصفوفة T التي تم الحصول عليها في المثال ١٦- ٤ التي كانت :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ولكن المصفوفة T ليست فريدة والعلاقات :

$$t_{12} = t_{11}/3$$
$$t_{22} = -t_{21}$$

يمكن تحقيقها عن طريق كل من الاختيارين للمصفوفة T. وعلى ذلك، فإن أياً من المصفوفتين T يمكنها أن تجعل المصفوفة قطرية.

أدوات في ماتلاب لتحليل فضاء الحالة

يحتوي مفهوم ماتلاب عن هدف النظام نماذج مستمرة زمنياً لفضاء الحالة للأنظمة. الدالة الأساسية هي ss والصورة العامة لها، هي :

```
sys=ss(A, B, C, D)    ;
```

حيث A، وB، وC و،D هي مصفوفات تمثيل فضاء الحالة بالاسم نفسه. الدالة ssdata تستخلص مصفوفات فراغ الحالة من وصف النظام بطريقة مكافئة لـ zpkdata و tfdata. الدالة ss2ss تحول من نموذج فراغ حالة إلى نموذج فراغ حالة آخر. الصورة العامة هي :

```
sys=ss2ss(sys, T)     ;
```

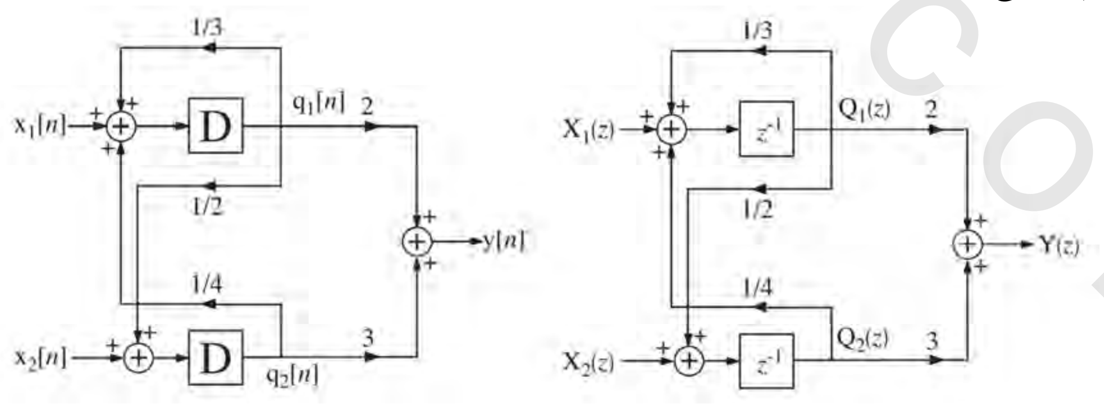
حيث T هي مصفوفة التحويل.

```
>> A1 = [2 -1 ; -3 4] ; B1 = [4 0 ; -2 1] ;
>> C1 = [1 0 ; 0 2] ; D1 = [0 0 ; 0 0] ;
>> sys1 = ss(A1,B1,C1,D1) ;
>> T = [3 1 ; 1 -1] ;
>> sys2 = ss2ss(sys1,T)
>> [A2,B2,C2,D2] = ssdata(sys2) ;
>> A2
A2 =
        1 0
        0 5
>> B2
B2 =
        10 1
        6 -1
>> C2
C2 =
        0.2500 0.2500
        0.5000 -1.5000
>> D2
D2 =
        0 0
        0 0
```

(١٦.٣) الأنظمة المتقطعة زمنياً

معادلات النظام والخرج

كما كان الأمر حقيقياً مع الأزمنة المستمرة زمنياً، فإن أفضل تحليل للأنظمة المتقطعة زمنياً الكبيرة يكون بطريقة نظامية، مثل: طريقة تحليل فراغ الحالة، كما أن تحليل فراغ الحالة للأنظمة المتقطعة زمنياً يتوازي تماماً مع تحليل فراغ الحالة للأنظمة المستمرة. سنحتاج لتحديد عدد متغيرات الحالة، الذي يساوي درجة النظام. سنبدأ بمثال للنظام الموضح في شكل (١٦.٧).



شكل رقم (١٦.٧) مثال على الأنظمة المتقطعة زمنياً

في تنفيذ فراغ الحالة في الأنظمة المستمرة زمنياً، يتم وضع تفاضلات متغيرات الحالة في صورة تجميع خطي من متغيرات الحالة والإثارات. في تنفيذ فراغ الحالة في الأنظمة المتقطعة زمنياً، تتم مساواة القيم التالية لمتغيرات الحالة مع تجميع خطي من قيم متغيرات الحالة الحالية والإثارات الحالية. معادلات النظام والخرج ستكون:

$$q[n+1] = Aq[n] + Bx[n]$$

$$y[n] = Cq[n] + Dx[n]$$

المعادلة رقم (١٦.٩)

يتم اختيار متغيرات الحالة بأبسط الطرق، على أنها الاستجابات لبلوكات التأخير. بالتالي ستكون متغيرات الحالة والمصفوفات على الصورة:

$$q[n] = \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } x[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}$$

$$y[n] = [y[n]], \; C = [2 \quad 3], \; D = [0 \quad 0]$$

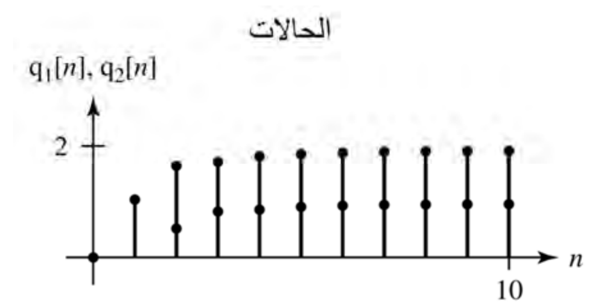
طريقة مباشرة لحل معادلات الحالة تكون عن طريق التكرار التتابعي أو الإعادة. لكي نوضح هذه العملية سنفترض متجه الإثارة على الصورة:

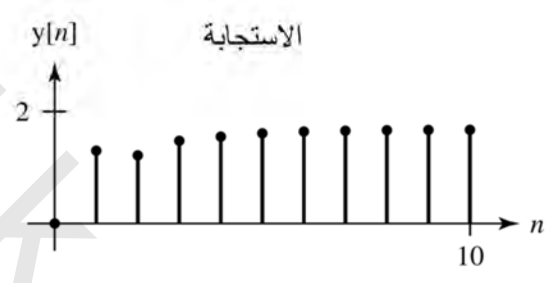
$$x[n] = \begin{bmatrix} u[n] \\ \delta[n] \end{bmatrix}$$

وسنفترض أن النظام سيكون مستقراً بحيث إن q[0]=[0]. بعد ذلك سنقوم بالتكرار التتابعي المباشر من المعادلة (١٦.٩)، حيث سنحصل على القيم الموضحة في جدول ١٦.١. الحالات والاستجابات التي تم الحصول عليها من التكرار التتابعي موضحة في شكل (١٦.٨).

جدول رقم (١٦.١). الحالات والاستجابات الناتجة من التكرار التتابعي

n	$q_1[n]$	$q_2[n]$	$y[n]$
0	0	0	0
1	1	1	5
2	1.5833	0.5	4.667
3	1.6528	0.7917	5.681
⋮	⋮	⋮	⋮





شكل رقم (١٦.٨) الحالات والاستجابات للنظام المتقطع زمنياً.

يمكننا تعميم عملية التكرار التتابعي. من المعادلة (١٦.٩) كما يلي :

$$q[1] = Aq[0] + Bx[0]$$
$$q(2) = Aq[1] + Bx[1] = A^2q[0] + ABx[0] + Bx[0]$$
$$q(3) = Aq[2] + Bx[2] = A^3q[0] + A^2Bx[0] + ABx[0] + Bx[0]$$
$$q(n) = A^nq[0] + A^{n-1}Bx[2] + A^{n-2}Bx[1] + \cdots + A^1Bx[n-2] + A^0Bx[n-1].$$

وأيضاً :

$$y[1] = Cq[1] + Dx[1] = CAq[0] + CBx[0] + Dx[1]$$
$$y(2) = Cq[2] + Dx[2] = CA^2q[0] + CABx[0] + CBx[1] + Dx[2]$$
$$y(3) = Cq[3] + Dx[3] = CA^3q[0] + CA^2Bx[0] + CABx[1] + CBx[2] + Dx[3]$$
$$y(n) = CA^nq[0] + CA^{n-1}Bx[0] = CA^{n-2}Bx[1] + \cdots + CA^0Bx[n-1] + Dx[n]$$

يمكن كتابة ذلك على الصور التالية :

$$q[n] = A^nq[0] + \sum_{m=0}^{n-1} A^{n-m-1} Bx[m]$$

وأيضاً :

$$y[n] = CA^nq[0] + C\sum_{m=0}^{n-1} A^{n-m-1} Bx[m] + Dx[n] \qquad \text{المعادلة رقم (١٦.١٠)}$$

في المعادلة (١٦.١٠)، الكمية $A^nq[0]$ هي استجابة الدخل الصفري الناتج من الحالة الابتدائية للنظام q[0]. المصفوفة A^n تسمى مصفوفة حالة العبور وفي العادة يتم الرمز لها بالرمز [n] . يأتي هذا الاسم من فكرة أن العبور، أو الانتقال من حالة لأخرى يتم التحكم فيها عن طريق ديناميكية النظام الموصوفة بالمصفوفة [n] $=A^n$. الكمية

الثانية $\sum_{m=0}^{n-1} A^{n-m-1}Bx[m]$ هي استجابة الحالة صفر للنظام. هذه الكمية تكافئ المجموع الالتفافي في الزمن المتقطع، $A^{n-1}u[n-1]*Bx[n]u[n]$ أو تحت الافتراض العادي في تحليل متغيرات الحالة، أن x[n] تكون صفراً في الأزمنة المتقطعة السالبة.

$$\sum_{m=0}^{n-1} A^{n-m-1}\,Bx[m] = A^{n-1}u[n-1] * Bx[n]$$

وبالتالي يمكن إعادة كتابة المعادلة (١٦.٨) كما يلي:

$$q[\mathrm{n}] = \underbrace{\phi[\mathrm{n}]\mathrm{q}[0]}_{\text{إستجابة الدخل الصغرى}} + \underbrace{\phi[\mathrm{n}-1]\mathrm{u}[\mathrm{n}-1] * Bx[\mathrm{n}]}_{\text{استجابة الحالة صفر}}$$ المعادلة رقم (١٦.١١)

بطريقة مشابهة يمكننا إعادة كتابة المعادلة (١٦.١٠) كما يلي:

$$y(\mathrm{n}) = C\phi[\mathrm{n}]\mathrm{q}[0] + C\phi[\mathrm{n}-1]\mathrm{u}[\mathrm{n}-1] * Bx[\mathrm{n}] + Dx[\mathrm{n}]$$ المعادلة رقم (١٦.١٢)

النتيجتان الأخيرتان في المعادلتين (١٦.١١) و (١٦.١٢) هما حلول النظام المتقطع زمنياً لحالات واستجابات النظام.

يمكننا أيضاً حل معادلات الحالة عن طريق استخدام تحويل z الأحادي الجانب. بإجراء تحويل z على طرفي المعادلة (١٦.٩) نحصل على:

$$zQ(\mathrm{z}) - zq(0) = AQ(\mathrm{z}) + \mathrm{B}x(\mathrm{z})$$

يمكننا الحل لمتجه متغيرات الحالة كما يلي:

$$Q(\mathrm{z}) = [\mathrm{zI}-\mathrm{A}]^{-1}\left[\mathrm{B}X(\mathrm{z}) + zq[0]\right] = \underbrace{[\mathrm{zI}-\mathrm{A}]^{-1}\mathrm{B}x(\mathrm{z})}_{\text{استجابة الحالة صفر}} + \underbrace{[\mathrm{zI}-\mathrm{A}]^{-1}q[0]}_{\text{استجابة الدخل الصغرى}}$$ المعادلة رقم (١٦.١٣)

بمقارنة المعادلة (١٦.١٣) مع المعادلة (١٦.١١) يتضح أن:

$$\phi[\mathrm{n}] \overset{\mathrm{z}}{\leftrightarrow} \mathrm{z}[\mathrm{zI}-\mathrm{A}]^{-1}$$

لذلك فمن المتوافق والمنطقي أن نحدد تحويل z لمصفوفة العبور كما يلي:

$$\Phi(\mathrm{z}) = \mathrm{z}[\mathrm{zI}-\mathrm{A}]^{-1}$$

لاحظ التشابه مع النتيجة المقابلة في فراغ الحالة للأزمن المستمرة زمنياً $\Phi(s)=[sI-A]^{-1}$.

لكي نبين حلاً رقمياً، سنفترض مرة أخرى متجه الإثارة التالي:

$$\mathrm{x}[\mathrm{n}] = \begin{bmatrix}\mathrm{u}[\mathrm{n}]\\ \delta[\mathrm{n}]\end{bmatrix}$$

وسنفترض للمرة الثانية أن النظام يكون مستقراً في البداية، بمعنى q[0]=[0]، وبالتالي:

$$\mathrm{Q}(\mathrm{z}) = \begin{bmatrix}\mathrm{z}-1/3 & -1/4\\ -1/2 & \mathrm{z}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-1}\\ 1\end{bmatrix}$$

أو :
$$Q(z)=\begin{bmatrix}\frac{z^2+z/4-1/4}{z^3-4z^2/3+5z/24+1/8}\\ \frac{z^2+5z/6-1/3}{z^3-4z^2/3+5z/24+1/8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{z^2+z/4-1/4}{(z-1)(z-0.5575)(z+0.2242)}\\ \frac{z^2+5z/6-1/3}{(z-1)(z-0.5575)(z+0.2242)}\end{bmatrix}$$

بالوضع في صورة كسور جزيئية :
$$Q(z)=\begin{bmatrix}\frac{1.846}{z-1}-\frac{0.578}{z-0.5575}-\frac{0.268}{z+0.2242}\\ \frac{0.923}{z-1}-\frac{0.519}{z-0.5575}+\frac{0.596}{z+0.2242}\end{bmatrix}$$

بإجراء تحويل z نحصل على :

$$q[n]=\begin{bmatrix}1.846-0.578(0.5575)^{(n-1)}-0.268(0.2242)^{(n-1)}\\0.923-0.519(0.5575)^{(n-1)}+0.596(-0.2242)^{(n-1)}\end{bmatrix}u[n-1]$$ المعادلة رقم (١٦.١٤)

بعد إيجاد الحل لمتجه متغيرات الحالة ، يمكننا أن نوجد متجه الاستجابة فوراً كما يلي :

$$y[n]=[6.461+2.713(0.5575)^{(n-1)}+1.252(-0.2242)^{(n-1)}]u[n-1]$$ المعادلة رقم (١٦.١٥)

بالتعويض بقيم n في المعادلة (١٦.١٤) والمعادلة (١٦.٥) نحصل على جدول ١٦.٢ ، الذي يتوافق تماماً مع جدول ١٦.١ ، مما يثبت أن طريقتي الحل باستخدام التكرار التتابعي وتحويل z يعطيان النتيجة نفسها.

جدول رقم (١٦.٢). الحالات والاستجابات المحسوبة من حلول الصورة المغلقة

n	$q_1[n]$	$q_2[n]$	$y[n]$
0	0	0	0
1	1	1	5
2	1.5833	0.5	4.667
3	1.6528	0.7917	5.681
⋮	⋮	⋮	⋮

دوال العبور وتحويلات متغيرات الحالة

من معادلات فراغ الحالة يمكننا إيجاد مصفوفة دالة العبور التي تربط كل الاستجابات مع كل الإثارات.

بالبدء مع المعادلة (١٦.٨):
$$zQ(z)-zq(0)=AQ(z)+BX(z)$$

ووضع الحالة الابتدائية تساوي صفراً (والتي ستكون لأي دالة عبور سيتم تحديدها)، يمكننا أن نحل لإيجاد Q(z) كما يلي:

$$Q(z) = [zI - A]^{-1}BX(z) = z^{-1}\Phi(z)BX(z)$$

وستكون الاستجابة Y(z) كما يلي:

$$Y(z) = CQ(z) + DX(z) = z^{-1}C\Phi(z)BX(z) + DX(z)$$

وستكون دالة العبور، التي هي نسبة الاستجابة إلى الإثارة، كما يلي:

$$H(z) = z^{-1}C\Phi(z)B + D = C[zI - A]^{-1}B + D$$

كل شيء تم استنتاجه في تحليل فراغ الحالة في الأزمنة المستمرة عن التحويل من مجموعة متغيرات الحالة إلى مجموعة أخرى يتم تطبيقه تماماً على تحليل الأنظمة المتقطعة. إذا كانت:

$$q_2[n] = Tq_1[n] \ and \ q_1[n+1] = A_1q_1[n] + B_1x[n]$$

وبالتالي، فإن:

$$q_2[n+1] = A_2q_2[n] + B_2x[n]$$

حيث $A_2=TA_1T^{-1}$ وأيضاً:

$$B_2 = TB_1 \text{ and } y[n] = C_2q_2[n] + D_2x[n]$$

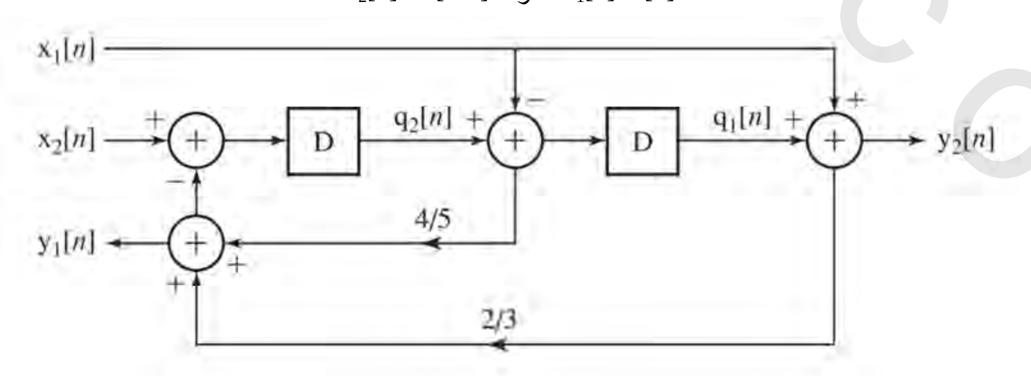
حيث $C_2=C_1T^{-1}$ و $D_2=D_1$.

مثال ١٦.٦

استجابة الحالة صفر لنظام متقطع زمنياً باستخدام طرق فضاء الحالة

أوجد استجابة النظام الموضح في شكل (١٦.٩)، الذي يكون مستقراً في البداية، للإثارات التالية:

$x_1[n]=u[n]$ و $x_2[n]=-u[n-2]$



شكل رقم (١٦.٩) نظام متقطع زمنياً

معادلات الحالة ستكون :

$$q_1[n+1] = q_2[n] - x_1[n]$$

$$q_2[n+1] = x_2[n] - [(4/5)(q_2[n] - x_1[n]) + (2/3)(q_1[n] - x_1[n])]$$

وستكون معادلات الخرج على الصورة :

$$y_1[n] = (4/5)(q_2[n] - x_1[n]) + (2/3)(q_1[n] - x_1[n])$$

$$y_2[n] = q_1[n] + x_1[n]$$

وفي الصورة المصفوفية القياسية :

$$q[n+1] = Aq[n] + Bx[n]$$

حيث :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2/3 & -4/5 \end{bmatrix} \text{ and } \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2/15 & 1 \end{bmatrix}$$

وأيضاً :

$$y[n] = \mathrm{C}q[n] + Dx[n]$$

حيث :

$$C = \begin{bmatrix} 2/3 & 4/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } \mathrm{D} = \begin{bmatrix} -2/15 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث إن النظام يكون مستقراً في البداية ، بالتالي يمكننا استخدام دالة العبور لإيجاد الاستجابات. مصفوفة دالة العبور هي :

$$\mathrm{H(z)} = \mathrm{C[zI - A]^{-1}}B + D = \begin{bmatrix} 2/3 & 4/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2/3 & z + 4/5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2/15 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2/15 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أو :

$$\mathrm{H(z)} = \frac{1}{\mathrm{z^2 + 4z/5 + 2/3}} = \begin{bmatrix} 2/3 & 4/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{z} & -1 \\ 2/3 & \mathrm{z} + 4/5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2/15 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2/15 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أو :

$$\mathrm{H(z)} = \frac{1}{\mathrm{z^2 + 4z/5 + 2/3}} = \begin{bmatrix} -42\mathrm{z}/75 + 4/45 & 2/3 + 4\mathrm{z}/5 \\ -\mathrm{z} - 2/3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2/15 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تحويل z لمتجه الإثارة سيكون :

$$\mathrm{X(z)} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-1} \\ -\frac{\mathrm{z}^{-1}}{\mathrm{z}-1} \end{bmatrix}$$

وبالتالي ، فإن متجه الاستجابة في النطاق z سيكون :

$$\mathrm{Y(z)} = \mathrm{H(z)X(z)} = \left(\frac{1}{\mathrm{z}^2 + \frac{4}{5}\mathrm{z} + \frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{42}{75}\mathrm{z} + \frac{4}{45} & \frac{2}{3} + \frac{4}{5}\mathrm{z} \\ -\mathrm{z} - \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-1} \\ -\frac{\mathrm{z}^{-1}}{\mathrm{z}-1} \end{bmatrix}$$

أو :

$$Y(z)=\frac{1}{z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}\left(-\frac{42}{75}z+\frac{4}{45}\right)\frac{z}{z-1}-\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}z\right)\frac{z^{-1}}{z-1}\\ \left(z-\frac{2}{3}\right)\frac{z}{z-1}-\frac{z^{-1}}{z-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{2}{15}\frac{z}{z-1}\\ \frac{z}{z-1}\end{bmatrix}$$

أو :

$$Y(z)=\frac{z^{-1}}{z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}-\frac{\frac{42}{75}z^3-\frac{4}{45}z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}}{z-1}\\ -\frac{z^3+\frac{2}{3}z^2+1}{z-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{2}{15}\frac{z}{z-1}\\ \frac{z}{z-1}\end{bmatrix}$$

أو :

$$Y(z)=-z^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\frac{42}{75}z^3-\frac{4}{45}z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}}{(z-1)\left(z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}\right)}\\ \frac{z^3+\frac{2}{3}z^2+1}{(z-1)\left(z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}\right)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{2}{15}\frac{z}{z-1}\\ \frac{z}{z-1}\end{bmatrix}$$

باستخدام الكسور الجزيئية :

$$Y(z)=-z^{-1}\begin{bmatrix}0.56+\frac{0.7856}{z-1}-\frac{0.7625z+0.5163}{z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}}\\ 1+\frac{1.081}{z-1}-\frac{0.2144z+0.9459}{z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{2}{15}\frac{z}{z-1}\\ \frac{z}{z-1}\end{bmatrix}$$

أو :

$$Y(z)=-z^{-1}\begin{bmatrix}0.56+\frac{0.7856}{z-1}-\frac{0.7625}{0.7188}\frac{0.7188z}{z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}}-z^{-1}\frac{0.5163}{0.7188}\frac{0.7188z}{z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}}\\ 1+\frac{1.081}{z-1}-\frac{0.2144}{0.7188}\frac{0.7188z}{z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}}-z^{-1}\frac{0.9459}{0.7188}\frac{0.7188z}{z^2+\frac{4}{5}z+\frac{2}{3}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{2}{15}\frac{z}{z-1}\\ \frac{z}{z-1}\end{bmatrix}$$

بإجراء تحويل z العكسي :

$$y[n]=-\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0.56\delta[n-1]+0.7856\,u[n-2]\\ -1.071(0.8165)^{n-1}\sin\big(2.083(n-1)\big)u[n-1]\\ -0.7253(0.8165)^{n-2}\sin\big(2.083(n-2)\big)u[n-2]\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\delta[n-1]+1.08\,u[n-2]\\ -0.3012(0.8165)^{n-1}\sin\big(2.083(n-1)\big)u[n-1]\\ -1.329(0.8165)^{n-2}\sin\big(2.083(n-2)\big)u[n-2]\end{pmatrix}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-(2/15)u[n]\\ u[n]\end{bmatrix}$$

أدوات ماتلاب لتحليل فراغ الحالة

يحتوي هدف النظام في ماتلاب على نماذج لفراغ الحالة في الأزمنة المتقطعة مثلما كان الوضع مع الأزمنة المستمرة. الدالة الأساسية هي ss والصورة العامة لها هي :

```
sys=ss(A, B, C, D, Ts)     ;
```

حيث A و B و C و D هي مصفوفات تمثيل فراغ الحالة بالاسم نفس و Ts هي الزمن بين العينات. الدالة ssdata تستخلص مصفوفات فراغ الحالة من وصف النظام بطريقة مشابهة لـ zpkdata و tfdata. الدالة ss2ss تحول نموذج فراغ حالة لنموذج فراغ حالة آخر. الصورة العامة هي :

```
sys=ss2ss(sys, T)    ;
```

حيث T هي مصفوفة التحويل.

(١٦.٤) ملخص النقاط المهمة

١- درجة النظام هي مجموع درجات المعادلات التفاضلية المستقلة المطلوبة لوصف النظام.

٢- أي نظام LTI يمكن وصفه بمعادلة نظام مصفوفية ومعادلة خرج مصفوفية تحتوي أربع مصفوفات هي A و B و C و D.

٣- الكمية $[sI-A]^{-1}$ هي تحويل لابلاس لمصفوفة انتقال الحالة وتحتوي معلومات عن السلوك الديناميكي واستقرار النظام.

٤- دوال العبور من العديد من المداخل إلى العديد من المخارج يمكن استنتاجها من المصفوفات A و B و C و D.

٥- مجموعة متغيرات الحالة التي تصف أي نظام ليست فريدة أو وحيدة.

٦- يمكن تحويل مجموعة من متغيرات الحالة إلى مجموعة أخرى من خلال مصفوفة التحويل T. القيم المميزة للنظام تبقى كما هي.

٧- إذا كان أي نظام لا يحتوي قيماً مميزة متكررة، فإن متغيرات الحالة يمكن جعلها قطرية، وفصلها بفاعلية، مما يسمح بحلهم واحد بعد الآخر.

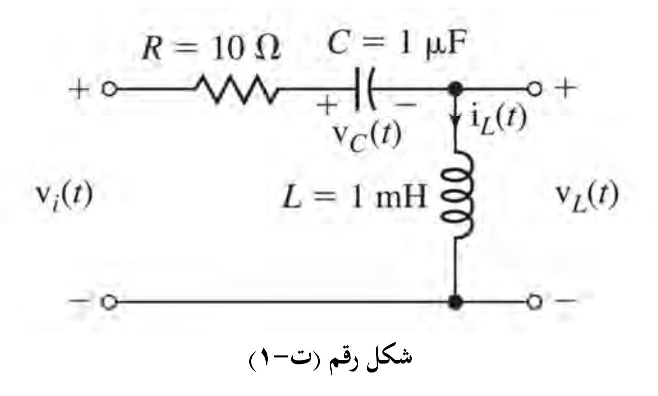
٨- كل الطرق المستخدمة في تحليل الأنظمة المستمرة زمنياً لها نظير مباشر في تحليل أنظمة الزمن المتقطع.

تمارين مع إجاباتها

(في كل تمرين تكون الإجابات مرتبة بطريقة عشوائية)

معادلات الحالة المستمرة زمنياً

١- أكتب معادلات النظام للدائرة الموضحة في شكل (ت- ١) حيث تيار الملف $i_L(t)$ وجهد المكثف $v_C(t)$ هي متغيرات الحالة والجهد عند الدخل $v_i(t)$ هو الإثارة والجهد عند الخرج $v_L(t)$ هو الاستجابة :



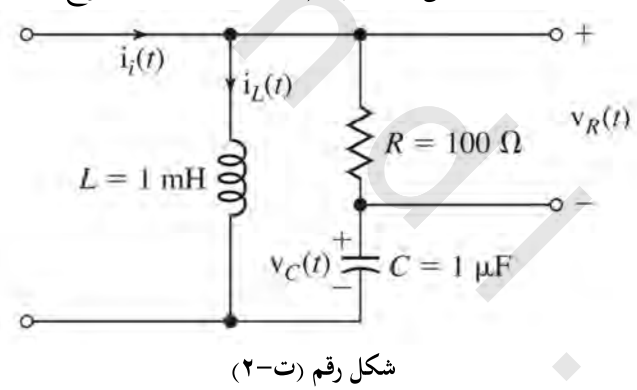
شكل رقم (ت-١)

الإجابة:

$$\begin{bmatrix} i_L'(t) \\ i_L'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} v_i(t)$$

$$v_L(t) = [-1 - R] \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + v_i(t)$$

٢- اكتب معادلات الحالة للدائرة الموجودة في شكل (ت- ٢) حيث تيار الملف $i_L(t)$، وجهد المكثف $v_C(t)$ هما متغيرات الحالة والتيار عند الدخل $i_i(t)$ هو الإثارة والجهد عند الخرج $v_R(t)$ هو الاستجابة؟



شكل رقم (ت-٢)

الإجابة:

$$\begin{bmatrix} v_c'(t) \\ i_L'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R/L \end{bmatrix} i_i(t)$$

$$v_R(t) = [0 \quad R] \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + Ri_i(t)$$

٣- من دالة عبور النظام التالية:

$$H(s) = \frac{s(s+3)}{s^2+2s+9}$$

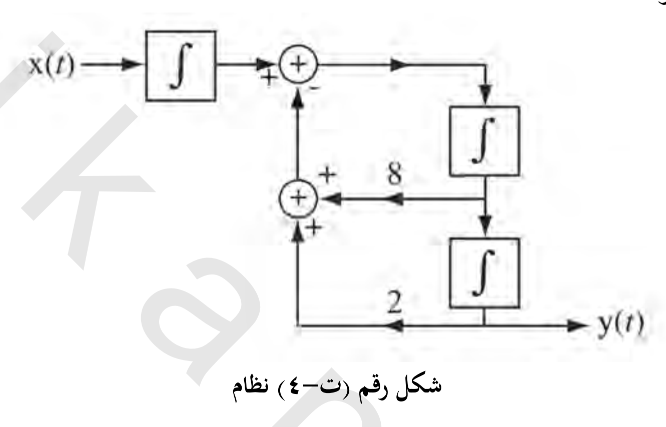
اكتب مجموعة من معادلات الحالة باستخدام أقل عدد من الحالات للنظام الذي يكون في البداية في الحالة الصفرية؟

الإجابة:

$$\begin{bmatrix} sQ_1(s) \\ sQ_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sQ_1(s) \\ sQ_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{X}(s)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} -9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sQ_1(s) \\ sQ_2(s) \end{bmatrix} + [1]\mathrm{X}(s)$$

٤- اكتب معادلات الحالة للنظام الذي مخططه الصندوقي موضح في شكل (ت- ٤) باستخدام استجابات المكاملات كمتغيرات حالة؟



شكل رقم (ت-٤) نظام

الإجابة:

$$\begin{bmatrix} q_1'(\mathrm{t}) \\ q_2'(\mathrm{t}) \\ q_3'(\mathrm{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{q}_1(\mathrm{t}) \\ \mathrm{q}_2(\mathrm{t}) \\ \mathrm{q}_3(\mathrm{t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[t]$$

$$y[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{q}_1(\mathrm{t}) \\ \mathrm{q}_2(\mathrm{t}) \\ \mathrm{q}_3(\mathrm{t}) \end{bmatrix} + [0]x[t]$$

٥- نظام تتم إثارته بالإشارة x(t)=3u(t)، والاستجابة هي:

$$y(t) = 0.961\mathrm{e}^{-1.5\mathrm{t}}\sin(s3.122t)u(t)$$

اكتب مجموعة من معادلات الحالة باستخدام أقل عدد من الحالات؟

الإجابة:

$$\begin{bmatrix} sQ_1(s) \\ sQ_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sQ_1(s) \\ sQ_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{X}(s)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sQ_1(s) \\ sQ_2(s) \end{bmatrix} + [1]\mathrm{X}(s)$$

٦- نظام يتم وصفه بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$y''(t) + 4y'(t) + 7y = \mathrm{x}(t)$$

اكتب مجموعة من معادلات الحالة لهذا النظام.

الإجابة :

$$\begin{bmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{q}_1(t) \\ \mathrm{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{x}(t)$$

$$\mathrm{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{q}_1(t) \\ \mathrm{q}_2(t) \end{bmatrix}$$

استجابة الأنظمة المستمرة زمنياً

٧- نظام موصوف بمعادلات الحالة التالية :

$$\begin{bmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{q}_1(t) \\ \mathrm{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1(t) \\ \mathrm{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{q}_1(t) \\ \mathrm{q}_2(t) \end{bmatrix}$$

وأيضاً :

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \mathrm{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{q}_1(t) \\ \mathrm{q}_2(t) \end{bmatrix}$$

حيث الإثارة هي :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1(t) \\ \mathrm{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta(t) \\ \mathrm{u}(t) \end{bmatrix}$$

والحالات الابتدائية التالية :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{q}_1(0^+) \\ \mathrm{q}_2(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أوجد متجه استجابة النظام؟

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \mathrm{y}_2(t) \end{bmatrix}$$

الإجابة:

$$\begin{bmatrix} 5\mathrm{e}^{-3t} + 27\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 10 \\ 15\mathrm{e}^{-3t} + 15\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 8 \end{bmatrix} u(t)$$

القطرية (جعل المصفوفة قطرية)

٨- نظام موصوف بمتجه معادلات الحالة التالية :

$$q'(\mathrm{t}) = \mathrm{Aq}(\mathrm{t}) + Bx(\mathrm{t})$$

وأيضاً:

$$y(t) = Cq(t) + Dx(t)$$

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حَدِّدْ حالتين جديدتين، بدلالة الحالات القديمة، التي لها المصفوفة A تكون قطرية وأعد كتابة معادلات الحالة؟

الإجابة:

$$q_2(t) = \begin{bmatrix} 0.8446 & -0.5354 \\ -0.3893 & 0.9211 \end{bmatrix} q_1(t)$$

$$q_2'(t) = \begin{bmatrix} -2.2679 & 0 \\ 0 & -5.7321 \end{bmatrix} q_2(t) + \begin{bmatrix} 0.8446 & -0.5354 \\ -0.3893 & 0.9211 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1.184 & -2.5688 \\ 2.7342 & 5.9319 \end{bmatrix} q_2(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

الوصف بالمعادلات التفاضلية

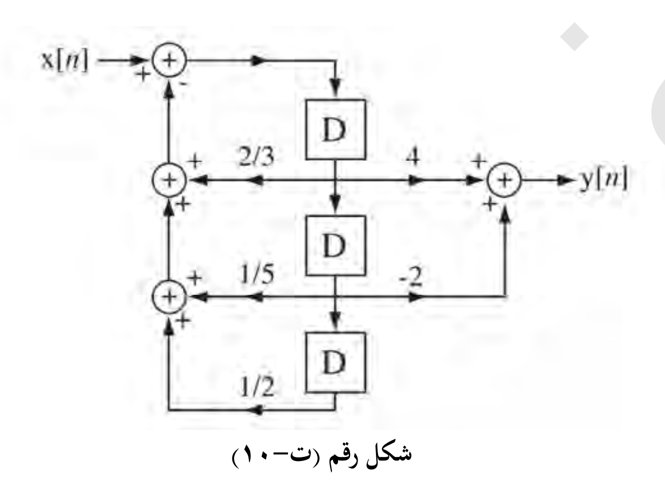
٩- بالنسبة لمعادلات الحالة الأصلية في تمرين ٨ اكتب وصفاً للنظام بالمعادلات التفاضلية؟

الإجابة:

$$y_1'(t) = -4y_1(t) + (3/4)y_2(t) + 6x_1(t) - 3x_2(t) + x_1'(t)$$
$$y_2'(t) = 4y_1(t) - 4y_2(t) - 4x_1(t) + 4x_2(t)$$

معادلات الحالة المتقطعة زمنياً

١٠- بالنسبة للنظام الموجود في شكل (ت- ١٠) اكتب معادلات الحالة؟



شكل رقم (ت-١٠)

الإجابة :

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \\ q_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/5 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$$

١١- اكتب مجموعة من معادلات الحالة المقابلة لدوال العبور التالية :

(أ) $H(z) = \frac{0.9z}{z^2 - 1.65z + 0.9}$ (ب) $H(z) = \frac{4(z-1)}{(z-0.9)(z-0.7)}$

الإجابة :

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.63 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9 & 1.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + [0]x[n]$$

١٢- حول المعادلة الفرقية التالية :

$$10y[n] + 4y[n-1] + y[n-2] + 2y[n-3] = x[n]$$

إلى مجموعة من معادلات الحالة؟

الإجابة :

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \\ q_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [-0.02 \quad -0.01 \quad -0.04]\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + [0.1]x[n]$$

الوصف بالمعادلات الفرقية

١٣- حَوِّلْ معادلات الحالة الآتية :

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + [0]x[n]$$

إلى معادلة فرقية واحدة؟

الإجابة :

$$y[n] + 2y[n-1] + 5y[n-2] = x[n]$$

استجابة الأنظمة المتقطعة زمنياً

١٤- أوجد استجابات النظام الموصوف بهذه المجموعة من معادلات الحالة. (افترض النظام مستقراً في البداية)؟

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} u[n]$$

$$\begin{bmatrix} y_1[n+1] \\ y_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix}$$

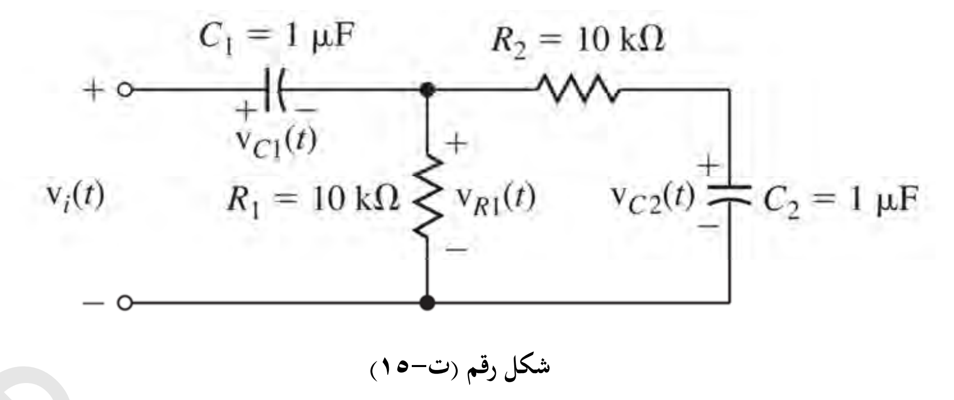
الإجابة :

$$y[n] = \begin{bmatrix} 2.3(3)^n + 1.2(-2)^n - 3.5 \\ 4.6(3)^n + 0.4(-2)^n - 5 \end{bmatrix} u[n]$$

تمارين بدون إجابات

معادلات الحالة المستمرة زمنياً

١٥- اكتب معادلات الحالة للدائرة الموضحة في شكل (ت- ١٥) إن حيث جهدي المكثفين $v_{c1}(t)$ و $v_{c2}(t)$ هما متغيرات الحالة، والجهد عند الدخل $v_i(t)$ هو الإثارة، والجهد $v_{R1}(t)$ هو الاستجابة. بعد ذلك بفرض أن المكثفات ليست مشحونة في البداية، أوجد استجابة وحدة الخطوة لهذه الدائرة؟



شكل رقم (ت-١٥)

استجابة الأنظمة المستمرة زمنياً

١٦- اكتب معادلات الحالة للدائرة الموضحة في شكل (ت- ١٦) حيث إنَّ جهدي المكثفين $v_{c1}(t)$ و $v_{c2}(t)$ هما متغيرات الحالة، والجهد عند الدخل $v_i(t)$ هو الإثارة، والجهد عند الخرج $v_0(t)$ هو الاستجابة. بعد ذلك بفرض أوجد وارسم جهد الاستجابة لإثارة وحدة الخطوة مع فرض الشروط الابتدائية التالية؟

$$\begin{bmatrix} v_{c1}(0) \\ v_{c2}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$R_1 = 6.8\ k\Omega,\ R_2 = 12\ k\Omega,\ C_1 = 6.8\ nF,\ C_2 = 6.8\ nF,\ K = 3$

شكل رقم (ت-١٦)

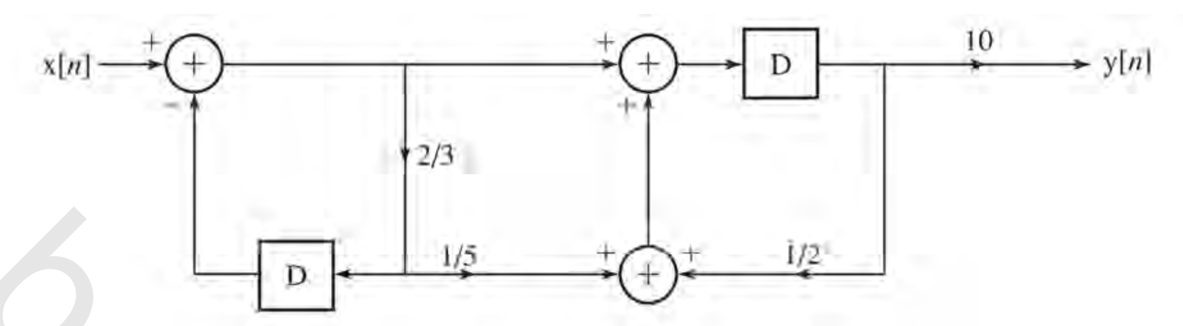
معادلات الحالة المتقطعة زمنياً

١٧- اكتب مجموعة من معادلات الحالة المقابلة لدوال العبور التالية (والتي هي لمرشحات بترورث متقطعة زمنياً)؟

(أ) $H(z) = \frac{0.0674z^2+0.1349z+0.06746}{z^2-1.143z+0.4128}$

(ب) $H(z) = \frac{0.0201z^4+0.0402z^2+0.0201}{z^4-2.5494z^3+3.2024z^2-2.0359z+0.6414}$

١٨- اكتب معادلات الحالة للنظام الموجود في شكل (ت- ١٨).



شكل رقم (ت–١٨)

١٩- نظام متقطع زمنياً تمت إثارته بتتابع الوحدة وكانت استجابته كالتالي :

$$y[n] = (8 + 2(1/2)^{n-1} - 9(3/4)^{n-1})u[n-1]$$

اكتب معادلات الحالة لهذا النظام.

استجابة الأنظمة المتقطعة زمنياً

٢٠- أوجد استجابة النظام الموضح في شكل (ت- ١٨) للإثارة x[n]=u[n]. (افترض أن النظام مستقر في البداية)؟

٢١- أوجد استجابة النظام الموصوف بهذه المجموعة من معادلات الحالة. (افترض أن النظام مستقر في البداية)؟

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/5 \\ 0 & 7/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[n] \\ (3/4)^n u[n] \end{bmatrix}$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[n] \\ (3/4)^n u[n] \end{bmatrix}$$

القطرية (جعل المصفوفة قطرية)

٢٢- حَدِّدْ حالات جديدة تحول هذه المجموعة من معادلات الحالة إلى مجموعة من معادلات الحالة القطرية واكتب معادلات الحالة الجديدة؟

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \\ q_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.1 & -0.2 \\ 0.3 & 0 & -0.2 \\ 1 & -0.1 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1\cos(2\pi n/16)\,u[n] \\ (3/4)^n u[n] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1[n+1] \\ y_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ q_3[n] \end{bmatrix}$$


obeikandl.com

الملاحق

ملحق (أ) علاقات رياضية مفيدة

$\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 1 + x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$\cos(x) = \cos(-x) \;\; and \;\; \sin(x) = -\sin(-x)$

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos(x) + j\sin(x)$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$sin(x)\,cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\,sin(y)$

$sin(x+y) = sin(x)\cos(y) + \cos(x)\,sin(y)$

$A\cos(x) + \;B\;\; sin(x) = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}\;\cos\left(x - tan^{-1}(B/A)\right)$

$\frac{d}{dx}[tan^{-1}(x)] = \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x^n \sin(x)\;\,dx = -x^n\cos(x) + n\int x^{n-1}\cos(x)\;\,dx$

$\int x^n\,cos(x)\;\,dx = x^n\sin(x) - n\int x^{n-1}\sin(x)\;\,dx$

$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^{n+1}}[(ax)^n - n(ax)^{n-1} + n(n-1)(ax)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}n!\,(ax) + (-1)^n n!], n \geq 0$

$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{\mathrm{ax}}}{a^2+b^2}[a\,sin(bx) - \;b\,cos(bx)]$

$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{\mathrm{ax}}}{a^2+b^2}[a\,cos(bx) + \;b\,sin(bx)]$

$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2+(bx)^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$

$\int \frac{\mathrm{dx}}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}} = In\left|x + (x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}\right|$

$\int_0^{\infty} \frac{\sin(mx)}{x}dx = \begin{Bmatrix} \pi/2 & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\pi/2 & m < 0 \end{Bmatrix} = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(m)$

$|Z|^2 = Z\,Z^*$

$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \begin{cases} \frac{1-r^N}{1-r}, & r \neq 1 \\ N, & r = 1 \end{cases}$

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-\mathrm{r}},\; |r| < 1$

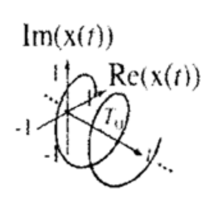
$\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{\mathrm{r^k}}{1-\mathrm{r}}, \ |r| < 1$
$\sum_{n=0}^{\infty} nr^n = \frac{\mathrm{r}}{(1-\mathrm{r})^2}, \ |r| < 1$
$\frac{e^{j\pi n}}{e^{j\pi n/N_0}} drcl\left(\frac{n}{N_0}, N_0\right) = \delta_{N_0}[\mathrm{n}], \ n \text{ and } N_0 \text{ integers}$
$drcl\left(\frac{n}{2m+1}, 2m+1\right) = \delta_{2m+1}[\mathrm{n}], \ n \text{ and } m \text{ integers}$

ملحق (ب) متوالية فروير للزمن المستمر

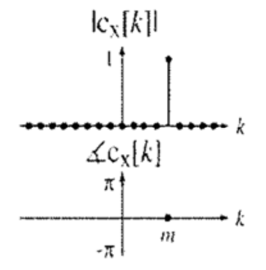
Continuous-time Fourier series (CTFS) for a periodic function with fundamental period $T_0 = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$ represented over the period T.

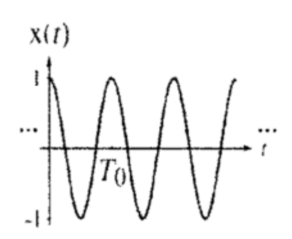
$$\mathrm{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{c_x}[k] e^{j2\pi kt/T} \xleftrightarrow[T]{\mathcal{FS}} \mathrm{c_x}[k] = \frac{1}{T}\int_T \mathrm{x}(t) e^{-j2\pi kt/T}\, dt$$

In these pairs k, n and m are integers.

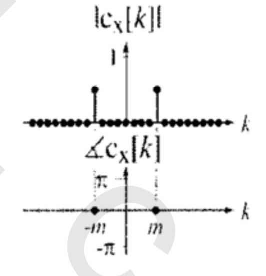


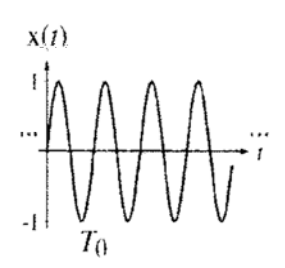
$$e^{j2\pi t/T_0} \xleftrightarrow[mT_0]{\mathcal{FS}} \delta[k-m]$$



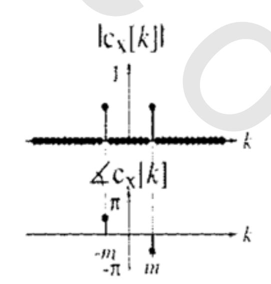


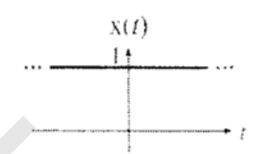
$$\cos(2\pi t/T_0) \xleftrightarrow[mT_0]{\mathcal{FS}} (1/2)(\delta[k-m] + \delta[k+m])$$





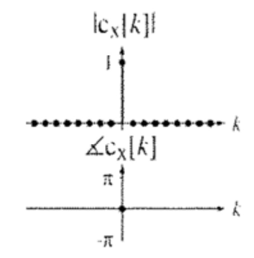
$$\sin(2\pi t/T_0) \xleftrightarrow[mT_0]{\mathcal{FS}} (j/2)(\delta[k+m] - \delta[k-m])$$

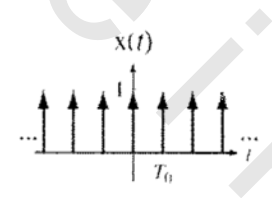




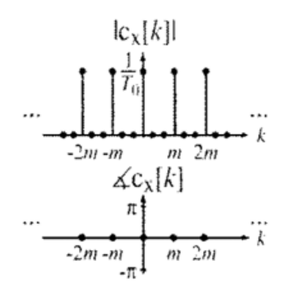
$$1 \xleftrightarrow[T]{\mathcal{FS}} \delta[k]$$

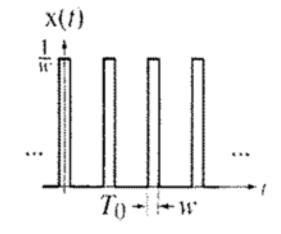
T is arbitrary



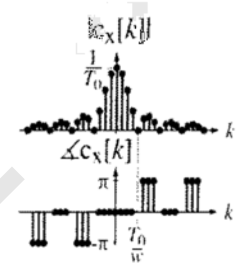


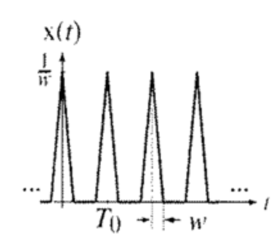
$$\delta_{T_0}(t) \xleftrightarrow[mT_0]{\mathcal{FS}} f_0 \delta_m[k]$$



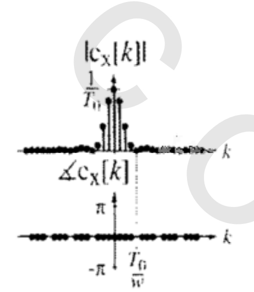


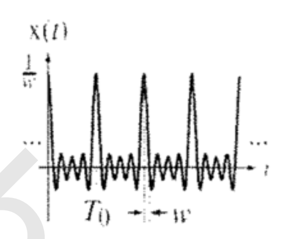
$$(1/w)\,\mathrm{rect}(t/w) * \delta_{T_0}(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{FS}} f_0\,\mathrm{sinc}(wkf_0)$$



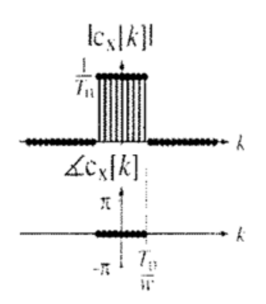


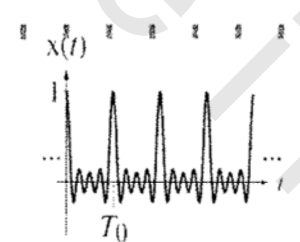
$$(1/w)\,\mathrm{tri}(t/w) * \delta_{T_0}(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{FS}} f_0\,\mathrm{sinc}^2(wkf_0)$$





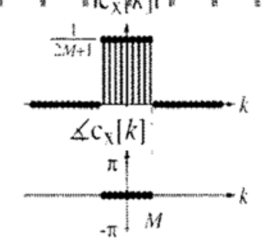
$$(1/w)\,\mathrm{sinc}(t/w) * \delta_{T_0}(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{FS}} f_0\,\mathrm{rect}(wkf_0)$$

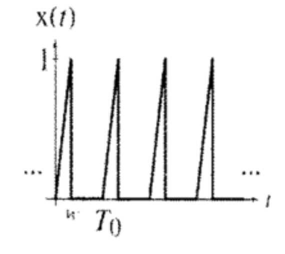




$$\mathrm{drcl}(f_0 t, 2M+1) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{FS}} \frac{\mathrm{u}[n+M] - \mathrm{u}[n-M-1]}{2M+1}$$

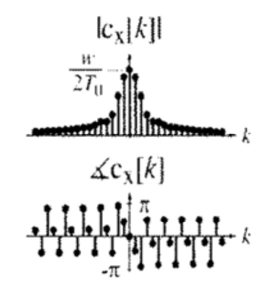
M an integer





$$\frac{t}{w}[\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-w)] * \delta_{T_0}(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{FS}}$$

$$\frac{1}{wT_0}\,\frac{[j(2\pi kw)/T_0 + 1]e^{-j(2\pi kw/T_0)} - 1}{(2\pi k/T_0)^2}$$

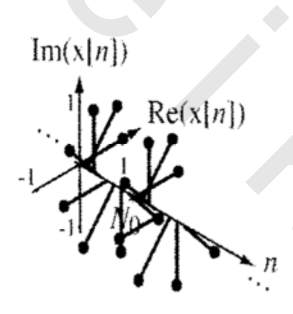


ملحق (ج) متوالية فروير للزمن المتقطع

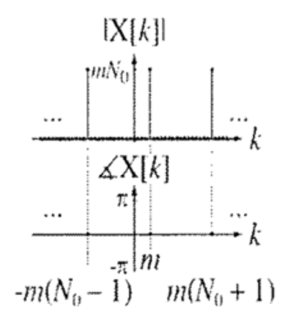
Discrete Fourier transform (DFT) for a periodic discrete-time function with fundamental period N_0 represented over the period N.

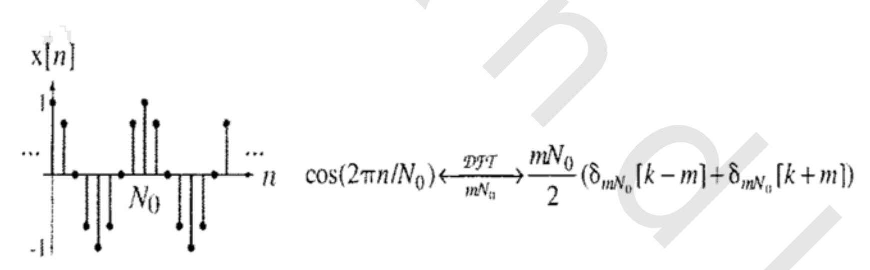
$$\mathrm{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} \mathrm{X}[k]e^{j2\pi kn/N} \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} \mathrm{X}[k] = \sum_{n=\langle N\rangle} \mathrm{x}[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

In all these pairs k, n, m, q, N_w, N_0, N, n_0 and n_1 are integers.

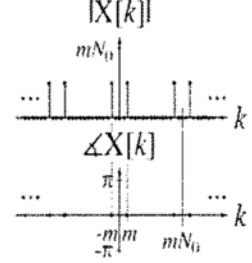


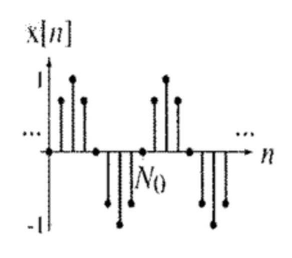
$$e^{j2\pi n/N_0} \xleftrightarrow[mN_0]{\mathcal{DFT}} mN_0\delta_{mN_0}[k-m]$$



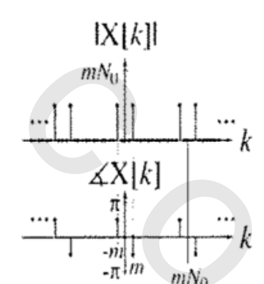


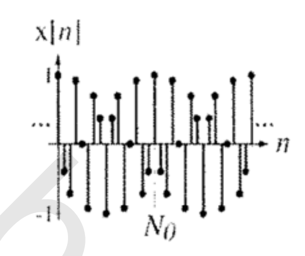
$$\cos(2\pi n/N_0) \xleftrightarrow[mN_0]{\mathcal{DFT}} \frac{mN_0}{2}(\delta_{mN_0}[k-m]+\delta_{mN_0}[k+m])$$



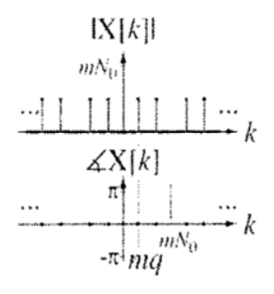


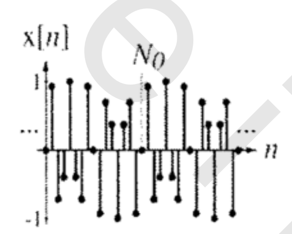
$$\sin(2\pi n/N_0) \xleftrightarrow[mN_0]{\mathcal{DFT}} \frac{jmN_0}{2}(\delta_{mN_0}[k+m]-\delta_{mN_0}[k-m])$$



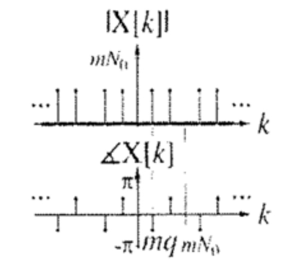


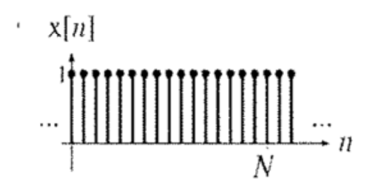
$$\cos(2\pi qn/N_0) \xleftrightarrow[mN_0]{\mathcal{DFT}} \frac{mN_0}{2}(\delta_{mN_0}[k-mq]+\delta_{mN_0}[k+mq])$$

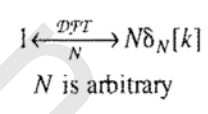




$$\sin(2\pi qn/N_0) \xleftrightarrow[mN_0]{\mathcal{DFT}} \frac{jmN_0}{2}(\delta_{mN_0}[k+mq]-\delta_{mN_0}[k-mq])$$

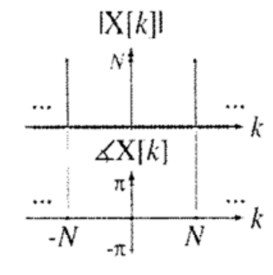


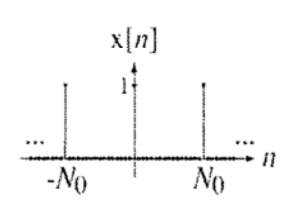




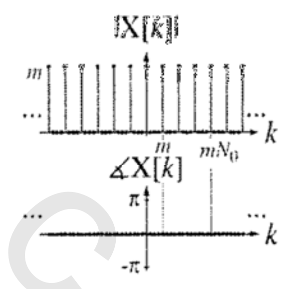
$$1 \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} N\delta_N[k]$$

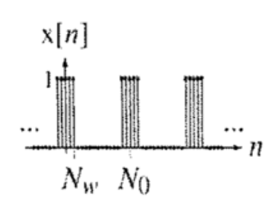
N is arbitrary





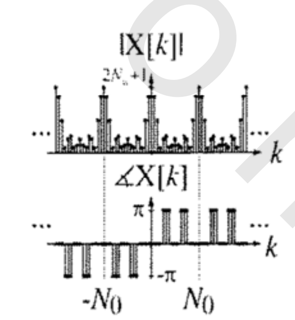
$$\delta_{N_0}[n] \xleftrightarrow[mN_0]{\mathcal{DFT}} m\delta_{mN_0}[k]$$

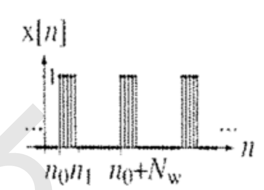




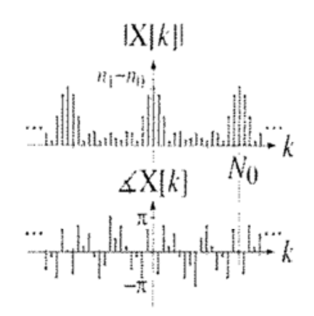
$$(\mathrm{u}[n+N_w]-\mathrm{u}[n-N_w-1]) * \delta_{N_0}[n] \xleftrightarrow[N_0]{\mathcal{DFT}} (2N_w+1)\,\mathrm{drcl}(k/N_0, 2N_w+1)$$

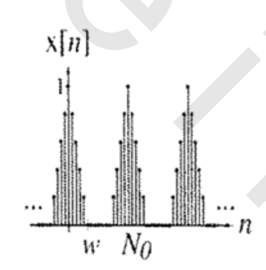
N_w an integer





$$(\mathrm{u}[n-n_0]-\mathrm{u}[n-n_1])*\delta_{N_0}[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_0}{\longleftrightarrow}}\frac{e^{-j\pi k(n_1+n_0)/N_0}}{e^{-j\pi k/N_0}}(n_1-n_0)\,\mathrm{drcl}(k/N_0,n_1-n_0)$$

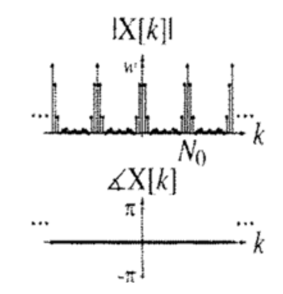


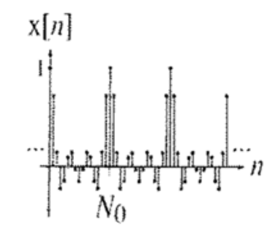


$$\mathrm{tri}(n/w)*\delta_{N_0}[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_0}{\longleftrightarrow}}w\,\mathrm{sinc}^2(wk/N_0)*\delta_{N_0}[k]$$

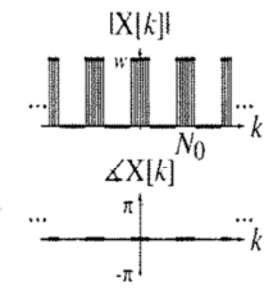
$$\mathrm{tri}(n/N_w)*\delta_{N_0}[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_0}{\longleftrightarrow}}N_w\,\mathrm{drcl}^2(k/N_0,N_w)$$

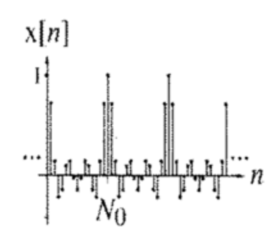
N_w an integer





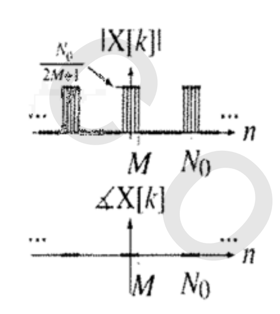
$$\mathrm{sinc}(n/w)*\delta_{N_0}[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_0}{\longleftrightarrow}}w\,\mathrm{rect}(wk/N_0)*\delta_{N_0}[k]$$





$$\mathrm{drcl}(n/N_0,2M+1)\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_0}{\longleftrightarrow}}\frac{\mathrm{u}[n+M]-\mathrm{u}[n-M-1]}{2M+1}*N_0\delta_{N_0}[k]$$

M an integer

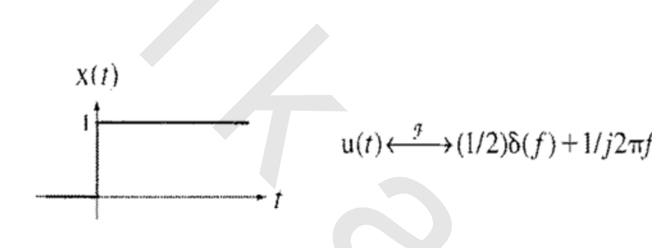


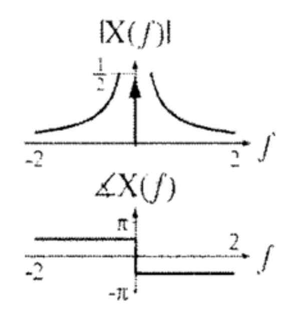
ملحق (د) تحويل فورير للزمن المستمر

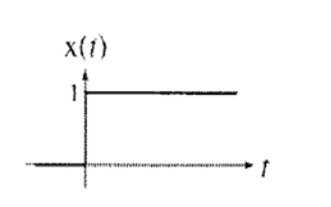
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{+j2\pi ft}\,df \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{+j\omega t}\,d\omega \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

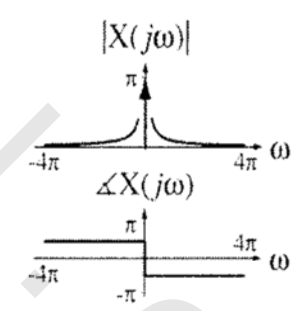
For all the periodic time functions, the fundamental period is $T_0 = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$.

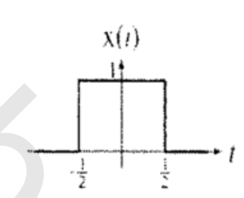






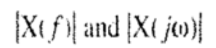
$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + 1/j\omega$$

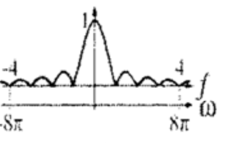


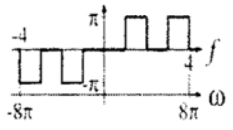


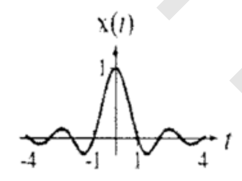
$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}(f)$$

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}(\omega/2\pi)$$



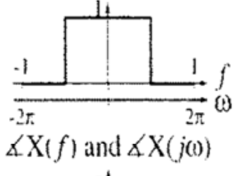


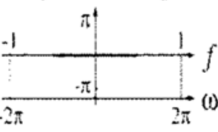


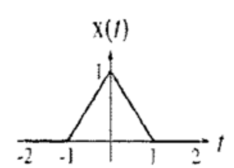


$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{rect}(f)$$

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{rect}(\omega/2\pi)$$

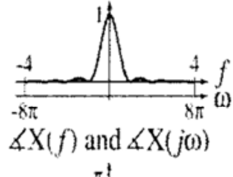


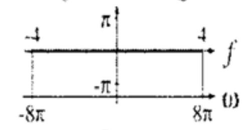


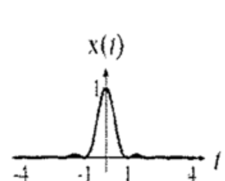


$$\text{tri}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}^2(f)$$

$$\text{tri}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}^2(\omega/2\pi)$$

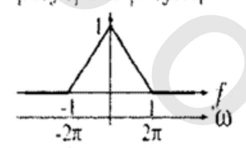


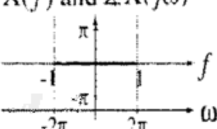


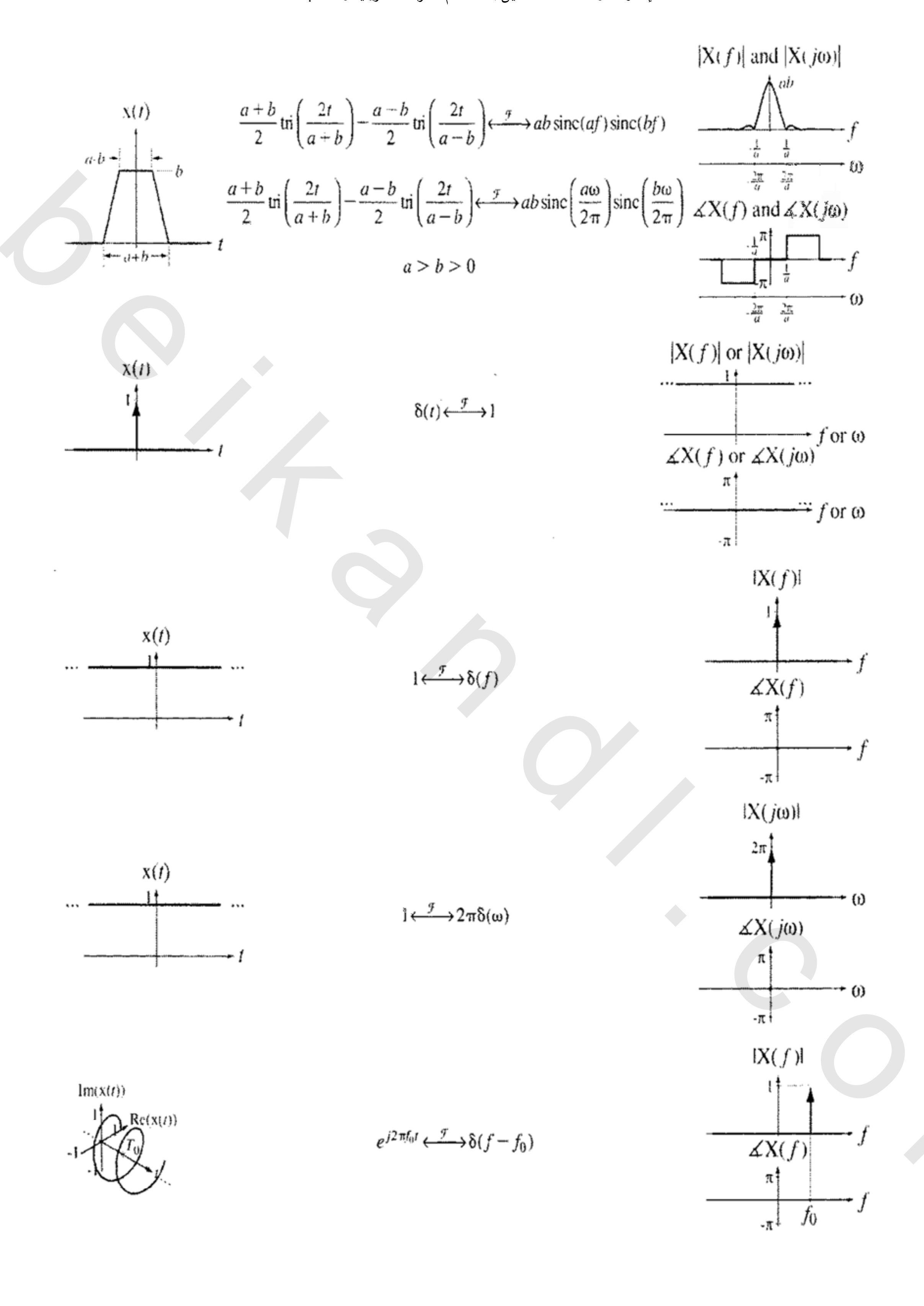


$$\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{tri}(f)$$

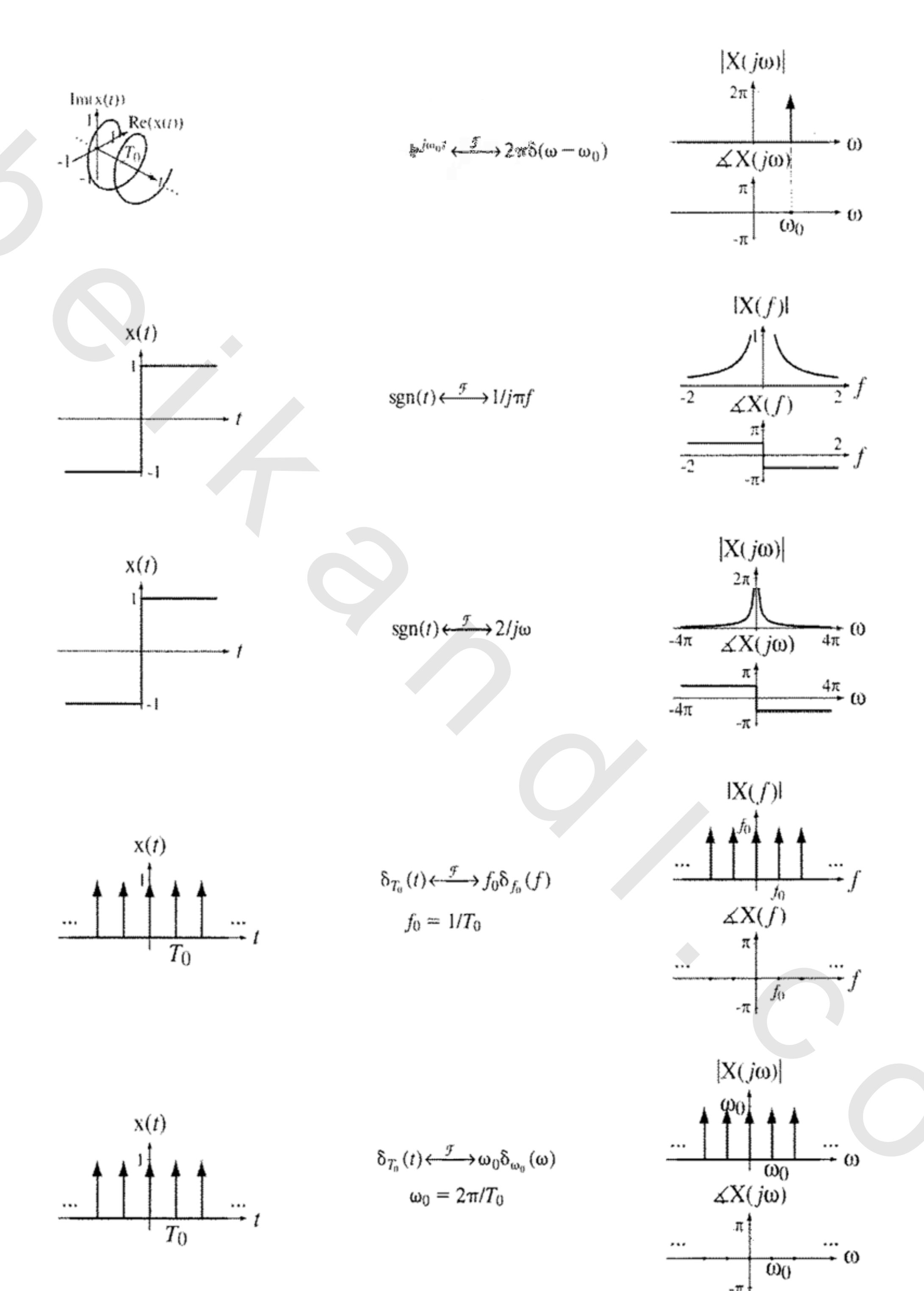
$$\text{sinc}^2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{tri}(\omega/2\pi)$$



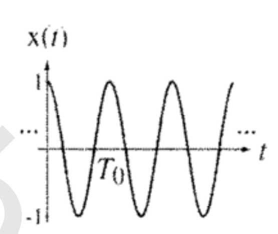




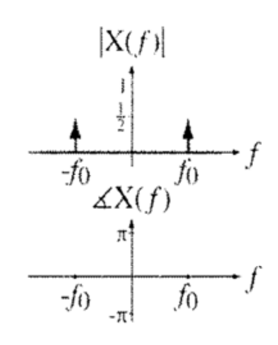
x(t)
a-b
b
a+b
t
$\frac{a+b}{2}\operatorname{tri}\left(\frac{2t}{a+b}\right)-\frac{a-b}{2}\operatorname{tri}\left(\frac{2t}{a-b}\right)\xleftrightarrow{\mathcal{F}} ab\operatorname{sinc}(af)\operatorname{sinc}(bf)$
$\frac{a+b}{2}\operatorname{tri}\left(\frac{2t}{a+b}\right)-\frac{a-b}{2}\operatorname{tri}\left(\frac{2t}{a-b}\right)\xleftrightarrow{\mathcal{F}} ab\operatorname{sinc}\left(\frac{a\omega}{2\pi}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{b\omega}{2\pi}\right)$
$a > b > 0$
|X(f)| and |X(jω)|
ab
∡X(f) and ∡X(jω)
$\delta(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$
|X(f)| or |X(jω)|
∡X(f) or ∡X(jω)
f or ω
$1\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\delta(f)$
|X(f)|
∡X(f)
$1\xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$
|X(jω)|
∡X(jω)
2π
Im(x(t))
Re(x(t))
T_0
$e^{j2\pi f_0 t}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\delta(f-f_0)$
f_0

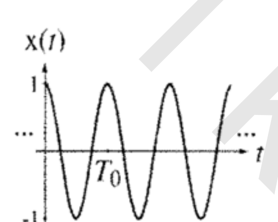


Im(x(t))
Re(x(t))
T_0
$e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
|X(jω)|
2π
∡X(jω)
π
-π
ω_0
ω
x(t)
t
$\text{sgn}(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1/j\pi f$
|X(f)|
∡X(f)
f
$\text{sgn}(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2/j\omega$
-4π
4π
$\delta_{T_0}(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} f_0\delta_{f_0}(f)$
$f_0 = 1/T_0$
f_0
T_0
$\delta_{T_0}(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$
$\omega_0 = 2\pi/T_0$

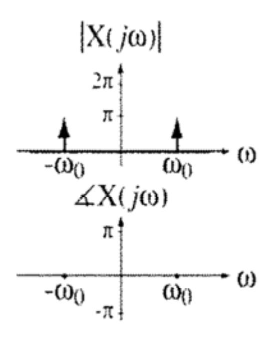


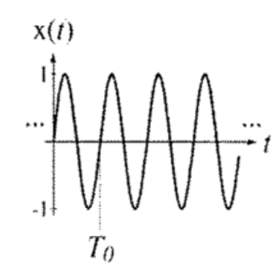
$$\cos(2\pi f_0 t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



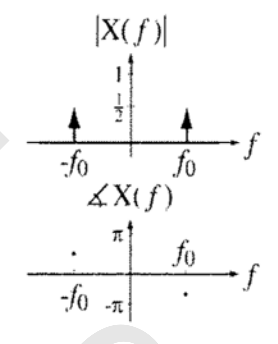


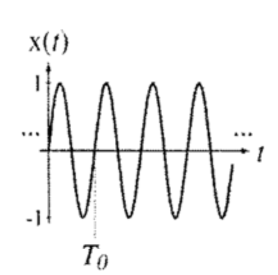
$$\cos(\omega_0 t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



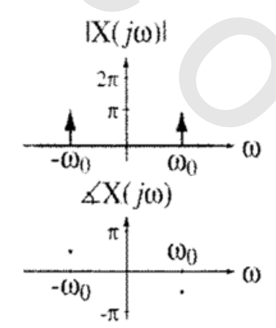


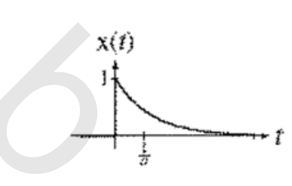
$$\sin(2\pi f_0 t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{j}{2}[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$





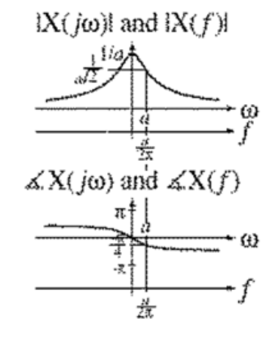
$$\sin(\omega_0 t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

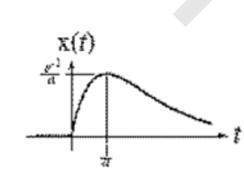




$$e^{-at}\,\mathrm{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega + a}, \quad \mathrm{Re}(a) > 0$$

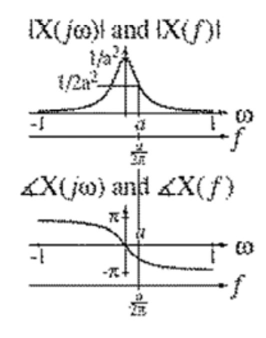
$$e^{-at}\,\mathrm{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j2\pi f + a}, \quad \mathrm{Re}(a) > 0$$

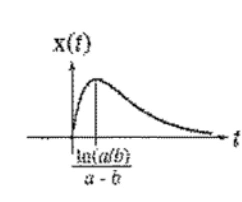




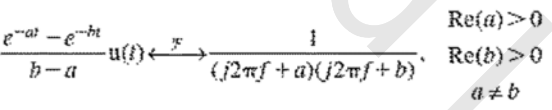
$$te^{-at}\,\mathrm{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(j\omega + a)^2}, \quad \mathrm{Re}(a) > 0$$

$$te^{-at}\,\mathrm{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(j2\pi f + a)^2}, \quad \mathrm{Re}(a) > 0$$

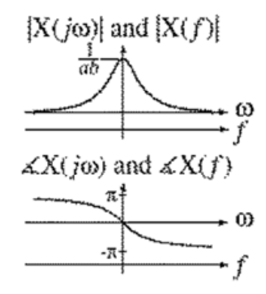


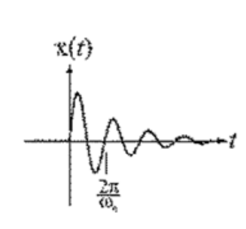


$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a}\,\mathrm{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(j\omega + a)(j\omega + b)}, \quad \mathrm{Re}(a) > 0,\ \mathrm{Re}(b) > 0,\ a \neq b$$



$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a}\,\mathrm{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(j2\pi f + a)(j2\pi f + b)}, \quad \mathrm{Re}(a) > 0,\ \mathrm{Re}(b) > 0,\ a \neq b$$

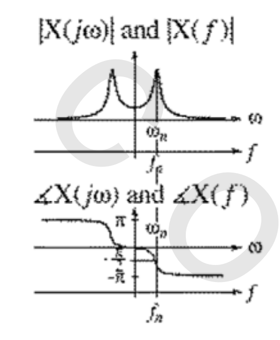


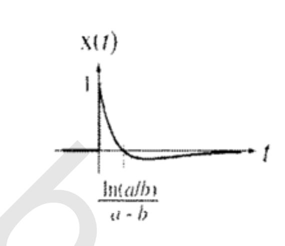


$$e^{-\alpha t}\sin(\omega_c t)\,\mathrm{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\omega_c}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_c^2}$$

$$e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)\mathrm{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\omega_c}{(j\omega)^2 + j\omega(2\zeta\omega_n) + \omega_n^2}$$

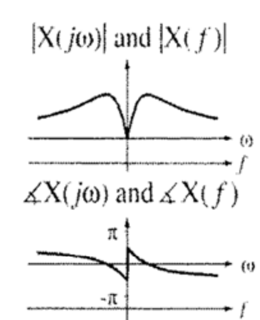
$$\left(\omega_c = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \alpha = \zeta\omega_n\right)$$

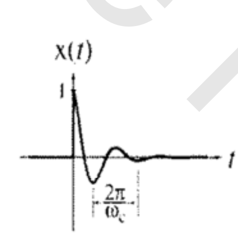




$$\frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b}\mathrm{u}(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{j\omega}{(j\omega+a)(j\omega+b)},\quad \mathrm{Re}(a)>0,\ \mathrm{Re}(b)>0,\ a\neq b$$

$$\frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b}\mathrm{u}(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{j2\pi f}{(j2\pi f+a)(j2\pi f+b)},\quad \mathrm{Re}(a)>0,\ \mathrm{Re}(b)>0,\ a\neq b$$

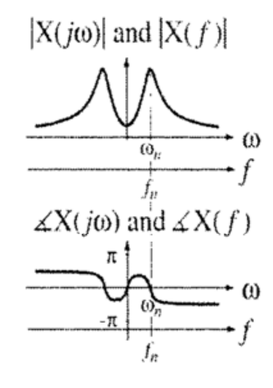


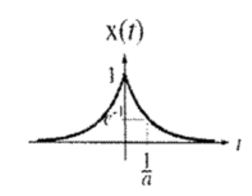


$$e^{-\alpha t}\cos(\omega_c t)\mathrm{u}(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{j\omega+\alpha}{(j\omega+\alpha)^2+\omega_c^2}$$

$$e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\mathrm{u}(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{j\omega+\zeta\omega_n}{(j\omega)^2+j\omega(2\zeta\omega_n)+\omega_n^2}$$

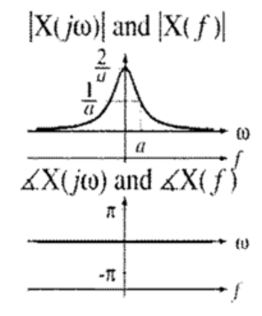
$$\left(\omega_c=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2},\ \ \alpha=\zeta\omega_n\right)$$

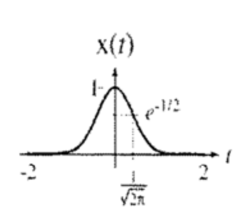




$$e^{-a|t|}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{2a}{\omega^2+a^2},\quad \mathrm{Re}(a)>0$$

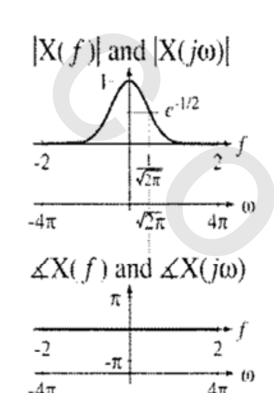
$$e^{-a|t|}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{2a}{(2\pi f)^2+a^2},\quad \mathrm{Re}(a)>0$$





$$e^{-\pi t^2}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}e^{-\pi f^2}$$

$$e^{-\pi t^2}\xleftrightarrow{\mathcal{F}}e^{-\omega^2/4\pi}$$

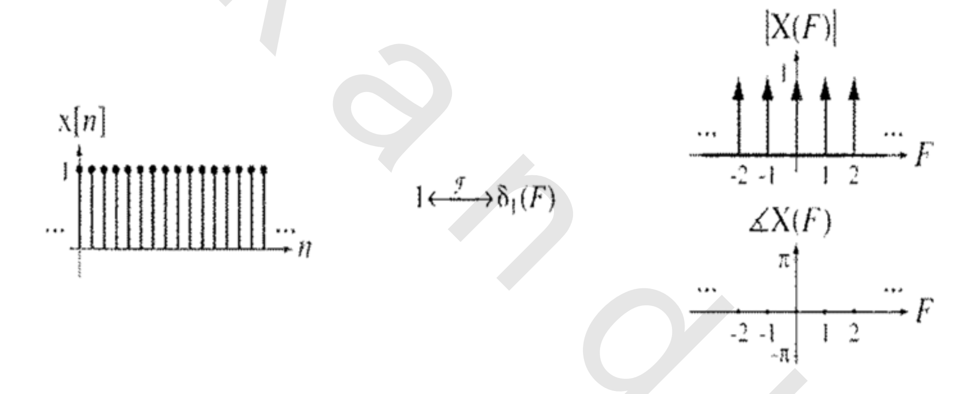


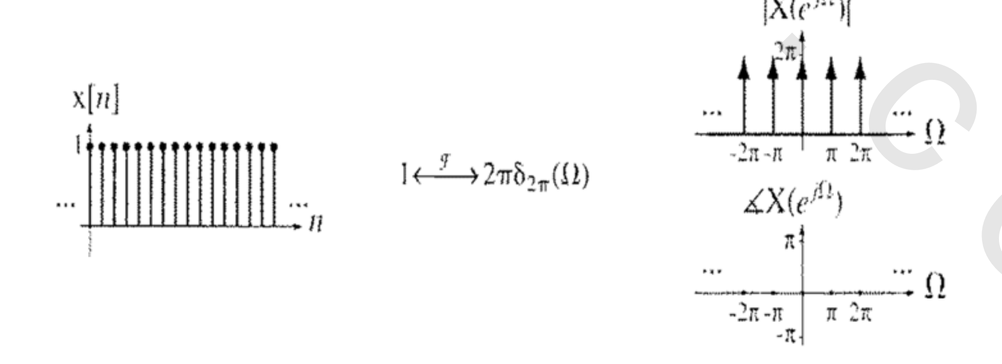
ملحق (هـ) تحويل فروير للزمن المتقطع

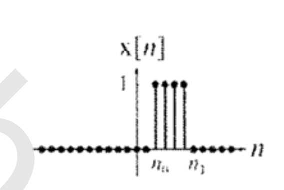
$$x[n] = \int_{1} X(F)e^{j2\pi Fn}\,dF \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\,d\Omega \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

For all the periodic time functions, the fundamental period is $N_0 = 1/F_0 = 2\pi/\Omega_0$. In all these pairs, n, N_W, N_0, n_0 and n_1 are integers.





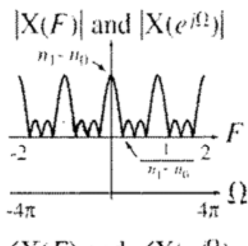


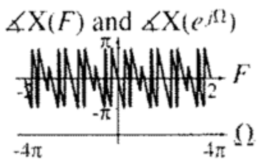
$$\mathrm{u}[n-n_0]-\mathrm{u}[n-n_1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$

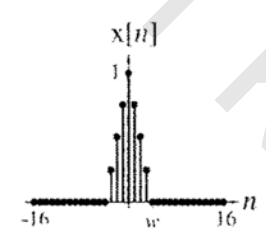
$$\frac{e^{-j\pi F(n_1+n_0)}}{e^{-j\pi F}}(n_1-n_0)\,\mathrm{drcl}(F,n_1-n_0)$$

$$\mathrm{u}[n-n_0]-\mathrm{u}[n-n_1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$

$$\frac{e^{-j\Omega(n_1+n_0)/2}}{e^{-j\Omega/2}}(n_1-n_0)\,\mathrm{drcl}\left(\frac{\Omega}{2\pi},n_1-n_0\right)$$

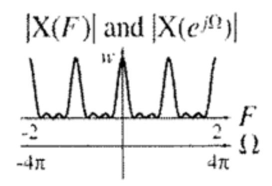


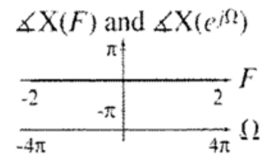


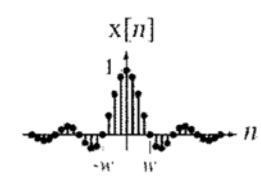


$$\mathrm{tri}(n/w) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} w\,\mathrm{drcl}^2(F,w)$$

$$\mathrm{tri}(n/w) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} w\,\mathrm{drcl}^2(\Omega/2\pi,w)$$

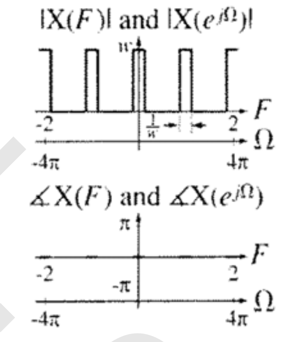


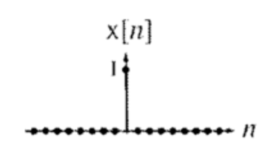




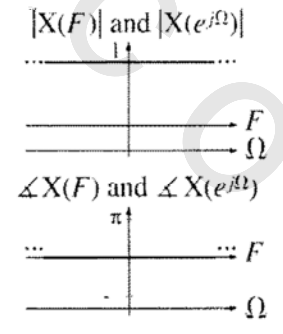
$$\mathrm{sinc}(n/w) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} w\,\mathrm{rect}(wF) * \delta_1(F)$$

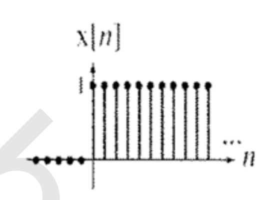
$$\mathrm{sinc}(n/w) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} w\,\mathrm{rect}(w\Omega/2\pi) * \delta_{2\pi}(\Omega)$$



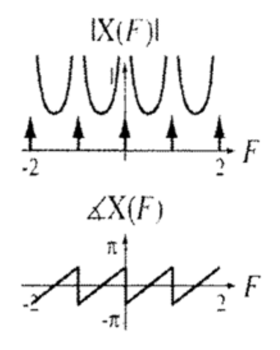


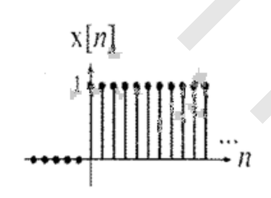
$$\delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$



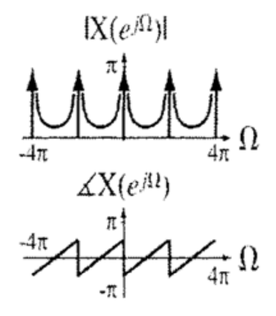


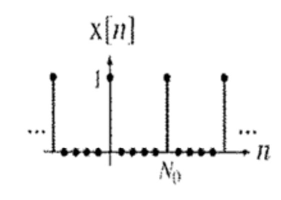
$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-e^{-j2\pi F}} + \frac{1}{2}\delta_1(F)$$



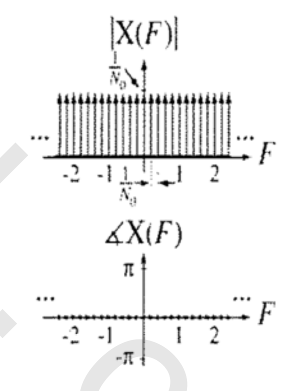


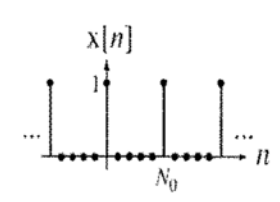
$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)$$



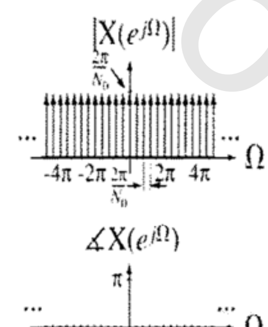


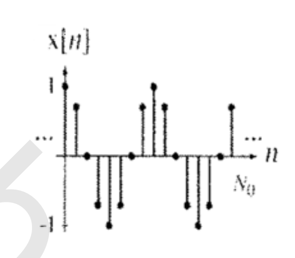
$$\delta_{N_0}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1/N_0)\delta_{1/N_0}(F) = F_0\delta_{F_0}(F)$$



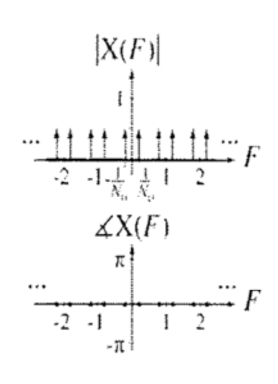


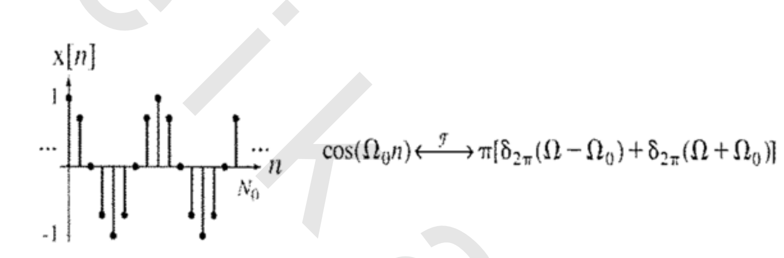
$$\delta_{N_0}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi/N_0)\delta_{2\pi/N_0}(\Omega) = \Omega_0\delta_{\Omega_0}(\Omega)$$



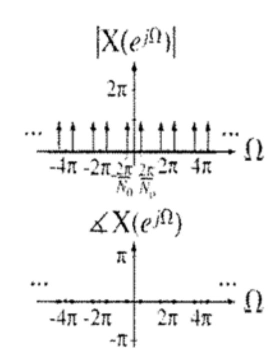


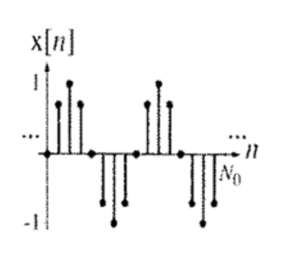
$$\cos(2\pi F_0 n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}[\delta_1(F - F_0) + \delta_1(F + F_0)]$$



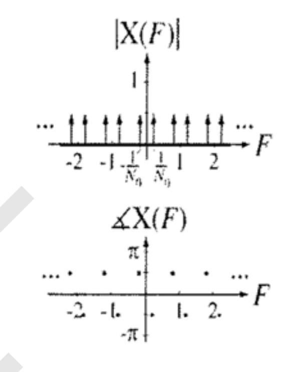


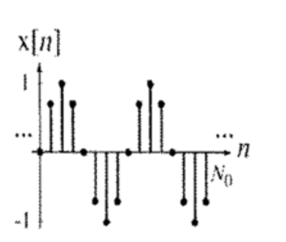
$$\cos(\Omega_0 n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi[\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)]$$



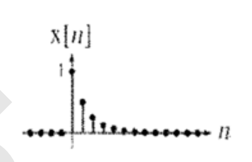


$$\sin(2\pi F_0 n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{j}{2}[\delta_1(F + F_0) - \delta_1(F - F_0)]$$



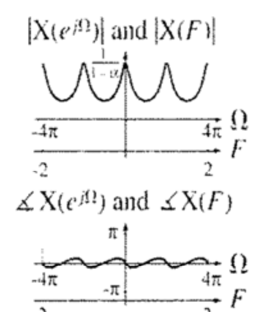


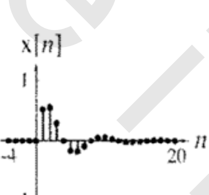
$$\sin(\Omega_0 n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\pi[\delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0) - \delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0)]$$

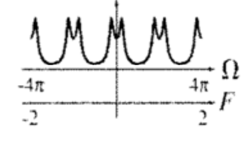


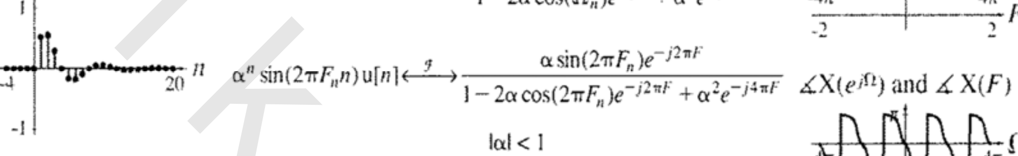
$$\alpha^n \, u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \quad , \quad |\alpha|<1$$

$$\alpha^n \, u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi F}}$$





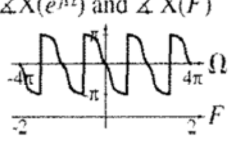


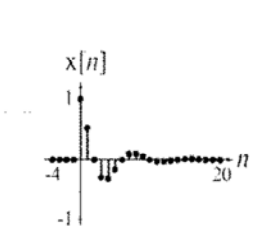


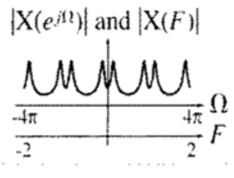
$$\alpha^n \sin(\Omega_n n)\, u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\alpha \sin(\Omega_n) e^{-j\Omega}}{1-2\alpha\cos(\Omega_n)e^{-j\Omega}+\alpha^2 e^{-j2\Omega}}$$

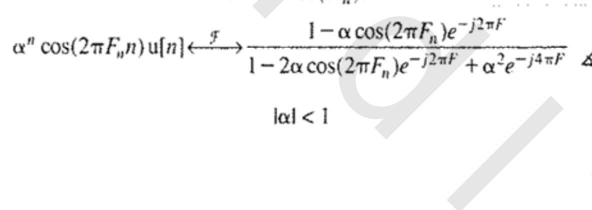
$$\alpha^n \sin(2\pi F_n n)\, u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\alpha \sin(2\pi F_n) e^{-j2\pi F}}{1-2\alpha\cos(2\pi F_n)e^{-j2\pi F}+\alpha^2 e^{-j4\pi F}}$$

$|\alpha| < 1$





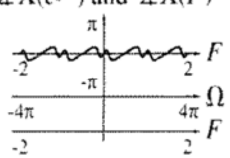


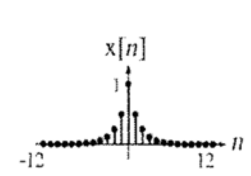


$$\alpha^n \cos(\Omega_n n)\, u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1-\alpha \cos(\Omega_n) e^{-j\Omega}}{1-2\alpha\cos(\Omega_n)e^{-j\Omega}+\alpha^2 e^{-j2\Omega}}$$

$$\alpha^n \cos(2\pi F_n n)\, u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1-\alpha \cos(2\pi F_n) e^{-j2\pi F}}{1-2\alpha\cos(2\pi F_n)e^{-j2\pi F}+\alpha^2 e^{-j4\pi F}}$$

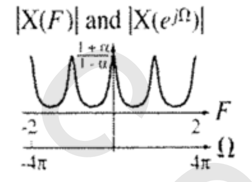
$|\alpha| < 1$

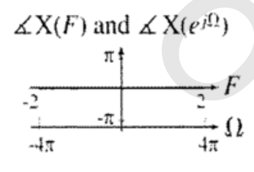




$$\alpha^{|n|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos(2\pi F)+\alpha^2} \quad , \quad |\alpha|<1$$

$$\alpha^{|n|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos(\Omega)+\alpha^2}$$





ملحق (و) جداول تحويل لابلاس

$$\delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1, \quad All\ s$$

$$u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}, \quad Re\ (s) > 0$$

$$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \dots u(t)}_{(n-1)\ convolutions} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^n}, \quad Re\ (s) > 0$$

$$t\, u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s^2}, \quad Re\ (s) > 0$$

$$e^{-\alpha t}\, u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad Re\ (s) > -\alpha$$

$$t^n\, u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad Re\ (s) > 0$$

$$te^{-\alpha t}\, u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{(s+\alpha)^2}, \quad Re\ (s) > -\alpha$$

$$t^n e^{-\alpha t}\, u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}, \quad Re\ (s) > -\alpha$$

$$\sin(\omega_0 t)\, u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2},\ Re\ (s) > 0$$

$$\cos(\omega_0 t)\, u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s}{s^2+\omega_0^2},\ Re\ (s) > 0$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{t}}\sin(\omega_c t)\, u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_c}{(s+\alpha)^2+\omega_c^2},\ Re\ (s) > -\alpha$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{t}}\cos(\omega_c t)\, u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_c^2},\ Re\ (s) > -\alpha$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{t}}\left[A\ \cos(\omega_c t) + \left(\frac{B-A\alpha}{\beta}\right)\sin(\omega_c t)\right] u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{As+B}{(s+\alpha)^2+\omega_c^2}$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha \mathrm{t}}\left[\sqrt{A^2 + \left(\frac{B-A\alpha}{\omega_c}\right)^2}\ cos\left(\omega_c t - \tan^{-1}\left(\frac{B-A\alpha}{A\omega_c}\right)\right)\right] u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{As+B}{(s+\alpha)^2+\omega_c^2}$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{c}}{2}\mathrm{t}}\left[A\, cos\sqrt{D - \left(\frac{c}{2}\right)^2 t} + \frac{2B-AC}{\sqrt{4D-C^2}} sin\left(\sqrt{D - \left(\frac{c}{2}\right)^2 t}\right)\right] u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{As+B}{s^2+Cs+D}$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{c}}{2}\mathrm{t}}\left[\sqrt{A^2 + \left(\frac{2B-AC}{\sqrt{4D-C^2}}\right)^2}\ cos\left(\sqrt{D - \left(\frac{c}{2}\right)^2 t} - \tan^{-1}\left(\frac{2B-AC}{A\sqrt{4D-C^2}}\right)\right)\right] u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{As+B}{s^2+Cs+D}$$

$$-u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}, \quad Re\ (s) < 0$$

$$-e^{\alpha t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad Re\ (s) < -\alpha$$

$$-t^n u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{s^n+1}, \quad Re\ (s) < 0$$

$$e^{-\alpha|t|} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s-\alpha}, \quad -\alpha < Re\ (s) < \alpha$$

$$rect(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{e^{-s/2} - e^{s/2}}{s}, All\ s$$

$$tri(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \left(\frac{e^{s/2} - e^{-s/2}}{s}\right)^2, All\ s$$

ملحق (ذ) تحويل أزواج زد

$\delta[n] \overset{z}{\leftrightarrow} 1,\ All\ z$

$u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}},\ |z| > 1$

$\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\ |z| > |\alpha|$

$nu[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2},\ |z| > 1$

$n^2 u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{1+z^{-1}}{z(1-z^{-1})},\ |z| > 1$

$n\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z\alpha}{(z-\alpha)^2} = \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2},\ |z| > |\alpha|$

$n^m \alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z^m \frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{z}{z-\alpha}\right),\ |z| > |\alpha$

$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}\alpha^{n-m}u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{(z-\alpha)^{m+1}}, |z| > |\alpha$

$\sin(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z \sin(\Omega_0)}{z^2-2z\cos(\Omega_0)+1} = \frac{\sin(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}, |z| > 1$

$\cos(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z\,[z-\cos(\Omega_0)]}{z^2-2z\cos(\Omega_0)+1} = \frac{1-\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}, |z| > 1$

$\alpha^n \sin(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z\alpha \sin(\Omega_0)}{z^2-2\alpha z\cos(\Omega_0)+\alpha^2} = \frac{\alpha\sin(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\alpha\cos(\Omega_0)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}, |z| > |\alpha|$

$\alpha^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z\,[z-\alpha\cos(\Omega_0)]}{z^2-2\alpha z\cos(\Omega_0)+\alpha^2} = \frac{1-\alpha\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\alpha\cos(\Omega_0)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}, |z| > |\alpha|$

$-u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}, |z| < 1$

$-\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha}, |z| < |\alpha|$

$-n\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}, |z| < |\alpha|$

$\alpha^{|n|} \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} - \frac{z}{z-1/\alpha}, |\alpha| < |z| < |1/\alpha|$



ثبت المصطلحات

أولاً: عربي – إنكليزي

أ

إثارة	excitations
إثارة أسية مركبة	complex exponential excitation
الإثارة الدورية	periodic excitation
أخذ العينات (العيننة)	sampling
إرسال الإشارة	signal transmission
الأرقام الثنائية	binary numbers
إزاحة	shifting
إزاحة التردد	frequency shifting
إزاحة في الفراغ	space shifting
ازدواج حراري	Thermocouples
ازدواجية الضرب والالتفاف	multiplication-convolution duality
استجابات	responses
استجابة الأذن البشرية للأصوات	human ear, response to sounds
استجابة التردد	frequency response
استجابة التوافق	harmonic response
استجابة جهدية	voltage response
استجابة الخطوة	step response

zero-input response	استجابة الدخل الصفري
impulse response	الاستجابة النبضية
natural response	الاستجابة الطبيعية
total system response	الاستجابة الكلية للنظام
parallel response	الاستجابة المتوازية
ADC response	استجابة المحول التماثلي الرقمي
truncated ideal impulse response	استجابة النبضة المثالية المقطوعة
system response	استجابة النظام
discrete-time system response	استجابة النظام لأنظمة الإشارات المتقطعة
transient response	الاستجابة الانتقالية
unbounded response	الاستجابة غير المحدودة
unit-step response	استجابة وحدة الخطوة
stability	الاستقرار
BIBO stability	استقرار البيبو ، استقرار الدخل المحدود والخرج المحدود
system stability	استقرار النظام
marginal stability	الاستقرار الهامشي
exponentials	الأسس
quantizing signals	إشارات التكمية
input signals	إشارات الدخل
periodic signals	الإشارات الدورية
energy signals	إشارات الطاقة
random signals	الإشارات العشوائية
standard signals	الإشارات القياسية
deterministic signal	الإشارات المحدودة
time limited signals	الإشارات المحدودة زمنياً
continuous signals	الإشارات المستمرة

continuous-time signals	الإشارات المستمرة زمنياً
left-sided signal	الإشارات اليسارية
aperiodic signals	الإشارات غير الدورية
bandlimited signals	الإشارات محدودة المجال
error signal	إشارة الخطأ
clipped signal	الإشارة المقصوصة
log-amplified signal	الإشارة المكبرة لوغاريتمياً
undersampled signal	إشارة تحت معدل العينة
signal reconstruction	إعادة تشكيل الإشارة
minimum sampling rate	أقل معدل لأخذ العينات (العينة)
Convolution	الالتفاف
periodic convolution	الالتفاف الدوري
numerical convolution	الالتفاف الرقمي
continuous-time numerical convolution	الالتفاف العددي المستمر زمنياً
aperiodic convolution	الالتفاف غير الدوري
zero padding	إلحاق الأصفار
electromagnetic energy propagation	انتشار الطاقة الكهرومغناطيسية
real systems	الأنظمة الحقيقية
distortionless system	الأنظمة الخالية من التشويه
nonlinear systems	الأنظمة الخطية
LTI systems	الأنظمة الخطية الثابتة زمنياً
first-order systems	أنظمة الدرجة الأولى
second-order systems	أنظمة الدرجة الثانية
physical systems	الأنظمة الطبيعية
mechanical systems	الأنظمة الميكانيكية
invertibility	الانعكاسية

ب

بتات الوقف	stop bits
البكسلات	pixels
تحقيق النظام	system realization
التحقيق (البناء)	realization
البندول	pendulum

ت

تتابع الوحدة	unit sequence
تتابع فورير	Fourier series
تتابع فورير الثلاثي المدمج	compact trigonometric Fourier series
تتابع فورير المركب المستمر زمنياً	complex CTFS
التجانس	homogeneity
التجميع	Superposition
تجميع الإشارات	acquisition of signals
التحجيم	Scaling
التحجيم الترددي	frequency scaling
التحجيم المقداري	amplitude scaling
تحليل الدوائر	circuit analysis
تحليل الكسور الجزيئية	partial-fraction expansion
تحليل نظام الاتصالات	communication system analysis
التحويل	transformation
التحويل ثنائي الخطية	bilinear transformation
تحويل زد	*z* transform
تحويل زد العكسي	inverse *z* transform
تحويل زد المتوافق	matched-*z* transform
تحويل زد ثنائي الخطية	bilinear *z* transform

تحويل فورير	Fourier transform
تحويل فورير الأزمنة المتقطعة الأمامي والعكسي	forward and inverse discrete-time Fourier transforms
تحويل فورير السريع	fast Fourier transform (FFT)
تحويل فورير العام	generalized Fourier transform
تحويل فورير المتقطع	DFT (discrete Fourier transform),
تحويل فورير المتقطع العكسي	inverse DFT
تحويل فورير المستمر زمنياً	continuous-time Fourier transform
تحويل فورير للأزمنة المتقطعة العكسي	inverse DTFT
تحويل لابلاس	Laplace transform
تحويل لابلاس أحادي الجانب	unilateral Laplace transform
تحويل لابلاس ثنائي الاتجاه	bilateral Laplace transform
تحويل لابلاس ثنائي الجنب	two-sided Laplace transform,
تحويلات المرشحات	filter transformations
تحويلات زد الأمامية والعكسية	forward and inverse *z* transforms
تحويلات لابلاس الأمامية والعكسية	forward and inverse Laplace transforms
تخطي التعديل	over modulation
تخفيض عملية أخذ العينات	sampling Down
التخلص من الضوضاء	noise removal
التداخل	interference
التدريج اللوغاريتمي	logarithmic scale
التراسل غير المتزامن	asynchronous transmission
التراكم	accumulation
التردد	frequency
تردد الراديو	radio frequency
التردد الدوري الأساسي	fundamental cyclic frequency
التردد الركني	corner frequency

التردد الرنيني	resonant frequency
التردد الزاوي	radian frequency
التردد الزاوي الأساسي	fundamental radian frequency
التردد الزاوي الطبيعي	natural radian frequency
التردد اللحظي	instantaneous frequency
تردد نيكويست	Nyquist frequency
الترددات الضوئية	light oscillation
الترميم (الإستيفاء)	interpolation
الإستيفاء المثالي	ideal interpolation
التزوير	aliasing
التسريب	leakage
الترميز (التشفير)	encoding
التشويه	distortion
التشويه التوافقي الكلي	total harmonic distortion
تشويه تعدد المسارات	multipath distortion
تصميم المرشح FIR المثالي	optimal FIR filter design
التصميم بالفروق المحددة	finite difference design
تصنيفات المرشحات	filter classifications
التعامد	Orthogonality
التعدد الزمني	time multiplexing
التعديل	modulation
التعديل الترددي	FM (frequency modulation)
التعديل الترددي الضيق المجال	narrowband FM
التعديل المقداري	amplitude modulation
التعديل ثنائية الجانب مع قمع الموجة الحاملة	double –sideband suppressed carrier
التعديل والكشف التماثلي	analog modulation and demodulation

التعدد الترددي	frequency multiplexing
التغذية العكسية	feedback
التغذية العكسية السالبة	negative feedback
تغيرات الضغط الجوي	air pressure variations
التفاضل	differentiation
التفاضلات	derivatives
التقارب	donvergence
تقريب الفروق المركزية	central difference approximation
التقسيم	decimation
التكامل التراكمي	cumulative integral
التكامل الرقي	numerical integration
التكامل الرمزي	symbolic integration
التكامل المحدود	definite integral
التكامل غير المحدود	indefinite integral
التكاملات	integrals
تكبير الجهد	voltage gain
التكميم	quantization
التمدد الزمني	time expansion
تواجد محول زد	existence of *z* transform
التوصيل المتوالي	cascade connection
توصيلات الأنظمة	system connections
التوصيلات المتوازية	parallel connections
تيار الملف	inductor current

ث

ثابت الزمن	time constant
الثبات الزمني	time invariance

الثبات الصدمي	impulse invariance

ج

الجزء التربيعي	quadrature part
الجسم البشري كنظام	human body as a system
جيب التمام السببي	causal cosine
الحالة المباشرة II	Direct Form II

ح

حالة تحت الإخماد (الكبح)	underdamped case
حالة تخطي الكبح	overdamped case
الحساب الرقمي	numerical computation
الحساس أو المستشعر	sensor

خ

خاصية الإزاحة الزمنية	time shifting property
خاصية التحجيم الزمني	time-scaling property
خاصية العكس الزمني	time reversal property
خطأ الحالة المستقرة	steady-state error
خطوط التقارب	asymptotes
خواص تحويل زد	*z*-transform properties

د

دالة دايراك	dirict function
دالة الإشارة	signum function
الدالة التوافقية	harmonic function
الدالة الخطية التصاعدية	ramp function
دالة الدفع	forcing function
دالة سنك	sinc function

English	العربية
transfer function	دالة العبور
biquadratic transfer function	دالة العبور ثنائية التعبير
rational function	الدالة الكسرية
eigenfunction	الدالة المميزة
window function	دالة النافذة
unit function	دالة الوحدة
point spread function	دالة انتشار النقطة
Bessel function	دالة بيسيل
Kronecker delta function	دالة دلتا لكرونوكر
loop transfer function	دالة عبور الحلقة
bandpass-filter transfer function	دالة عبور المرشح المنفذ لمجال ترددي
Bartlett window function	دالة نافذة بارتليت
Blackman window function	دالة نافذة بلاكمان
Kaiser window function	دالة نافذة كيزر
Hamming window function	دالة نافذة هامنج
hanning (von Hann) window function	دالة نافذة هاننج
RLC circuit	دائرة RLC
numerical integration functions	دوال التكامل العددي
CTFS harmonic function	الدوال التوافقية لتتابع فورير المستمر زمنياً
periodic functions	الدوال الدورية
graphing function	دوال الرسم
discrete-time functions	دوال الزمن المتقطع
even and odd functions	الدوال الزوجية والفردية
causal functions	الدوال السببية
odd functions	الدوال الفردية
discontinuous function	الدوال غير المتصلة

الديسبل	decibel

ر

رفع معدل أخذ العينة (العيننة)	Upsampling
الرنين غير المخمد	undamped resonance

ز

الزمن المتقطع	discrete time
زوج تحويل فورير المستمر زمنياً	CTFT pairs

ش

شدة الصدمة	strength, of an impulse
الشفرة	code
الشكل الأسي المتناقص	decaying exponential shape
شيبيشيف	Chebyshev

ص

الصوت	sound
الصوت المنطوق	voiced sound

ض

ضغط التردد	frequency compression
ضغط الزمن	time compression
الضوضاء	noise

ط

طاقة الإشارة	signal energy
طاقة الإشارة السببية	causal energy signal
الطاقة الصوتية	acoustic energy
الطاقة غير المحدودة	infinite energy
طرق النطاق الزمني	time-domain methods

طرق معالجة الصور	image-processing techniques
الطور	phase
الطول الموجي	Wavelength
طيف التعديل الترددي عريض المجال	wideband FM spectrum

ظ

ظاهرة جيبس	Gibbs phenomenon

ع

عدم الاستقرار	instability
عرض المجال	bandwidth
عرض المجال الصفري	null bandwidth
عرض المجال المطلق	absolute bandwidth
عرض مجال نصف القدرة	half-power bandwidth
علاقات الجهد والتيار الحسابية	mathematical voltage-current relations
العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس	*z*-transform-Laplace-transform relationships
العلاقة بين تحويل فورير للإشارات المتقطعة زمنياً وتحويل فورير المتقطع زمنياً	CTFT-DFT relationship
معامل الالتفاف	convolution operator
العودية أو التكرار	Recursion
مسك العينة	sample-and-hold
العينتة المنتظمة	uniform sampling

ف

الفروق الأمامية	forward difference
الفروق العكسية	backward difference
الفصوص الجانبية	side lobes

ق

voltage divider	القاسم الجهدي
greatest common divisor	القاسم المشترك الأكبر (الأعظم)
Ohm's law	قانون أوم
signal power	قدرة الإشارة
Cramer's rule	قانون كريمر
Kirchhoff's voltage law,	قانون كيرتشوف للجهد
L'Hôpital's rule	قانون لوبيتال
audio compact disk	القرص السمعي المدمج
impulse train	قطار نبضات
one-finite-pole	القطب الوحيد المحدد
diagonalization	القطرية
difference equation	القطرية
channels	القنوات
value	القيمة

ك

attenuation	الاضمحلال
critical damping	الكبح الحرج
energy spectral density	كثافة طيف الطاقة
power spectral density	كثافة طيف القدرة
gain	الكسب
demodulation	فك التعديل
envelope detector	الكشف الغلافي
synchronous demodulation	الكشف المتزامن
phase detector	الكشف عن الطور
American Standard Code for Information Interchange (ASCII)	الكود الأمريكي القياسي لتبادل المعلومات

م

مبدأ عدم التيقن	uncertainty principle
متجه المتبقي	residues vector
متجهات القاعدة المتعامدة	orthogonal basis vectors
المتغير المستقل	independent variable
المتغيرات المكانية	spatial variables
المتغيرات المستقلة المستمرة	continuous independent variables
مجال الدالة	domain of a function
مجال المرور	passband,
مجال الوقف	Stopbands
مجال القاعدة	baseband
المحاكاة الرقمية	digital simulation
المحل الجذري	root locus
المحل الهندسي المتمم	complementary root locus
المحلل الطيفي	spectrum analyzer
المحول التماثلي الرقمي	analog-to-digital converter
المحول الرقمي التماثلي	digital-to-analog converter (DAC),
مخطط الأقطاب والأصفار	pole-zero diagrams,
مخطط بود	Bode plot
مخطط بود الطوري	phase Bode diagram
المخططات اللوغاريتمية	logarithmic graphs
مخططات بود للمقدار	magnitude Bode diagrams
مدى الدالة	range, of a function
المذبذب الموضعي	local oscillator
المرسل	Transmitter
المرشح RC	*RC* filter

Butterworth filters	مرشحات بتروث
Elliptic filter	المرشح البيضاوي
analog filters	المرشح التماثلي
smoothing filter	مرشح التنعيم
digital filters	المرشح الرقمي
unstable digital filter	المرشح الرقمي غير المستقر
moving-average digital filter	مرشح المتوسط المتحرك الرقي
ideal bandpass filter	المرشح المثالي المنفذ لمجال من الترددات
anti-aliasing filter	المرشح المضاد للتزوير
multiple bandstop filter	المرشح المعوق للعديد من المجالات
bandstop filter	المرشح المعوق لمجال ترددي
constant-K bandpass filter	المرشح المنفذ لمجال ترددي ثابت الـ k
Butterworth filters	مرشح بترورث
maximally flat Butterworth filter	مرشح بترورث الأعظم استواء
lowpass Butterworth filter	مرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة
bandpass Butterworth analog filter	مرشح تماثلي بترورث منفذ لمجال ترددي
bandpass Butterworth digital filter	مرشح رقي بترورث منفذ لمجال ترددي
type-one Chebyshev filter	مرشح شيبيشيف من النوع واحد
noncausal filter	المرشح غير السببي
noninverting amplifier	المرشح غير العاكس
bandpass discrete-time filter	مرشح متقطع زمنياً منفذ لمجال ترددي
filters	المرشحات
FIR filters	مرشحات استجابة النبضة المحددة
IIR filters	مرشحات استجابة النبضة غير المحدودة
digital filters	المرشحات الرقمية
practical filters	المرشحات العملية

المرشحات الفعالة	active filters
المرشحات الفعالة المنفذة للترددات العالية	highpass active filters
المرشحات الفعالة المنفذة للترددات المرتفعة	active highpass filter
المرشحات المثالية	ideal filters
المرشحات المستمرة زمنياً	continuous-time filters
مرشحات بترورث المستمرة زمنياً	continuous-time Butterworth filters
المرشحات غير الفعالة	passive filters
المسار	trajectory
مسارات التغذية الأمامية	feed forward paths
المستقبل	receiver
مستوي الماء	water level
مصفوفة دالة العبور	matrix transfer function
المصنع	plant
المضاعف التماثلي	analog multiplier
المعادلات التفاضلية	differential equations
معادل الرسم أو الشكل	graphic equalizer
معادلات النظام	system equations
معادلة الحركة	equation of motion
الفرقية والتراكم	differencing and accumulation
المعالجة الرقمية للإشارات	digital signal processing
المعالجة الرقمية للصور	digital image processing
معامل الإضمحلال	damping factor
المعاوقة	impedance
معدل أخذ العينات	sampling rate
المعلومات المساحية العالية التردد	high-spatial-frequency information
المفاهيم النوعية	qualitative concepts

مقدار الطيف	magnitude spectrum
مقدار تعديل النبضة	pulse amplitude modulation
المكامل الفعال	active integrator
المكبر	amplifier
المكبر السمعي	audio amplifier
مكبر العكس	inverting amplifier
مكبر العمليات المثالي	ideal operational amplifier
مكبرات العمليات	operational amplifiers
المكثفات	capacitors
منطقة التقارب	region of convergence
الموجة الحاملة	carrier
الموجة الحاملة المخمدة	suppressed carrier
الموجة المربعة	square wave
موحد الموجة الكاملة	full-wave rectifier

ن

ساعة	clock
النبضات المثلثة	triangular pulses
النبضات المربعة	rectangular pulses
النبضة المستطيلة أحادية المساحة	unit-area rectangular pulse
نسبة الإشارة للضوضاء	signal-to-noise ratio
النصف الأيمن من المستوي	right half-plane
نطاق s	*s*-domain
نطاق التردد	frequency domain
نظام الاتصالات بالأقمار الصناعية	satellite communication system
نظام الأذن — المخ	ear-brain system
نظام التجهيز	instrumentation system

home-entertainment audio system	نظام التسلية السمعي المنزلي
equalization system	نظام التعادل
unity-gain feedback systems	نظام التغذية العكسية أحادي الكسب
electromechanical feedback system,	نظام التغذية العكسية الكهروميكانيكي
closed-loop system	نظام الحلقة المغلقة
open loop system	نظام الحلقة المفتوحة
linear system	النظام الخطي
linear time-invariant system	النظام الخطي الثابت زمنياً
single-input single-output system	نظام الدخل الأحادي والخرج الأحادي
two-input two-output system	نظام الدخلين والخرجين
dynamic system	النظام الديناميكي
static system	النظام الساكن
public address system	نظام العنوان العام
invertible system	النظام القابل للعكس
one-pole system	نظام القطب الواحد
two-pole system	نظام القطبين
two-finite pole system	نظام القطبين المحددين
homogeneous system	النظام المتجانس
bounded-input-bounded-output (BIBO) stable system	النظام المستقر محدود الدخل ومحدود الخرج
fluid-mechanical system	نظام الموائع الميكانيكية
type 0 system	نظام النوع الصفري
underdamped system	نظام تحت الكبح
automobile suspension system	نظام تعليق السيارة
inhomogeneous system	النظام غير المتجانس
oscillator feedback system	نظام مذبذبات التغذية العكسية
linear algebra theory	نظرية الجبر الخطي

نظرية القيمة الابتدائية	initial value theorem
نظرية القيمة النهائية	final value theorem
نظرية بارسيفال	Parseval’s theorem
وصلة التجميع	summing junction
النموذج الحسابي	mathematical model
نموذج لوحة الشطرنج	checkerboard pattern
النوفذة	windowing

و

وحدة الانحدار	Unit ramp
وحدة النبضة	Unit impulse

ثانياً: إنكليزي – عربي

A

absolute bandwidth	عرض المجال المطلق
accumulation	التراكم
acoustic energy	الطاقة الصوتية
acquisition of signals	تجميع أو قراءة الإشارات
active filters	المرشحات الفعالة
active highpass filter	المرشحات الفعالة المنفذة للترددات المرتفعة
active integrator	المكامل الفعال
ADC response	استجابة المحول التماثلي الرقي
air pressure variations	تغيرات الضغط الجوي
aliasing	التزوير (الصور المستعارة)
American Standard Code for Information Interchange (ASCII)	الكود الأمريكي القياسي لتبادل المعلومات
amplifier	المكبر
amplitude modulation	التعديل المقداري
amplitude scaling	التحجيم المقداري
analog filters	المرشح التماثلي
analog modulation and demodulation	التعديل والكشف التماثلي
analog multiplier	المضاعف التماثلي
analog-to-digital converter	المحول التماثلي إلى الرقمي
anti-aliasing filter	المرشح المضاد للتزوير
aperiodic convolution	الالتفاف غير الدوري
aperiodic signals	الإشارات غير الدورية
asymptotes	خطوط التقارب
asynchronous transmission	التراسل غير المتزامن
attenuation	الاضمحلال

audio amplifier	المكبر السمعي
audio compact disk	القرص السمعي المدمج
automobile suspension system	نظام تعليق السيارة

B

backward difference	الفروق العكسية
bandlimited signals	الإشارات محدودة المجال
bandpass Butterworth analog filter	مرشح تماثلي بترورث منفذ لمجال ترددي
bandpass Butterworth digital filter	مرشح رقمي بترورث منفذ لمجال ترددي
bandpass discrete-time filter	مرشح متقطع زمنياً منفذ لمجال ترددي
bandpass-filter transfer function	دالة عبور المرشح المنفذ لمجال ترددي
bandstop filter	المرشح المعوق لمجال ترددي
bandwidth	عرض المجال
baseband	مجال القاعدة
Bartlett window function	دالة نافذة بارتليت
Bessel function	دالة بيسيل
BIBO stability	استقرار البيبو ، استقرار الدخل المحدود والخرج المحدود
bilateral Laplace transform	تحويل لابلاس ثنائي الاتجاه
bilinear transformation	التحويل ثنائي الخطية
bilinear *z* transform	تحويل زد ثنائي الخطية
binary numbers	الأرقام الثنائية
biquadratic transfer function,	دالة العبور ثنائية التعبير
Blackman window function	دالة نافذة بلاكمان
Bode plot	مخطط بود
bounded-input-bounded-output (BIBO) stable system	النظام المستقر محدود الدخل ومحدود الخرج
Butterworth filters	مرشحات بترورث

C

capacitors	المكثفات

carrier	الموجة الحاملة
cascade connection	التوصيل المتوالي
causal cosine	جيب التمام السببي
causal energy signal	طاقة الإشارة السببية
causal functions	الدوال السببية
causality	السببية
central difference approximation	تقريب الفروق المركزية
channels	القنوات
Chebyshev	شيبيشيف
checkerboard pattern	نموذج لوحة الشطرنج
circuit analysis	تحليل الدوائر
clipped signal	الإشارة المقصوصة
clock	الساعة
closed-loop system	نظام الحلقة المغلقة
code	الكود
communication system analysis	تحليل نظام الاتصالات
compact trigonometric Fourier series	تتابع فورير الثلاثي المدمج
complementary root locus	المحل الهندسي المتمم
complex CTFS	تتابع فورير المركب المستمر زمنياً
complex exponential excitation	الإثارة الأسية المركبة
constant-K bandpass filter	المرشح المنفذ لمجال ترددي ثابت الـ k
continuous independent variables	المتغيرات المستقلة المستمرة
continuous signals	الإشارات المستمرة
continuous-time Butterworth filters	مرشحات بترورث المستمرة زمنياً
continuous-time filters	المرشحات المستمرة زمنياً
continuous-time Fourier transform	تحويل فورير المستمر زمنياً

continuous-time numerical convolution	الالتفاف العددي المستمر زمنياً
continuous-time signals	الإشارات المستمرة زمنياً
Convergence	التقارب
Convolution	الالتفاف
convolution operator	عملية الالتفاف
corner frequency	التردد الركني
Cramer's rule	قانون كريمر
critical damping	الكبح الحرج
CTFS harmonic function	الدوال التوافقية لتتابع فورير المستمر زمنياً
CTFT pairs	زوج تحويل فورير المستمر زمنياً
CTFT-DFT relationship	العلاقة بين تحويل فورير للإشارات المتقطعة زمنياً وتحويل فورير المتقطع زمنياً
cumulative integral	التكامل التراكمي

D

damping factor	معامل الكبح
decaying exponential shape	الشكل الأسي المتناقص
decibel	الديسبل
decimation	التقسيم
definite integral	التكامل المحدود
demodulation	الكشف ، أو فك التعديل
derivatives	التفاضلات
deterministic signal	الإشارات المحددة
DFT (discrete Fourier transform)	تحويل فورير المتقطع
diagonalization	القطرية
difference equation	المعادلات التفاضلية
differencing and accumulation	المعادلة الفرقية

differential equations	الفرق والتراكم
Differentiation	التفاضل
digital filters	المرشح الرقمي
digital image processing	المعالجة الرقمية للصور
digital signal processing	المعالجة الرقمية للإشارات
digital simulation	المحاكاة الرقمية
digital filters	المرشحات الرقمية
digital-to-analog converter (DAC)	المحول الرقمي إلى التماثلي
Direct Form II	الحالة المباشرة II
diric function	دالة دايراك
discontinuous function	الدوال غير المتصلة
discrete time	الزمن المتقطع
discrete-time functions	دوال الزمن المتقطع
discrete-time system response	استجابة النظام لأنظمة الإشارات المتقطعة
distortion	التشويه
distortionless system	الأنظمة الخالية من التشويه
domain, of a function	مجال الدالة
double –sideband suppressed carrier	التعديل ثنائية الجانب مع قمع الموجة الحاملة
downsampling	تخفيض عملية أخذ العينات
dynamic system	النظام الديناميكي

E

ear-brain system	نظام الأذن – المخ
eigenfunction	الدالة المميزة
electromagnetic energy propagation	انتشار الطاقة الكهرومغناطيسية
electromechanical feedback system,	نظام التغذية العكسية الكهروميكانيكي
Elliptic filter	المرشح البيضاوي

encoding	التشفير
energy signals	إشارات الطاقة
energy spectral density	كثافة طيف الطاقة
envelope detector	الكشف الغلافي
equalization system	نظام التعادل
equation of motion	معادلة الحركة
error signal	إشارة الخطأ
even and odd functions	الدوال الزوجية والفردية
excitations	الإثارة
existence of *z* transform	تواجد محول زد
exponentials	الأسس

F

fast Fourier transform (FFT)	تحويل فورير السريع
feedback	التغذية العكسية
feed forward paths	مسارات التغذية الأمامية
filter classifications	تصنيفات المرشحات
filter transformations	تحويلات المرشحات
filters	المرشحات
final value theorem	نظرية القيمة النهائية
finite difference design	التصميم بالفروق المحددة
FIR filters	مرشحات استجابة النبضة المحددة
first-order systems	أنظمة الدرجة الأولي
fluid-mechanical system	نظام الموائع الميكانيكية
FM (frequency modulation)	التعديل الترددي
forcing function	دالة الدفع
forward and inverse discrete-time Fourier transforms	تحويل فورير الأزمنة المتقطعة الأمامي والعكسي

forward and inverse Laplace transforms	تحويلات لابلاس الأمامية والعكسية
forward and inverse *z* transforms	تحويلات زد الأمامية والعكسية
forward difference	الفروق الأمامية
Fourier series	تتابع فورير
Fourier transform	تحويل فورير
frequency	التردد
frequency compression	الضغط الترددي
frequency domain,	النطاق الترددي
frequency multiplexing	التعدد الترددي
frequency response	الاستجابة الترددية
frequency scaling	التحجيم الترددي
frequency shifting	الإزاحة الترددية
full-wave rectifier	موحد الموجة الكاملة
fundamental cyclic frequency	التردد الدوري الأساسي
fundamental radian frequency	التردد الزاوي الأساسي

G

gain	الكسب ، أو التكبير
generalized Fourier transform	تحويل فورير العام
Gibbs phenomenon	ظاهرة جيبس
graphic equalizer	معادل الرسم أو الشكل
graphing function	دوال الرسم
greatest common divisor	القاسم العام الأعظم

H

half-power bandwidth,	عرض مجال نصف القدرة
Hamming window function	دالة نافذة هامنج
hanning (von Hann) window function	دالة نافذة هاننج

harmonic function	الدالة التوافقية
harmonic response	الاستجابة التوافقية
highpass active filters	المرشحات الفعالة المنفذة للترددات العالية
high-spatial-frequency information	المعلومات المساحية العالية التردد
home-entertainment audio system	نظام التسلية السمعي المنزلي
homogeneity	التجانس
homogeneous system	النظام المتجانس
human body, as a system	الجسم البشري كنظام
human ear, response to sounds	استجابة الأذن البشرية للأصوات

I

ideal bandpass filter	المرشح المثالي المنفذ لمجال من الترددات
ideal filters	المرشحات المثالية
ideal interpolation	الترميم المثالي
ideal operational amplifier	مكبر العمليات المثالي
IIR filters	مرشحات استجابة النبضة غير المحدودة
image-processing techniques	طرق معالجة الصور
impedance	المعاوقة
impulse invariance	الثبات الصدمي
impulse response	الاستجابة الصدمية
impulse train	قطار الصدمات
indefinite integral	التكامل غير المحدود
independent variable	المتغير المستقل
inductor current	تيار الملف
infinite energy	الطاقة غير المحدودة
inhomogeneous system,	النظام غير المتجانس
initial value theorem	نظرية القيمة الابتدائية

input signals	إشارات الدخل
Instability	عدم الاستقرار
instantaneous frequency	التردد اللحظي
instrumentation system	نظام التجهيز
integrals	التكاملات
interference	التداخل
interpolation	الإستيفاء
inverse DFT	تحويل فورير المتقطع العكسي
inverse DTFT	تحويل فورير للأزمنة المتقطعة العكسي
inverse *z* transform	تحويل زد العكسي
invertibility	الانعكاسية
invertible system,	النظام القابل للعكس
inverting amplifier	مكبر العكس

K

Kaiser window function	دالة نافذة كيزر
Kirchhoff's voltage law	قانون كيرتشوف للجهد
Kronecker delta function	دالة دلتا لكرونوكر

L

Laplace transform	تحويل لابلاس
laser	الليزر
leakage	التسريب
left-sided signal	الإشارات اليسارية
L'Hôpital's rule	قانون لوبيتال
light oscillation	الترددات الضوئية
linear, time-invariant system	النظام الخطي الثابت زمنياً
linear algebra theory	نظرية الجبر الخطي

linear system	النظام الخطي
local oscillator	المذبذب الموضعي
log-amplified signal	الإشارة المكبرة لوغاريتمياً
logarithmic graphs	المخططات اللوغاريتمية
logarithmic scale	التدريج اللوغاريتمي
loop transfer function	دالة عبور الحلقة
lowpass Butterworth filter	مرشح بترورث المنفذ للترددات المنخفضة
LTI systems	الأنظمة الخطية الثابتة زمنياً

M

magnitude Bode diagrams	مخططات بود للمقدار
magnitude spectrum	مقدار الطيف
marginal stability	الاستقرار الهامشي
matched-z transform	تحويل زد المتوافق
mathematical model	النموذج الحسابي
mathematical voltage-current relations	علاقات الجهد والتيار الحسابية
matrix transfer function	مصفوفة دالة العبور
maximally flat Butterworth filter	مرشح بترورث الأعظم استواء
mechanical systems	الأنظمة الميكانيكية
memory	الذاكرة
minimum sampling rate	أقل معدل لأخذ العينات
modulation	التعديل
moving-average digital filter	مرشح المتوسط المتحرك الرقمي
multipath distortion	تشويه تعدد المسارات
multiple bandstop filter	المرشح المعوق للعديد من المجالات
multiplication-convolution duality	ازدواجية الضرب والالتفاف

N

narrowband FM	التعديل الترددي الضيق المجال

natural radian frequency	التردد الزاوي الطبيعي
natural response	الاستجابة الطبيعية
negative feedback	التغذية العكسية السالبة
noise	الضوضاء
noise removal	التخلص من الضوضاء
noncausal filter	المرشح غير السببي
noninverting amplifier	المرشح غير العاكس
nonlinear systems	الأنظمة الخطية
null bandwidth	عرض المجال الصفري
numerical computation	الحساب الرقمي
numerical convolution	الالتفاف الرقمي
numerical integration	التكامل الرقمي
Numerical integration functions	دوال التكامل العددي
Nyquist frequency	تردد نيكويست

O

odd functions	الدوال الفردية
Ohm's law	قانون أوم
one-finite-pole	القطب الوحيد المحدد
one-pole system	نظام القطب الواحد
open loop system	نظام الحلقة المفتوحة
operational amplifiers	مكبرات العمليات
optimal FIR filter design	تصميم المرشح FIR المثالي
orthogonal basis vectors	متجهات القاعدة المتعامدة
Orthogonality	التعامد
oscillator feedback system	نظام مذبذبات التغذية العكسية
overdamped case	حالة تخطي الكبح

Overmodulation	تخطي التعديل

P

parallel connections	التوصيلات المتوازية
parallel response	الاستجابة المتوازية
Parseval's theorem	نظرية بارسيفال
partial-fraction expansion	مفكوك الكسور الجزيئية
passband	مجال المرور
passive filters	المرشحات غير الفعالة
pendulum	البندول
periodic convolution	الالتفاف الدوري
periodic excitation	الإثارة الدورية
periodic functions	الدوال الدورية
periodic signals	الإشارات الدورية
phase	الطور أو الزاوية
phase Bode diagram	مخطط بود الطوري
phase detector	الكشف عن الطور
physical systems	الأنظمة الطبيعية
pixels	البكسلات
plant	المصنع
point spread function	دالة انتشار النقطة
pole-zero diagrams	مخطط الأقطاب والأصفار
power of signals	قدرة الإشارات
power spectral density	كثافة طيف القدرة
practical filters	المرشحات العملية
public address system	نظام العنوان العام
pulse amplitude modulation	مقدار تعديل النبضة

Q

quadrature part	الجزء التربيعي
qualitative concepts	المفاهيم النوعية
quantization	التكميم
quantizing signals	إشارات التكميم

R

radian frequency	التردد الزاوي
radio frequency	تردد الراديو
ramp function	الدالة الخطية التصاعدية
random signals	الإشارات العشوائية
range, of a function	مدي الدالة
rational function	الدالة الكسرية
RC filter	المرشح RC
real systems	الأنظمة الحقيقية
realization	البناء أو التحقيق
receiver	المستقبل
rectangular pulses	النبضات المربعة
Recursion	العودية أو التكرار
region of convergence	منطقة التقارب
residues vector	متجه المتبقي
resonant frequency	التردد الرنيني
responses	الاستجابات
right half-plane	النصف الأيمن من المستوى
RLC circuit	دائرة RLC
root locus	المحل الجذري

S

sample-and-hold	العينة والمسك
sampling,	أخذ العينات (العيننة)
sampling rate	معدل أخذ العينات (العيننة)
satellite communication system	نظام الاتصالات بالأقمار الصناعية
Scaling	التحجيم
s-domain	النطاق s
second-order systems	أنظمة الدرجة الثانية
sensor	الحساس أو المستشعر
shifting	الإزاحة
side lobes	الفصوص الجانبية
signal energy	طاقة الإشارة
signal reconstruction	إعادة تشكيل الإشارة
signal transmission	إرسال الإشارة
signal-to-noise ratio	نسبة الإشارة للضوضاء
signum function	دالة الإشارة
sinc function	دالة السنك
single-input, single-output system	نظام الدخل الأحادي والخرج الأحادي
smoothing filter	مرشح التنعيم
sound	الصوت
space shifting	الإزاحة في الفراغ
spatial variables	المتغيرات المساحية
spectrum analyzer	المحلل الطيفي
square wave	الموجة المربعة
stability	الاستقرار
standard signals	الإشارات القياسية

static system	النظام الساكن
steady-state error	خطأ الحالة المستقرة
step response	استجابة الخطوة
stop bits	بتات الوقف
Stopbands	مجال الوقف
strength, of an impulse	شدة الصدمة
summing junction	نقطة التجميع
Superposition	التجميع
suppressed carrier	الموجة الحاملة المخمدة
symbolic integration	التكامل الرمزي
synchronous demodulation	الكشف المتزامن
system connections	توصيلات الأنظمة
system equations	معادلات النظام
system realization	بناء النظام
system response	استجابة النظام
system stability	استقرار النظام

T

Thermocouples	الازدواج الحراري
time compression	الضغط الزمني
time constant	الثابت الزمني
time expansion	التمدد الزمني
time invariance	الثبات الزمني
time limited signals	الإشارات المحدودة زمنياً
time multiplexing	التعدد الزمني
time reversal property	خاصية العكس الزمني

English	العربية
time shifting property	خاصية الإزاحة الزمنية
time-domain methods	طرق النطاق الزمني
time-scaling property	خاصية التحجيم الزمني
total harmonic distortion	التشويه التوافقي الكلي
total system response	الاستجابة الكلية للنظام
Trajectory	المسار
transfer function	دالة العبور
transformation,	التحويل
transient response	الاستجابة الوقتية
transmitter	المرسل
triangular pulses	النبضات المثلثة
truncated ideal impulse response	استجابة النبضة المثالية المقطوعة
two-finite pole system	نظام القطبين المحددين
two-input two-output system	نظام الدخلين والخرجين
two-pole system	نظام القطبين
two-sided Laplace transform,	تحويل لابلاس ثنائي الجنب
type 0 system	نظام النوع الصفري
type-one Chebyshev filter	مرشح شيبيشيف من النوع واحد

U

English	العربية
unbounded response	الاستجابة غير المحدودة
uncertainty principle	أساسيات عدم التيقن
undamped resonance	الرنين غير المخمد
underdamped case	حالة تحت الإخماد أو الكبح
underdamped system	نظام تحت الكبح
undersampled signal	إشارة تحت معدل العينة
uniform sampling	العينة المنتظمة

unilateral Laplace transform	تحويل لابلاس أحادي الجانب
unit function	دالة الوحدة
unit sequence	تتابع الوحدة
unit-area rectangular pulse	النبضة المستطيلة أحادية المساحة
unit-step response	استجابة وحدة الخطوة
unity-gain feedback systems	نظام التغذية العكسية أحادي الكسب
unstable digital filter	المرشح الرقي غير المستقر
Upsampling	رفع معدل العينة
Unit ramp	وحدة الانحدار
Unit impulse	وحدة النبضة

V

value	القيمة
voiced sound	الصوت المنطوق
voltage divider	القاسم الجهدي
voltage gain	تكبير الجهد
voltage response	الاستجابة الجهدية

W

water level	مستوى الماء
Wavelength	الطول الموجي
weight	الوزن
wideband FM spectrum	طيف التعديل الترددي عريض المجال
window function	دالة النافذة
windowing	النوفذة

Z

z transform	تحويل زد
zero padding	إلحاق الأصفار
zero-input response	استجابة الدخل الصفري
z-transform properties	خواص تحويل زد
z-transform-Laplace-transform relationships	العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس

كشاف الموضوعات